Sada příkladů 2/12

# Funkce více proměnných

## Lokální extrémy funkcí více proměnných

Hledejte lokální extrémy následujících funkcí

1. $x^2 + y^2\,; \qquad x^2 - y^2\,; \qquad -x^2 - y^2$
2. $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
3. $(x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$
4. $(2x^2 - xy + y^2/3 - 5x + 5y/3 + 10/3)\mathrm{e}^{x+y}$
5. $$f(x) = \begin{cases} xy\ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
6. $x + y + 4\cos x \cos y$
7. $\sin x + \cos y + \cos(x - y)$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
8. $x - 2y + \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + 3\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$, $x \neq 0$
9. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
10. $(ax + by + cz)\mathrm{e}^{-x^2-y^2-z^2}$.

## Implicitní funkce

11. Dokažte, že existuje okolí $V$ bodu $(1, 1)$ takové, že množina

$$\{(x, y); x^3 + y^3 - 2xy = 0\} \cap V$$

je grafem nějaké funkce, která je třídy $C^2$ na nějakém okolí bodu 1. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$.

12. Dokažte, že existuje okolí $V$ bodu $(3,-2,2)$ takové, že množina

$$\{(x,y,z); z^3 - xz + y = 0\} \cap V$$

je grafem nějaké funkce, která je třídy $C^2$ na nějakém okolí bodu $(3,-2)$. Spočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3,-2)$.

13. Spočtěte parciální derivace 2. řádu funkce implicitně zadané vztahem $x + y + z = \mathrm{e}^{-(x+y+z)}$.

14. Nalezněte první a druhý diferenciál funkce dané vztahem $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$.

15. Jsou-li $x = f(y,z)$, $y = g(x,z)$, $z = h(x,y)$ implicitně zadány vztahem $F(x,y,z) = 0$, ukažte, že $f_y g_z h_x = -1$.

16. Napište $\mathrm{d}u$ a $\mathrm{d}v$, je-li $u + v = x + y$, $\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$.

17. Hledejte lokální extrémy funkce $z = z(x,y)$, dané implicitně vztahem

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)\,.$$

# LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH



Stacionární body: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

Je ve stacionárním bodě skutečně extrém? $Q(h) = d^2 f(a)(h,h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$

$Q(h)$ je kvadratická forma.

Je-li $Q(h)$ pozitivně definitní $\Rightarrow$ $f$ má v $a$ ostré lokální minimum

negativně definitní $\Rightarrow$ — " — maximum

indefinitní $\Rightarrow$ $f$ nemá v $a$ extrém (je tam sedlový bod)

poz./neg. semidefinitní $\Rightarrow$ nevíme, musíme zkoumat jinak

## IMPLICITNÍ FUNKCE

Věta o existenci: Nechť $a \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$, $F(a,b) = 0$.
Nechť existuje okolí $(a,b)$, kde $F$ je spojitá a $y \mapsto F(x,y)$ je ryze monotónní.
Pak existují okolí $\mathcal{U}_\delta(a)$ a $\mathcal{U}_\Delta(b)$ t.ž. $\forall x \in \mathcal{U}_\delta(a) \; \exists! \, y(x) \in \mathcal{U}_\Delta(b)$ t.ž.
$F(x, y(x)) = 0$. Navíc $y(x)$ je spojitá na $\mathcal{U}_\delta(a)$.

Věta o derivaci: Je-li navíc $F \in C^k$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Pak na $x \in \mathcal{U}_\delta(a)$ platí

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$$

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \end{aligned}\right\} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Jediný stacionární bod je počátek

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ... Hessova matice

$= 2 \cdot \mathbb{I}$, $\mathbb{I}$ je jednotková matice

$H_f$ je pozit. definitní $\Rightarrow$ v počátku je lok. minimum.

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y \end{aligned}\right\} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Jediný stac. bod je počátek

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \det H_f &= -4 < 0 \\ (H_f)_{1,1} &= 2 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow H_f \text{ je indefinitní}$$

V počátku není extrém, je tam sedlový bod.

$f(x,y) = -x^2 - y^2 = -(x^2 + y^2)$

$\Rightarrow$ v počátku je lok. maximum.

Ukážeme i přímo: $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

$\Rightarrow x = y = 0$ je jediný stac. bod.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$

$H_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$(H_f)_{1,1} = -2 < 0$, $\det H_f = 4 > 0$

Podle Sylvestrova kritéria je $H_f$ negativně definitní.

V počátku je lokální maximum.

2) $f(x,y) = x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3-2x-2y = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y^3-2x-2y = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow 4x^3=4y^3 \text{, tedy } x=y$$

$4x^3-4x=0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)=0$. Získáváme 3 stacion. body

$a_1=(0,0)$, $a_2=(1,1)$, $a_3=(-1,-1)$.

$$\mathbb{H}_f = \begin{pmatrix} 12x^2-2 & -2 \\ -2 & 12y^2-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}_f(a_1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \det \mathbb{H}_f(a_1) = 0 \Rightarrow \text{negativně semidef.}$$

$$\mathbb{H}_f(a_2) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \det \mathbb{H}_f(a_2) > 0, (\mathbb{H}_f(a_2))_{1,1} > 0 \Rightarrow \text{poz. def.}$$

$$\mathbb{H}_f(a_3) = \mathbb{H}_f(a_2) \Rightarrow \text{také poz. def.}$$

V počátku může i nemusí být lok. maximum. $f(0,0)=0$. Jsou na okolí počátku pouze záporné hodnoty? Ne! Vidíme $f(x,y) = x^4+y^4-(x+y)^2$. Pro $x=-y$ je $f(x,y)>0$.

V počátku není extrém. V bodech $a_2=(1,1)$ a $a_3=(-1,-1)$ jsou lokální minima

---

3) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xe^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)\cdot e^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2x) = 2e^{-(x^2+y^2)}\cdot(x-x^3-xy^2) = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2ye^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)\cdot e^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2y) = 2e^{-(x^2+y^2)}\cdot(y-y^3-yx^2) = 0\end{aligned}\right\} \begin{aligned} x\cdot(1-x^2-y^2)&=0\\ y\cdot(1-x^2-y^2)&=0\end{aligned}$$

Stacionární body jsou všechny body splňující $x^2+y^2=1$ a dále počátek $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4xe^{-(x^2+y^2)}\cdot x\cdot(1-x^2-y^2) + 2\cdot e^{-(x^2+y^2)}\cdot(1-x^2-y^2) + 2xe^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -4ye^{-(x^2+y^2)}\cdot x\cdot(1-x^2-y^2) + 2xe^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4ye^{-(x^2+y^2)}\cdot y\cdot(1-x^2-y^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2) + 2ye^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2y)$$

$$\mathbb{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ poz. def.} \Rightarrow \text{lokální minimum}$$

Pro $x^2+y^2=1$ je $\mathbb{H}_f = \begin{pmatrix} -4x^2e^{-1} & -4xye^{-1} \\ -4xye^{-1} & -4y^2e^{-1} \end{pmatrix} = -4e^{-1}\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$ a $\det \mathbb{H}_f = 0 \Rightarrow$ nemůže být ostrý extrém. Funkce je očividně radiálně symetrická (při přepisu do polárních souřadnic nezávisí na $\varphi$) a $g(r) = r^2e^{-r^2}$ má v bodě $r=1$ lokální maximum, protože $g'(r) = 2re^{-r^2}\cdot(1-r^2)$

Proto v bodech $x^2+y^2=1$ má $f(x,y)$ neostrá lokální maxima.

4) $f(x,y) = \left(2x^2 - xy + \frac{y^2}{3} - 5x + \frac{5y}{3} + \frac{10}{3}\right) e^{x+y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} \cdot \left(4x - y - 5 + 2x^2 - xy + \frac{y^2}{3} - 5x + \frac{5y}{3} + \frac{10}{3}\right) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y} \cdot \left(-x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{3} + 2x^2 - xy + \frac{y^2}{3} - 5x + \frac{5y}{3} + \frac{10}{3}\right) = 0$$

$$2x^2 - xy + \frac{y^2}{3} - x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3} = 0$$
$$2x^2 - xy + \frac{y^2}{3} - 6x + \frac{7}{3}y + 5 = 0 \quad | \cdot (-1)$$
$$5x - \frac{5}{3}y - \frac{20}{3} = 0$$
$$3x - y - 4 = 0$$
$$y = 3x - 4$$

$$2x^2 - x(3x-4) + \frac{9x^2 - 24x + 16}{3} - x + 2x - \frac{8}{3} - \frac{5}{3} = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} 1 \Rightarrow y = -1 \\ \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dva stacionární body, $a_1 = (1,-1)$, $a_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x+y} \cdot \left(4x - y - 1 + 2x^2 - xy + \frac{y^2}{3} - x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{x+y} \cdot \left(-x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3} + 2x^2 - xy + \frac{y^2}{3} - x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x+y} \cdot \left(-x + \frac{2}{3}y + \frac{7}{3} + 2x^2 - xy + \frac{y^2}{3} - 6x + \frac{7}{3}y + 5\right)$$

$$H_f(a_1) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \det H_f(a_1) > 0, \quad (H_f(a_1))_{1,1} > 0$$

$\Rightarrow H_f(a_1)$ je poz. def. a v bodě $a_1$ je lokální minimum

$$H_f(a_2) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/6 \end{pmatrix} \qquad \det H_f(a_2) < 0, \quad (H_f(a_2))_{1,1} > 0$$

$\Rightarrow H_f(a_2)$ je indefinitní a v bodě $a_2$ není extrém.

---

5) $f(x,y) = xy \ln(x^2+y^2)$ pro $(x,y) \neq (0,0)$
$\phantom{f(x,y)} = 0$ pro $(x,y) = (0,0)$

Na okolí počátku je $\ln(x^2+y^2) < 0$ a $xy$ může nabývat kladných i záporných hodnot
$\Rightarrow f(x,y)$ je na okolí počátku kladná i záporná a v počátku není extrém. Dále vyšetříme mimo počátek.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2+y^2} = 0 \qquad y = 0 \text{ nebo } \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0 \qquad x = 0 \text{ nebo } \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

a) $y = 0$ a $\ln x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

b) $x = 0$ a $\ln y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

c) $x^2 = y^2$ a $\ln(2x^2) + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = e^{-1}$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2e}}$ a $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2e}}$

Máme 8 stac. bodů: $(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1), \left(\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2e}}, -\sqrt{\frac{1}{2e}}\right), \left(\sqrt{\frac{1}{2e}}, -\sqrt{\frac{1}{2e}}\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy}{x^2+y^2} - \frac{4x^3 y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy}{x^2+y^2} - \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

V bodech $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ a $(0,-1)$ máme $H_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $(H_f)_{1,1} = 0 \Rightarrow$ matice není poz. def. ani neg. def. (4)

$\det H_f \neq 0 \Rightarrow$ matice je indefinitní.

Extrémy v těchto bodech nejsou.

Pro zjednodušení zápisu označme $r = \sqrt{\frac{1}{2e}}$.

Pak v bodě $(r,r)$: $H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ je poz. def. $\Rightarrow$ v tomto bodě je lok. minimum

V bodě $(r,-r)$: $H_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ je neg. def. $\Rightarrow$ v tomto bodě je lok. maximum

V bodě $(-r,r)$: $H_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ je neg. def. $\Rightarrow$ lok. maximum

V bodě $(-r,-r)$: $H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ je poz. def $\Rightarrow$ lok. minimum

---

6) $f(x,y) = x + y + 4\cos x \cos y$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 1 - 4\sin x \cos y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 - 4\cos x \sin y = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\sin x \cos y = \cos x \sin y$ a nic z toho nemůže být $= 0$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Rightarrow y = x + k\pi$

$4\sin x \cos(x + k\pi) = 1$, tedy $(-1)^k \cdot 4\sin x \cos x = 1$, neboli $\sin 2x = \pm \frac{1}{2}$

a odtud pro $k$ sudé: $2x = \pi/6 + 2l\pi$ a $2x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$

tedy $x = \pi/12 + l\pi$ $\quad x = \frac{5\pi}{12} + l\pi$

a odpovídající $y = \pi/12 + l\pi + 2m\pi$, $y = \frac{5\pi}{12} + l\pi + 2m\pi$

pro $k$ liché: $2x = \frac{7\pi}{6} + 2l\pi$ a $2x = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi$

tedy $x = \frac{7\pi}{12} + l\pi$ a $x = \frac{11\pi}{12} + l\pi$

a odpovídající $y = \frac{7\pi}{12} + l\pi + (2m+1)\pi$ a $y = \frac{11\pi}{12} + l\pi + (2m+1)\pi$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4\cos x \cos y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4\sin x \sin y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\cos x \cos y$

Body $\left(\frac{\pi}{12} + l\pi, \frac{\pi}{12} + l\pi + 2m\pi\right)$: $H_f = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ det $> 0$, $1,1 < 0$ $\Rightarrow$ neg. def. $\Rightarrow$ lok. max.

Body $\left(\frac{5\pi}{12} + l\pi, \frac{5\pi}{12} + l\pi + 2m\pi\right)$: $H_f = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ det $< 0$, $1,1 > 0$ $\Rightarrow$ indef. $\Rightarrow$ není extrém

Body $\left(\frac{7\pi}{12} + l\pi, \frac{19\pi}{12} + l\pi + 2m\pi\right)$: $H_f = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ -2-\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ det $< 0$, $1,1 > 0$ $\Rightarrow$ indef. $\Rightarrow$ není extrém

Body $\left(\frac{11\pi}{12} + l\pi, \frac{23\pi}{12} + l\pi + 2m\pi\right)$: $H_f = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & -2+\sqrt{3} \\ -2+\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ det $> 0$, $1,1 > 0$ $\Rightarrow$ poz. def. $\Rightarrow$ lok. min

7) $f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$ na intervalu $(0,\pi/2)\times(0,\pi/2)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos x - \sin(x-y) = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\sin y + \sin(x-y) = 0\end{aligned}\right\}\quad \cos x = \sin y \Rightarrow x = \pi/2 - y$$

$-\sin y + \sin(\pi/2 - 2y) = 0$

$-\sin y + \cos 2y = 0$ .... to se moc nehodí

$\sin(\pi/2 - 2y) = \sin y \Rightarrow \pi/2 - 2y = y$ protože $y \in (0,\pi/2)$

$y = \pi/6 \Rightarrow x = \pi/3$

$a = (\pi/3, \pi/6)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x - \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos y - \cos(x-y)$$

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\det > 0$, $1,1 < 0$ $\Rightarrow$ neg. def. $\Rightarrow$ lokální maximum

---

8) DÚ

---

9) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x+2 = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y+4 = 0\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z-6 = 0\end{aligned}\right\}\quad \text{stac. bod } a = (-1,-2,3)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

poz. def. $\Rightarrow$ v bodě $a$ je lok. minimum

---

10) $f(x,y,z) = (ax+by+cz)e^{-x^2-y^2-z^2}$. Nechť alespoň jedno z čísel $a,b,c$ je nenulové, jinak $f \equiv 0$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-x^2-y^2-z^2}\cdot\big(a - 2x(ax+by+cz)\big) = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{-x^2-y^2-z^2}\cdot\big(b - 2y(ax+by+cz)\big) = 0\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= e^{-x^2-y^2-z^2}\cdot\big(c - 2z(ax+by+cz)\big) = 0\end{aligned}\right\}$$

Očividně musí být $ax+by+cz \neq 0$. Nechť $a,b,c \neq 0$ a dostáváme $\frac{a}{2x} = \frac{b}{2y} = \frac{c}{2z} \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$, $z = \frac{c}{a}x$

$a - 2x\cdot\left(ax + \frac{b^2 x}{a} + \frac{c^2 x}{a}\right) = 0$

$a^2 - x^2\cdot(a^2+b^2+c^2) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Máme tedy 2 stac. body, výpočet platí i pokud je některý parametr $= 0$. $y = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $z = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x^2-y^2-z^2}\cdot\Big(-2(ax+by+cz) - 2ax - 2x\big(a - 2x(ax+by+cz)\big)\Big)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-x^2-y^2-z^2}\cdot\Big(-2(ax+by+cz) - 2by - 2y\big(b - 2y(ax+by+cz)\big)\Big)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = e^{-x^2-y^2-z^2}\cdot\Big(-2(ax+by+cz) - 2cz - 2z\big(c - 2z(ax+by+cz)\big)\Big)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-x^2-y^2-z^2}\cdot\Big(-2bx - 2y\big(a - 2x(ax+by+cz)\big)\Big)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = e^{-x^2-y^2-z^2}\cdot\Big(-2cx - 2z\big(a - 2x(ax+by+cz)\big)\Big)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = e^{-x^2-y^2-z^2}\cdot\Big(-2cy - 2z\big(b - 2y(ax+by+cz)\big)\Big)$$

Označme $A_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ a $A_2 = -A_1$. Označme také $r = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Pak $(ax+by+cz)(A_1) = r$, $(ax+by+cz)(A_2) = -r$, $e^{-x^2-y^2-z^2}(A_1) = e^{-x^2-y^2-z^2}(A_2) = e^{-1}$

$$\mathbb{H}_f(A_1) = e^{-1}\cdot\begin{pmatrix} -2r-\frac{4a^2}{r}+\frac{4a^2}{r} & -\frac{4ab}{r}+\frac{4ab}{r} & -\frac{4ac}{r}+\frac{4ac}{r} \\ -\frac{4ab}{r}+\frac{4ab}{r} & -2r-\frac{4b^2}{r}+\frac{4b^2}{r} & -\frac{4bc}{r}+\frac{4bc}{r} \\ -\frac{4ac}{r}+\frac{4ac}{r} & -\frac{4bc}{r}+\frac{4bc}{r} & -2r-\frac{4c^2}{r}+\frac{4c^2}{r}\end{pmatrix} = e^{-1}\begin{pmatrix} -2r & 0 & 0 \\ 0 & -2r & 0 \\ 0 & 0 & -2r \end{pmatrix}$$ neg. def. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ lok. max.

$$\mathbb{H}_f(A_2) = e^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2r & 0 & 0 \\ 0 & 2r & 0 \\ 0 & 0 & 2r \end{pmatrix}$$ poz. def $\Rightarrow$ lok. minimum

---

11) $F(x,y) = x^3+y^3-2xy$. Předně $F(1,1)=0$. $F$ je spojitá všude.

Dále musíme ověřit, že $y \mapsto F(x,y)$ je ryze monotónní na okolí bodu $(1,1)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2-2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 1 \neq 0$. $y \mapsto F(x,y)$ je v bodě $(1,1)$ rostoucí

a ze spojitosti derivace je také na okolí $(1,1)$ ryze monotónní.

Označme příslušnou implicitní funkci $y=f(x)$ a víme $f(1)=1$.

$$f'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)} = -\frac{(3x^2-2y)(1,1)}{1} = \underline{\underline{-1}}$$

Vyšší derivace: Budeme derivovat vztah $F(x,f(x))=0$ podle $x$.

Máme: $x^3+f^3(x)-2xf(x)=0$

$\Rightarrow$ $3x^2+3f^2(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=0$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{2f(x)-3x^2}{3f^2(x)-2x}$, $\underline{f'(1)=-1}$ opravdu

$$f''(x) = \frac{(2f'(x)-6x)\cdot(3f^2(x)-2x)-(6f(x)f'(x)-2)\cdot(2f(x)-3x^2)}{(3f^2(x)-2x)^2}$$

a odtud $f''(1) = \frac{-8\cdot 1-(-8)\cdot(-1)}{1^2} = \underline{\underline{-16}}$

---

12) DÚ

---

13) $F(x,y,z) = x+y+z-e^{-x-y-z}=0$

Nejprve $\frac{\partial F}{\partial z} = 1+e^{-x-y-z}>0$ všude, tedy všude to určuje implicitně fci $z(x,y)$

Derivujme $F(x,y,z(x,y))=0$ podle $x$: $1+\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-x-y-z}\cdot\left(-1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$

$$\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\left(1+e^{-x-y-z}\right)=0.$$

Druhá závorka je vždy kladná, proto $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$. Analogicky $\frac{\partial z}{\partial y}=-1$ a proto

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

14) $F(x,y,z) = z - x - \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 - \frac{1}{1+\frac{y^2}{(z-x)^2}} \cdot (-1) \cdot \frac{1\cdot y}{(z-x)^2} = 1 + \frac{y}{(z-x)^2+y^2}.$$ Vše tedy děláme mimo body, kde $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$

Derivujeme podle $x$: $\frac{\partial z}{\partial x} - 1 - \frac{1}{1+\frac{y^2}{(z-x)^2}} \cdot y \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(z-x)^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) = 0$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{y}{(z-x)^2+y^2}\right) = 0.$$ Druhá závorka je ale $\frac{\partial F}{\partial z}$, což předpokládáme, že je $\neq 0$.

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

Derivujeme podle $y$: $\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{1+\frac{y^2}{(z-x)^2}} \cdot \frac{(z-x) - y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(z-x)^2} = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \left(1 + \frac{y}{(z-x)^2+y^2}\right) = \frac{z-x}{(z-x)^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z-x}{(z-x)^2+y^2+y}$$

Odtud tedy $dz(h) = h_1 + \frac{z-x}{(z-x)^2+y^2+y} h_2$

Snadno vidíme $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. Zderivujeme výraz pro $\frac{\partial z}{\partial y}$ podle $y$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left[(z-x)^2+y^2+y\right] - (z-x)\cdot\left[2\cdot(z-x)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + 2y + 1\right]}{\left((z-x)^2+y^2+y\right)^2} = \frac{-(z-x)\cdot 2\cdot\left[y + \frac{(z-x)^2}{(z-x)^2+y^2+y}\right]}{\left((z-x)^2+y^2+y\right)^2} = \frac{-2(z-x)(y+1)\left((z-x)^2+y^2\right)}{\left((z-x)^2+y^2+y\right)^3}$$

A odtud $d^2 z(h,k) = \frac{-2(z-x)(y+1)\left((z-x)^2+y^2\right)}{\left((z-x)^2+y^2+y\right)^3} h_2 k_2$

---

15) $F(x,y,z) = 0$. Vše provádíme za předpokladu, že $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ a $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

$x = f(y,z)$. Potřebujeme $\frac{\partial f}{\partial y}$, tedy derivujeme původní předpis podle $y$ a $x$ je funkce v $y$.

Podle řetízkového pravidla $\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Odtud $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$

$y = g(x,z)$ a derivujeme podle $z$: $\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0$. Odtud $\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

$z = h(x,y)$ a derivujeme podle $x$: $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial h}{\partial x} = 0$. Odtud $\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

Celkem $f_y g_z h_x = -\frac{F_y}{F_x}\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1.$

16) $u+v = x+y$, $\quad \dfrac{\sin u}{\sin v} = \dfrac{x}{y}$ $\quad\Big\}\quad$ $F_1(x,y,u,v) = u+v-x-y = 0$, $\quad F_2(x,y,u,v) = \dfrac{\sin u}{\sin v} - \dfrac{x}{y} = 0$ $\qquad$ Chceme $u(x,y)$, $v(x,y)$

Verze věty o implicitní funkci vyžaduje nenulovost determinantu

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{pmatrix} \neq 0. \quad \text{Máme} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\cos u}{\sin v} & -\frac{\sin u}{\sin^2 v}\cdot\cos v\end{pmatrix} = -\frac{\sin u\cos v}{\sin^2 v} - \frac{\cos u}{\sin v}$$

$$= -\frac{\sin(u+v)}{\sin^2 v}.$$

Můžeme tedy pracovat v bodech $v \neq k\pi$

a $u+v \neq k\pi$, také $y \neq 0$

Pro zjištění $du$ a $dv$ potřebujeme parciální derivace $u, v$ podle $x, y$.

Derivujeme tedy $F_1(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0$ podle $x$ a $y$.

$F_2(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}: \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}: \quad \frac{\cos u\frac{\partial u}{\partial x}\sin v - \sin u\cos v\frac{\partial v}{\partial x}}{\sin^2 v} - \frac{1}{y} = 0$$

Řešíme soustavu: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 1 - \dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\sin(u+v)}{\sin^2 v}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sin u\cos v}{\sin^2 v} - \frac{1}{y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{1}{y} + \frac{\sin u\cos v}{\sin^2 v}\right)\cdot\frac{\sin^2 v}{\sin(u+v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos u\sin v}{\sin(u+v)} - \frac{\sin^2 v}{y\cdot\sin(u+v)}$$

Podobně derivace podle $y$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}: \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0$$

$$\frac{\cos u\frac{\partial u}{\partial y}\sin v - \sin u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}}{\sin^2 v} + \frac{x}{y^2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\sin(u+v)}{\sin^2 v}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\sin u\cos v}{\sin^2 v} + \frac{x}{y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{\sin u\cos v}{\sin^2 v}\right)\cdot\frac{\sin^2 v}{\sin(u+v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\cos u\sin v}{\sin(u+v)} + \frac{x\sin^2 v}{y^2\sin(u+v)}$$

Máme výsledek

$$du(h) = \left(\frac{\sin^2 v}{y\cdot\sin(u+v)} + \frac{\sin u\cos v}{\sin(u+v)}\right)h_1 + \left(\frac{-x\sin^2 v}{y^2\sin(u+v)} + \frac{\sin u\cos v}{\sin(u+v)}\right)h_2$$

$$dv(h) = \left(\frac{\cos u\sin v}{\sin(u+v)} - \frac{\sin^2 v}{y\cdot\sin(u+v)}\right)h_1 + \left(\frac{\cos u\sin v}{\sin(u+v)} + \frac{x}{y^2}\frac{\sin^2 v}{\sin(u+v)}\right)h_2$$

17) $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2 - a^2(x^2+y^2-z^2) = 0$

$a=0$ : Rovnici $F(x,y,z)=0$ splňuje jen bod $(x,y,z)=(0,0,0)$. Nemáme žádnou fci

Proto nechť $a \neq 0$ a BÚNO $a>0$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 2\cdot(x^2+y^2+z^2)\cdot 2z + 2a^2z = 2z\cdot(a^2+2(x^2+y^2+z^2))$, tedy potřebujeme $z\neq 0$.

Dále pracujeme v bodech, kde $z\neq 0$ a $z=0$ vyřešíme zvlášť [z tam není jednoznačné, není tam extrém]

Derivujeme $F(x,y,z(x,y))$ podle x a y: $2\cdot(x^2+y^2+z^2)\cdot\left(2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) - a^2\cdot\left(2x-2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(a^2+2(x^2+y^2+z^2)\right) = 2x\cdot\left(a^2-2(x^2+y^2+z^2)\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}\cdot\frac{a^2-2(x^2+y^2+z^2)}{a^2+2(x^2+y^2+z^2)}$$

Podobně $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}\cdot\frac{a^2-2(x^2+y^2+z^2)}{a^2+2(x^2+y^2+z^2)}$. $\nabla z = 0$ nastane mimo počátek v bodech $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$

V počátku máme jen $z=0$, kde nám věta o implicitní fci nefunguje.

Dosazením $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$ do $F(x,y,z)=0$ : $\frac{a^4}{4} - a^2\left(\frac{a^2}{2}-z^2-z^2\right) = 0 \Rightarrow \underline{z^2 = \frac{a^2}{8}}$ a tedy $x^2+y^2 = \frac{3a^2}{8}$

Ze zadání je zřejmé, že máme dvě takto zadané fce, jedna je kladná a druhá záporná.

Pokud $z_1 \geq 0$, pak $z_2 = -z_1 \leq 0$.

Dále potřebujeme druhé derivace v bodech, které jsme našli, tj. $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\left(a^2-2(x^2+y^2+z^2)+x\cdot\left(-4x-4z\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right)\cdot z\cdot\left(a^2+2(x^2+y^2+z^2)\right) - x\cdot\left(a^2-2(x^2+y^2+z^2)\right)\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(a^2+2(x^2+y^2+z^2)\right)+z\cdot\left(4x+4z\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right)}{z^2\cdot\left(a^2+2(x^2+y^2+z^2)\right)^2}$$

Vyčíslíme v stacionárních bodech, kde máme $a^2-2(x^2+y^2+z^2)=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$

a dostáváme $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(B) = \frac{-4x^2z\cdot 2a^2 - 0}{\frac{a^2}{8}\cdot(2a^2)^2} = \frac{-16x^2z}{a^4}$. Podobně $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(B) = \frac{-16y^2z}{a^4}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{x\cdot\left(-4y-4z\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot z\cdot\left(a^2+2(x^2+y^2+z^2)\right) - x\cdot\left(a^2-2(x^2+y^2+z^2)\right)\cdot\ldots}{z^2\cdot\left(a^2+2(x^2+y^2+z^2)\right)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(B) = \frac{-16xyz}{a^4}$$

$H_f(B) = -\frac{16z}{a^4}\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$. Matice $\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$ je pozitivně semidefinitní, příslušná kvadratická

forma je $Q(h) = x^2h_1^2 + y^2h_2^2 + 2xyh_1h_2 = (xh_1+yh_2)^2 \geq 0$

Odtud: pro $z_1 \geq 0$ je $H_f(B)$ negativně semidef. a v bodech B jsou lokální neostrá maxima.

pro $z_2 \leq 0$ je $H_f(B)$ pozitivně semidef. a v bodech B jsou lokální neostrá minima.