Sada příkladů 10/11

Distribuce

1. Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:
   a) $x^k D^n \delta_0, \quad k, n \in \mathbb{N}$ b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\omega} D^n \delta_0, \quad \omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

2. Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:
   a) $|x|^2 \Delta \delta_0$ b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\omega)} \Delta^k \delta_0, \quad \omega \in \mathbb{R}^N, k \in \mathbb{N}$
   c) $\mathrm{e}^{-a|x|^2} \Delta \delta_0, \quad a > 0$

3. Určete distribuce $\Delta T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:
   a) $u(x) = |x|^\lambda, \quad \lambda \geq 2 - N, N \geq 2$ b) $u(x) = \ln |x|$

4. Dokažte: Nechť f je hladká funkce na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A_k = f_+^{(k)}(0) - f_-^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Potom
$$D^n T_f = T_{f^{(n)}} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k D^{n-1-k} \delta_0.$$

5. Ukažte, že posloupnosti
   a) $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1}$ b) $g_n(x) = \frac{n}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{n^2 x^2}{4}}$ c) $h_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x}$
   konvergují v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ k δ_0 distribuci.

6. Ukažte, že
$$T_{\frac{1}{x-\mathrm{i}0}} = T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}} + \mathrm{i}\pi\delta_0.$$

7. Nalezněte rozvoj do Fourierových řad pro periodické distribuce:
   a) $T_{\mathrm{p.v.cotg}(\pi x)}$ b) $T_{\mathrm{p.v.tg}(\pi x)}$ c) $T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{\sin(\pi x)}}$

8. Dokažte, že:
   a) $\delta_0 \circ (\mathbb{A}x) = \dfrac{1}{|\det \mathbb{A}|} \delta_0$
   b) $\delta_0 \circ (x + \mathbf{b}) = \delta_{\mathbf{b}}$
   c) $\delta_0 \circ (ax) = \dfrac{1}{|a|^N} \delta_0.$

9. Ukažte, že metoda zavedení distribucí $H_{x_+^\lambda}$ pomocí Taylorova rozvoje testovacích funkcí dává totéž co holomorfní rozšiřování.

10. Ukažte, že limity

$$\lim_{\lambda\to -2m} H_{|x|^\lambda} \qquad \lim_{\lambda\to -2m+1} H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}$$

existují v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a tudíž definují distribuce $H_{x^{-2m}}$ resp. $H_{x^{-2m+1}}$.

11. Dokažte pro $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
H_{(x\pm \mathrm{i}0)^{-k}} &= H_{x^{-k}} \mp \frac{\mathrm{i}\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1}\delta_0 \\
H_{x^{-k}} &= \frac{1}{2}\Big(H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}} + H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}}\Big) \\
H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}} - H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}} &= -2\pi\mathrm{i}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1}\delta_0.
\end{aligned}$$

Fourierovy řady vs. distribuce

$f \in L^1((0,1))$, její F. koeficienty $c_n := \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx$, $n \in \mathbb{Z}$

a řada je $f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}$. Pro $f \in L^1$ ale neplatí rovnost mezi f a řadou

Můžeme ale integrovat ! $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_n}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} + c_0 x + d_0$.

[Můžeme integrovat tak dlouho, dokud řada upravo nebude konvergovat stejnoměrně, což je v případech kdy c_n roste jako polynom v n.]

Nyní $\langle T_F, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} F\varphi = \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\substack{n=-m \\ n \neq 0}}^{m} \frac{c_n}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} + c_0 x + d_0 \right) \varphi \, dx$ [prohodili jsme lim a $\int$, řada totiž konverguje stejnoměrně]

a $\langle DT_F, \varphi \rangle = -\langle T_F, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} F\varphi' = \int_{\mathbb{R}} F'\varphi = \int_{\mathbb{R}} f\varphi = \langle T_f, \varphi \rangle$

$$-\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\substack{n=-m \\ n\neq 0}}^{m} \frac{c_n}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} + c_0 x + d_0 \right) \varphi' dx = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=-m}^{m} c_n e^{2\pi i n x} \right) \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

a odtud $T_f = \lim_{m\to\infty} T_{\sum_{-m}^{m} c_n e^{2\pi i n x}}$

---

7 a) Začneme řadou $\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n x}$, tedy $c_n = 1$ pro $n \geq 0$, $c_n = 0$ pro $n < 0$

Pak $S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{2\pi i k x} = \frac{1 - e^{2\pi i x(n+1)}}{1 - e^{2\pi i x}}$ Zřejmě $\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\, dx = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, jediný nenulový integrál je totiž z členu $e^{2\pi i x \cdot 0}$

$$\langle T_{S_n(x)}, \varphi \rangle = \left\langle \frac{1-e^{2\pi i x(n+1)}}{1-e^{2\pi i x}}, \varphi \right\rangle = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1-e^{2\pi i x(n+1)}}{1-e^{2\pi i x}} \cdot (\varphi(x) - \varphi(0))\, dx + \underbrace{\varphi(0) \int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\, dx}_{=\varphi(0)}$$

$\varphi \in \mathcal{D}((-1/2, 1/2))$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-e^{2\pi i x}} \cdot (\varphi(x) - \varphi(0))\, dx \; - \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{2\pi i x(n+1)}}{1-e^{2\pi i x}} \cdot (\varphi(x) - \varphi(0))\, dx}$$

Toto je $\tilde{c}_{n+1}$ od funkce $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{1-e^{2\pi i x}}$, ta má v 0 konečnou limitu $\Rightarrow$ lze dodefinovat a je $L^2((-1/2, 1/2))$

Riemann-Lebesgue: $\tilde{c}_{n+1} \to 0$

$$\frac{1}{1-e^{2\pi i x}} = \frac{1}{1-\cos 2\pi x - i \sin 2\pi x} = \frac{1-\cos 2\pi x + i(2\sin \pi x \cos \pi x)}{1 - 2\cos 2\pi x + \cos^2 2\pi x + \sin^2 2\pi x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + i \frac{2\sin \pi x \cos \pi x}{1 - \cos 2\pi x} \right) = \frac{1}{2}(1 + i \operatorname{cotg} \pi x)$$

a odtud $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{1-e^{2\pi i x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{2} \int_{\varepsilon < |x| < 1/2} (\varphi(x) - \varphi(0))(1 + i \operatorname{cotg} \pi x)$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \varphi(x)\, dx - \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varepsilon < |x| < 1/2} \operatorname{cotg} \pi x\, \varphi(x)\, dx$$

(poslední člen vypadne, $\operatorname{cotg} \pi x$ je lichá fce)

$$\Rightarrow \langle T_{S_n(x)}, \varphi \rangle \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2}\langle T_1, \varphi \rangle + \frac{i}{2} \langle T_{\text{p.v.} \operatorname{cotg} \pi x}, \varphi \rangle$$

Reálná část: $\sum_{n=0}^{\infty} T_{\cos 2\pi n x} = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2} T_1$ Imaginární část: $\sum_{n=0}^{\infty} T_{\sin 2\pi n x} = \frac{1}{2} T_{\text{p.v.} \operatorname{cotg} \pi x}$

OBOJÍ VE SMYSLU ROVNOSTI DISTRIBUCÍ V $\mathcal{D}'((-1/2, 1/2))$

b) Použijeme vztah $\operatorname{cotg}(A-\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{tg} A$, čímž vše posuneme z intervalu $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ na $(0,1)$.

Je-li $\varphi \in \mathcal{D}((-\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$, pak $\tilde{\varphi}(y) := \varphi(y-\frac{1}{2}) \in \mathcal{D}((0,1))$

Máme $\forall \varphi \in \mathcal{D}((-\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$:

$$\langle T_{\text{p.v.}\operatorname{cotg}\pi x}, \varphi\rangle = \text{p.v.}\int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{cotg}\pi x\, \varphi(x)\,dx \overset{y=x+1/2}{=} \text{p.v.}\int_0^1 \operatorname{cotg}(\pi y - \tfrac{\pi}{2})\varphi(y-\tfrac{1}{2})\,dy = -\text{p.v.}\int_0^1 \operatorname{tg}(\pi y)\tilde{\varphi}(y)\,dy = -\langle T_{\text{p.v.}\operatorname{tg}\pi x}, \tilde{\varphi}\rangle$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_0^m \langle T_{\sin 2\pi n x}, \varphi\rangle = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^m \int_{-1/2}^{1/2} \sin 2\pi n x\, \varphi(x)\,dx = \lim_{m\to\infty}\sum_0^m \int_0^1 \sin(2\pi n y - \pi n)\varphi(y-\tfrac{1}{2})\,dy = \lim_{m\to\infty}\sum_0^m \int_0^1 (-1)^n \sin 2\pi n y\, \tilde{\varphi}(y)\,dy$$

$$= \left\langle \sum_0^\infty T_{(-1)^n \sin 2\pi n y}, \tilde{\varphi}\right\rangle$$

a odtud tedy $T_{\text{p.v.}\operatorname{tg}\pi x} = \sum_0^\infty T_{(-1)^{n+1}\sin 2\pi n y}$ ve smyslu distribucí v $\mathcal{D}'((0,1))$.

c) Použijeme vztah $\frac{1}{\sin A} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2} - \operatorname{cotg} A$ a tedy pro interval $(-1,1)$ dostaneme

$$\langle T_{\text{p.v.}\frac{1}{\sin\pi x}}, \varphi\rangle = \text{p.v.}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin\pi x}\varphi(x)\,dx = \text{p.v.}\int_{-1}^1 \operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}\varphi(x)\,dx - \text{p.v.}\int_{-1}^1 \operatorname{cotg}\pi x\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \text{p.v.}\,2\int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{cotg}\pi y\,\varphi(2y)\,dy - \text{p.v.}\int_{-1}^1 \operatorname{cotg}\pi x\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^m 4\int_{-1/2}^{1/2} \sin 2\pi n y\,\varphi(2y)\,dy - \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^m 2\int_{-1}^1 \sin 2\pi n x\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^m 2\int_{-1}^1 \sin \pi n x\,\varphi(x)\,dx - \lim_{m\to\infty}\sum_0^m 2\int_{-1}^1 \sin 2\pi n x\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^m 2\int_{-1}^1 \sin(2n+1)\pi x\,\varphi(x)\,dx = 2\sum_0^\infty \langle T_{\sin(2n+1)\pi x}, \varphi\rangle$$

a tedy $T_{\text{p.v.}\frac{1}{\sin\pi x}} = 2\sum_0^\infty T_{\sin(2n+1)\pi x}$ v $\mathcal{D}'((-1,1))$

SKLÁDÁNÍ DISTRIBUCÍ S DIFEOMORFISMY

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $h: \Omega \to \mathbb{R}^n$ je C^∞ difeomorfismus zobrazující Ω na $\tilde{\Omega}$. Nechť $T \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$.
Pak $T\circ h \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je definováno jako $\langle T\circ h, \varphi\rangle = \left\langle T, \frac{1}{|J_h(h^{-1}(y))|}\cdot\varphi(h^{-1}(y))\right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

8a) $\langle \delta_0\circ(Ax), \varphi\rangle = \langle \delta_0, \frac{1}{|\det A|}\varphi(A^{-1}x)\rangle = \frac{1}{|\det A|}\langle \delta_0, \varphi(A^{-1}x)\rangle = \frac{1}{|\det A|}\varphi(0) = \langle \frac{1}{|\det A|}\delta_0, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

8b) $\langle \delta_0\circ(x+b), \varphi\rangle = \langle \delta_0, \varphi(x-b)\rangle = \varphi(b) = \langle \delta_b, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

8c) $\langle \delta_0\circ(ax), \varphi\rangle = \langle \delta_0, \frac{1}{|a|^N}\varphi(\frac{x}{a})\rangle = \frac{1}{|a|^N}\varphi(0) = \frac{1}{|a|^N}\langle \delta_0, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

Homogenní distribuce

$\lambda \in \mathbb{C}$ a zavádíme $x_+^\lambda := \begin{cases} x^\lambda & \text{pro } x>0 \\ 0 & \text{pro } x\le 0\end{cases}$ a $x_-^\lambda := (-x)_+^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{pro } x\ge 0 \\ |x|^\lambda & \text{pro } x<0.\end{cases}$

$\mathrm{Re}\,\lambda > -1 \Rightarrow$ existuje regulární distribuce $T_{x_+^\lambda}$, protože $x_+^\lambda \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$\mathrm{Re}\,\lambda \le -1$??

Definice $k \in \mathbb{N}$. Pak na $G_k := \{\lambda\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > -k-1,\ -\lambda\notin\mathbb{N}\}$ definujeme parametrické systémy distribucí $\{H_{x_+^\lambda}\}_{\lambda\in G_k}$ a $\{H_{x_-^\lambda}\}_{\lambda\in G_k}$ pomocí předpisu

$$H_{x_+^\lambda} = \frac{D^k T_{x_+^{\lambda+k}}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k)} \quad \text{a} \quad \langle H_{x_-^\lambda},\varphi\rangle = \langle H_{x_+^\lambda}, \varphi(-x)\rangle \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Platí:

- $xH_{x_+^\lambda} = H_{x_+^{\lambda+1}}$ a $-xH_{x_-^\lambda} = H_{x_-^{\lambda+1}}$
- $H_{x_+^0} = T_{x_+^0} = T_H$, kde H je Heavisidova fce
- $\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{-m;\ m\in\mathbb{N}_0\}$: $DH_{x_+^\lambda} = \lambda H_{x_+^{\lambda-1}}$ a $DH_{x_-^\lambda} = -\lambda H_{x_-^{\lambda-1}}$
- $\forall k\in\mathbb{N}$ mají systémy $\{H_{x_+^\lambda}\}$ a $\{H_{x_-^\lambda}\}$ v bodě $-k$ izolovanou singularitu a

$$\mathrm{Res}_{-k} H_{x_+^\lambda} = (-1)^{k-1}\frac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!} \quad \text{a} \quad \mathrm{Res}_{-k} H_{x_-^\lambda} = \frac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!}$$

(to znamená, že $\langle \mathrm{Res}_{-k} H_{x_+^\lambda},\varphi\rangle = \mathrm{Res}_{-k}\langle H_{x_+^\lambda},\varphi\rangle$ atd.)

$T_{x_+^\lambda}$ lze ale rozšířit i jinak:

$$\langle T_{x_+^\lambda},\varphi\rangle = \int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx = \int_0^1 x^\lambda\varphi(x)\,dx + \int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 x^\lambda(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx}_{\text{toto je již dobře definováno pro } \mathrm{Re}\,\lambda>-2,\ \lambda\neq-1} + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1} + \int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx$$

$$= \dots = \int_0^1 x^\lambda\cdot\left(\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)x-\dots-\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right)dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)} + \int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx$$

a toto funguje pro $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-1$, $\lambda\neq -k$, $k\in\mathbb{N}$.

9) Máme ukázat, že obě metody dají totéž. Nejprve $k=1$, tj. $\mathrm{Re}\,\lambda > -2$, $\lambda\neq-1$

$$\int_0^1 x^\lambda(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1} + \int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx = (\text{per partes}) = -\int_0^1 \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\varphi'(x)\,dx + \left[\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}(\varphi(x)-\varphi(0))\right]_0^1 + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}$$

$$-\int_1^\infty \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\varphi'(x)\,dx + \left[\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\varphi(x)\right]_1^\infty$$

$$= -\int_0^\infty \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\varphi'(x)\,dx = -\frac{1}{\lambda+1}\langle x_+^{\lambda+1},\varphi'\rangle = \frac{1}{\lambda+1}\langle Dx_+^{\lambda+1},\varphi\rangle = \langle H_{x_+^\lambda},\varphi\rangle \quad \text{pro } k=1$$

Dále indukcí. Nechť to platí pro $k-1$, ukážeme, že to platí pro k. Nechť $\mathrm{Re}\,\lambda > -1-k$

$$\int_0^1 x^\lambda\left(\varphi(x)-\sum_{j=1}^{k}\frac{\varphi^{(j-1)}(0)\,x^{j-1}}{(j-1)!}\right)dx+\sum_{j=1}^{k}\frac{\varphi^{(j-1)}(0)}{(j-1)!(\lambda+j)}+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 x^\lambda\left(\varphi(x)-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\varphi^{(j-1)}(0)\,x^{j-1}}{(j-1)!}\right)dx+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\varphi^{(j-1)}(0)}{(j-1)!(\lambda+j)}+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx-\int_0^1 x^\lambda\frac{\varphi^{(k-1)}(0)\,x^{k-1}}{(k-1)!}\,dx+\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}$$

$$=\text{dle I.P.}=\frac{(-1)^{k-1}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k-1)}\left\langle x_+^{\lambda+k-1},\varphi^{(k-1)}\right\rangle-\underbrace{\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\left[\frac{x^{\lambda+k}}{\lambda+k}\right]_0^1+\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}}_{=0}$$

$$\overset{\text{slabá derivace}}{=}\frac{(-1)^k}{(\lambda+1)\dots(\lambda+k)}\left\langle x_+^{\lambda+k},\varphi^{(k)}\right\rangle=\left\langle H_{x_+^\lambda},\varphi\right\rangle$$

Mohli jsme, protože $\operatorname{Re}\lambda>-k-1$!

10) Pozorování: k celé, $k=-1,-2,\dots \Rightarrow$ lze definovat $\langle T_{v.p.\frac{1}{x}},\varphi\rangle := v.p.\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$

a dále $\langle H_{-\frac{1}{x^2}},\varphi\rangle=\langle DT_{v.p.\frac{1}{x}},\varphi\rangle$ atd $\langle H_{\frac{1}{x^k}},\varphi\rangle=\left\langle\frac{DH_{\frac{1}{x^{k-1}}}}{1-k},\varphi\right\rangle$, což odpovídá definici $H_{x_+^\lambda}$

Nyní: $|x|^\lambda=x_+^\lambda+x_-^\lambda$ a $|x|^\lambda\operatorname{sgn}x=x_+^\lambda-x_-^\lambda$, přičemž $\langle H_{x_-^\lambda},\varphi\rangle=\langle H_{x_+^\lambda},\varphi(-x)\rangle$

Pro $\operatorname{Re}\lambda>-2m-1$, $\lambda\neq-1,-2,\dots,-2m$ je $\langle H_{x_+^\lambda},\varphi\rangle=(-1)^{2m}\frac{\langle H_{x_+^{\lambda+2m}},\varphi^{(2m)}\rangle}{(\lambda+1)\dots(\lambda+2m)}$

derivace fce $-x$

a $\langle H_{x_-^\lambda},\varphi\rangle=(-1)^{2m}\frac{\langle H_{x_+^{\lambda+2m}},\varphi^{(2m)}(-x)\rangle}{(\lambda+1)\dots(\lambda+2m)}\cdot(-1)^{2m}$

$$\Rightarrow\langle H_{x_+^\lambda+x_-^\lambda},\varphi\rangle=\int_0^\infty\frac{x^{\lambda+2m}\cdot\left(\varphi^{(2m)}(x)+\varphi^{(2m)}(-x)\right)}{(\lambda+1)\dots(\lambda+2m)}\,dx=\lim_{\varepsilon\to0_+}\int_\varepsilon^\infty\frac{x^{\lambda+2m}\cdot\left(\varphi^{(2m)}(x)+\varphi^{(2m)}(-x)\right)}{(\lambda+1)\dots(\lambda+2m)}\,dx\overset{\text{per partes}}{=}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0_+}\left(\left[\frac{x^{\lambda+2m}\varphi^{(2m-1)}(x)}{(\lambda+1)\dots(\lambda+2m)}\right]_\varepsilon^\infty-\left[\frac{x^{\lambda+2m}\varphi^{(2m-1)}(-x)}{(\lambda+1)\dots(\lambda+2m)}\right]_\varepsilon^\infty-\int_\varepsilon^\infty\frac{x^{\lambda+2m-1}\left(\varphi^{(2m-1)}(x)-\varphi^{(2m-1)}(-x)\right)}{(\lambda+1)\dots(\lambda+2m-1)}\,dx\right)=(*)$$

Hranaté závorky v ∞ $:=0$, protože $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Hranaté závorky v ε: $\lim_{\varepsilon\to0_+}\varepsilon^{\lambda+2m}\cdot\left(\varphi^{(2m-1)}(\varepsilon)-\varphi^{(2m-1)}(-\varepsilon)\right)=\lim_{\varepsilon\to0_+}2\cdot\underset{\downarrow}{\varepsilon^{\lambda+2m+1}}\cdot\underbrace{\frac{\varphi^{(2m-1)}(\varepsilon)-\varphi^{(2m-1)}(-\varepsilon)}{2\varepsilon}}_{\to\varphi^{(2m)}(0)}=0$

0 protože $\operatorname{Re}\lambda>-2m-1$

$$(*)=-\lim_{\varepsilon\to0_+}\int_\varepsilon^\infty\frac{x^{\lambda+2m-1}\left(\varphi^{(2m-1)}(x)-\varphi^{(2m-1)}(-x)\right)}{(\lambda+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda+2m-1)}=-\lim_{\varepsilon\to0_+}\int_\varepsilon^\infty\frac{x^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda+2m-1)}\cdot\frac{\varphi^{(2m-1)}(x)-\varphi^{(2m-1)}(-x)}{x}\,dx$$

$$=-\int_0^\infty\frac{x^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda+2m-1)}\cdot\underbrace{\frac{\varphi^{(2m-1)}(x)-\varphi^{(2m-1)}(-x)}{x}}\,dx.$$ Pro $\lambda\to-2m$ je $x^{\lambda+2m}\to1$

má konečnou limitu v nule, integrál tak u 0 konverguje pro $\operatorname{Re}\lambda>-2m-1$

Na okolí $\lambda=-2m$ je majoranta $\Rightarrow$ prohodíme $\lim_{\lambda\to-2m}$ a $\int$ a dostaneme

$$\langle H_{x^{-2m}},\varphi\rangle=-\int_0^\infty\frac{1}{(-2m+1)\cdot\ldots\cdot(-1)}\cdot\frac{\varphi^{(2m-1)}(x)-\varphi^{(2m-1)}(-x)}{x}\,dx$$ a pro $m=1$: $\langle H_{x^{-2}},\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx=\langle T_{p.v.\frac{1}{x}},\varphi'\rangle$

Analogicky pro $H_{x_+^\lambda - x_-^\lambda}$: Pro $\operatorname{Re}\lambda > -2m$ je $\langle H_{x_+^\lambda},\varphi\rangle = (-1)^{-2m+1}\dfrac{\langle H_{x_+^{\lambda+2m-1}},\varphi^{(2m-1)}\rangle}{(\lambda+1)\dots(\lambda+2m-1)}$

a $\langle H_{x_-^\lambda},\varphi\rangle = (-1)^{-2m+1}\dfrac{\langle H_{x_+^{\lambda+2m-1}},\varphi^{(2m-1)}(-x)\rangle}{(\lambda+1)\dots(\lambda+2m-1)}\cdot(-1)^{2m-1}$

$\Rightarrow \langle H_{x_+^\lambda - x_-^\lambda},\varphi\rangle = -\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\lambda+2m-1}\cdot\left(\varphi^{(2m-1)}(x)+\varphi^{(2m-1)}(-x)\right)}{(\lambda+1)\cdot\dots\cdot(\lambda+2m-1)}$. Jsme ve stejném bodě jako dříve, dál postupujeme stejně až k výsledku $\dots = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\lambda+2m-1}}{(\lambda+1)\cdot\dots\cdot(\lambda+2m-2)}\cdot\frac{\varphi^{(2m-2)}(x)-\varphi^{(2m-2)}(-x)}{x}\,dx$.

Opět díky Lebesgueově větě toto má limitu $\lambda\to-2m+1$ a dostaneme

$\langle H_{x^{-2m+1}},\varphi\rangle = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(-2m+2)\cdot\dots\cdot(-1)}\cdot\frac{\varphi^{(2m-2)}(x)-\varphi^{(2m-2)}(-x)}{x}\,dx$. (Nebo jako $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0_+}\int_\varepsilon^\infty \dots$)

Speciálně tímto postupem pro $m=1$ skončíme s $\langle H_{x^{-1}},\varphi\rangle = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to0_+}\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx = \text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$

$= \langle T_{\text{p.v.}\frac{1}{x}},\varphi\rangle$

---

11) $(x+i0)^{-k} = \displaystyle\lim_{y\to0_+}(x+iy)^{-k} = x^{-k}$ pro $x>0$

a $= |x|^{-k}\cdot e^{-\pi i k}$ pro $x<0$

Proto definujeme $H_{(x\pm i0)^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + e^{\pm\pi i\lambda}H_{x_-^\lambda}$

$x+i0$: $\lambda\to-k$, k liché: $\displaystyle\lim_{\lambda\to-k}\left(x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda\right) = \lim_{\lambda\to-k}\Big(\underbrace{x_+^\lambda - x_-^\lambda}_{\to x^{-k}\text{ pro } k \text{ liché}} + \underbrace{\frac{e^{i\lambda\pi}+1}{\lambda+k}}_{\text{l'Hosp.}\to\frac{e^{ik\pi}\cdot i\pi}{1}}\overbrace{x_-^\lambda(\lambda+k)}^{\text{definice Res.}}\Big)$

$= x^{-k} - i\pi\cdot\operatorname{Res}_{-k} x_-^\lambda = x^{-k} - i\pi\dfrac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!}$

$x+i0$: $\lambda\to-k$, k sudé: $\displaystyle\lim_{\lambda\to-k}\left(x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda\right) = \lim_{\lambda\to-k}\Big(\underbrace{x_+^\lambda + x_-^\lambda}_{\to x^{-k}\text{ pro } k \text{ sudé}} + \underbrace{\frac{e^{i\lambda\pi}-1}{\lambda+k}}_{\to\text{l'Hosp}:\ \frac{i\pi e^{ik\pi}}{1}}\overbrace{x_-^\lambda(\lambda+k)}^{\text{Res}}\Big)$

$= x^{-k} + i\pi\operatorname{Res}_{-k} x_-^\lambda = x^{-k} + i\pi\dfrac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!}$

$x-i0$: $\lambda\to-k$, k liché: $\displaystyle\lim_{\lambda\to-k}\left(x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda\right) = \lim_{\lambda\to-k}\Big(x_+^\lambda - x_-^\lambda + \underbrace{\frac{e^{-i\lambda\pi}+1}{\lambda+k}}_{\to\frac{-i\pi e^{-ik\pi}}{1}}(\lambda+k)x_-^\lambda\Big)$

$= x^{-k} + i\pi\dfrac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!}$

$x-i0$: $\lambda\to-k$, k sudé: $\displaystyle\lim_{\lambda\to-k}\left(x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda\right) = \lim_{\lambda\to-k}\Big(x_+^\lambda + x_-^\lambda + \frac{e^{-i\lambda\pi}-1}{\lambda+k}(\lambda+k)x_-^\lambda\Big) = x^{-k} - i\pi\dfrac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!}$

Tím jsou vyřešeny všechny případy a je dokázán první vztah. Zbylé jsou součtem, resp. rozdílem těch prvních

Fundamentální řešení ODR

Definice: Je-li L diferenciální operátor (obyčejný či parciální), pak fundamentálním řešením rce $Lu = f$ nazýváme řešení u_L diferenciální rovnice (ve smyslu distribucí)

(FŘ) $\quad L u_L = \delta.$ $\quad \left(\Rightarrow u = f * u_L,\ Lu = L(f * u_L) = f * Lu_L = f * \delta = f \right)$

Pozn.:
- Není určeno jednoznačně, ale až na lib. řešení homogenní rce.
- $L = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}$, kde $a_n \neq 0$ je obyč. dif. operátor s konst. koeficienty

$\Downarrow$

řešení hledáme dvěma způsoby

① Slepování z klasických řešení $Lu = 0$.

Věta: Nechť y^+ a y^- jsou řešení rce $Ly = 0$ v klasickém smyslu taková, že

$$\frac{d^k y^+}{dx^k}(0) = \frac{d^k y^-}{dx^k}(0), \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$

$$\frac{d^{n-1} y^+}{dx^{n-1}}(0) - \frac{d^{n-1} y^-}{dx^{n-1}}(0) = \frac{1}{a_n},$$

potom je

$$u_L = \begin{cases} y^+(x) & x > 0 \\ y^-(x) & x < 0 \end{cases} \in \mathcal{D}'$$ fundamentálním řešením rovnice (FŘ).

Pozn.: Speciálně lze volit $y^- \equiv 0$, pak za y^+ je třeba brát řešení splňující

$$y^{+(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$
$$y^{+(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n}.$$

Případně naopak lze volit $y^+ \equiv 0$ a brát

$$y^{-(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$
$$y^{-(n-1)}(0) = -\frac{1}{a_n}.$$

Kombinací s řešeními homogenní rce lze toto řešení z $\mathcal{D}'$ upravit, aby mělo lepší vlastnosti, např. z $\mathcal{S}'$.

(2) Metoda Fourierovy transformace

FŘ: $$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k u_L}{dx^k} = \delta \quad / \mathcal{F}.T.$$

$$\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (2\pi i \xi)^k\right)}_{P(\xi)\ldots \text{ polynom řádu } n} \hat{u}_L = 1 \qquad (\hat{u}_L = \mathcal{F}(u_L))$$

- Je-li $P(\xi) \neq 0$ pro $\forall \xi \in \mathbb{R}$, je fce $\frac{1}{P(\xi)}$ pomalu rostoucí, a tedy $\in \mathcal{S}'$.
- Stačí tedy najít $$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{P(\xi)}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i x \xi}}{P(\xi)} d\xi \overset{\text{reziduová věta}}{=} \pm 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}_{\xi_j} \frac{e^{2\pi i x \xi}}{P(\xi)},$$ kde pro $x > 0$ se sčítá přes všechny kořeny ξ_j polynomu $P(\xi)$ ležící v $\mathrm{Im}\,\xi > 0$ a bere se znaménko $\oplus$, resp. pro $x < 0$ přes $\mathrm{Im}\,\xi < 0$ a bere se znaménko $\ominus$.
- Pro st $P = 1$ existuje integrál jen ve smyslu hlavní hodnoty $\left(= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \ldots\right)$

Př. 1: Nalezněte řešení následující rovnice v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$$y' + ay = \delta, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) lepením: Homogenní rovnice: $y' + ay = 0$

$$y_h = c_1 e^{-ax}$$

Uvažujeme tedy: $y^+ = c_1^+ e^{-ax}$

$$y^- = c_1^- e^{-ax}$$

podmínky dle věty

$$y^+(0) - y^-(0) = 1$$

$$c_1^+ - c_1^- = 1$$

označíme $c_1^- =: c$

$$\Downarrow$$

$$c_1^+ = 1 + c$$

$$\Downarrow$$

$$y = \begin{cases} c e^{-ax} & x < 0 \\ (c+1) e^{-ax} & x > 0 \end{cases}$$ je řešením v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

- Diskuze, jak vypadá řešení v $\mathcal{S}'$:

$a > 0$: řešení $c e^{-ax} \notin \mathcal{S}'$ pro $x < 0$, odečteme homogenní řešení $y_h = c e^{-ax}$ (pořád je řešení)

$$y = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-ax} & x > 0 \end{cases} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

$a < 0$: $(c+1) e^{-ax} \notin \mathcal{S}'$ pro $x < 0$ a $c \neq -1$, volbou $c = -1$ dostaneme

$$y = \begin{cases} -e^{-ax} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

b) přes Fouriera:

$$y' + ay = \delta \ / \mathcal{F}$$

$$(2\pi i\xi + a)\hat{y} = 1$$

$$\hat{y} = \frac{1}{2\pi i\left(\xi - \frac{ai}{2\pi}\right)} \quad \notin L^1, \text{ ale } \in L^2$$

$\boxed{a>0}$:

$$y = \mathcal{F}^{-1}(\hat{y}) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i\xi x}}{\xi - \frac{ai}{2\pi}}\, d\xi$$

$x>0$:

$$= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{ia}{2\pi}} \frac{e^{2\pi i\xi x}}{\xi - \frac{ia}{2\pi}} = e^{-ax}$$

$x<0$: Není žádný kořen $\operatorname{Im}\xi<0$ ... $=0$

$$\left(\operatorname{Im}\frac{ia}{2\pi} = \frac{a}{2\pi} > 0\right)$$

$\boxed{a<0}$: $\operatorname{Im}\frac{ia}{2\pi} = \frac{a}{2\pi} < 0$

$x>0$ ... $y=0$ (kořeny mají $\operatorname{Im}\xi<0$)

$x<0$ ... $y = -\frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{ia}{2\pi}} \frac{e^{2\pi i\xi x}}{\xi - \frac{ia}{2\pi}} = -e^{-ax}$

Celkem:

$a>0$: $y = \begin{cases} 0 & x<0 \\ e^{-ax} & x>0 \end{cases} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ... automaticky, neboť máme pomocí F.T.

$a<0$: $y = \begin{cases} -e^{-ax} & x<0 \\ 0 & x>0 \end{cases} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Př. 5: Nalezněte fundamentální řešení rce

$$-y^{(4)} + a^2 y'' = \delta,$$

pokud $y(0)=0$ a $y(x)=y(-x)$, $a>0$

Lepením (obecnější řešení): homogenní rce: $-y^{(4)} + a^2 y'' = 0$

hledáme ve tvaru $e^{\lambda x}$ $\quad -\lambda^4 + a^2\lambda^2 = 0$

$$\lambda^2(a^2-\lambda^2)=0$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = a$

$\lambda_4 = -a$

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^{ax} + C_4 e^{-ax} \Leftarrow$$

$\Downarrow$

$$y^+ = C_1^+ + C_2^+ x + C_3^+ e^{ax} + C_4^+ e^{-ax}$$
$$y^- = C_1^- + C_2^- x + C_3^- e^{ax} + C_4^- e^{-ax}$$

Podmínky:

$y^+(0) = y^-(0)$: $C_1^+ + C_3^+ + C_4^+ = C_1^- + C_3^- + C_4^-$ (1)

$y^{+\prime}(0) = y^{-\prime}(0)$: $C_2^+ + a(C_3^+ - C_4^+) = C_2^- + a(C_3^- - C_4^-)$ (2)

$y^{+\prime\prime}(0) = y^{-\prime\prime}(0)$: $a^2(C_3^+ + C_4^+) = a^2(C_3^- + C_4^-)$ (3)

$y^{+\prime\prime\prime}(0) - y^{-\prime\prime\prime}(0) = \frac{1}{a_n} = -1$: $a^3((C_3^+ - C_4^+) - (C_3^- - C_4^-)) = -1$ (4)

Označíme: $\Delta C_i = C_i^+ - C_i^-$, pak (1)–(4) vypadá následovně

(1') $\Delta C_1 + \Delta C_3 + \Delta C_4 = 0$

(2') $\Delta C_2 + a(\Delta C_3 - \Delta C_4) = 0$

(3') $a^2(\Delta C_3 + \Delta C_4) = 0$

(4') $a^3(\Delta C_3 - \Delta C_4) = -1$

- $a^2(1') - (3') \Rightarrow \Delta C_1 = 0$
- $a(3') + (4') \Rightarrow \Delta C_3 = \frac{-1}{2a^3}$
- $\Delta C_4 = \frac{1}{2a^3}$
- $(2') \Rightarrow \Delta C_2 = \frac{1}{a^2}$

$c_i =: c_i\ ,\quad c_i^T = c_i + \Delta c_i$

$$\Rightarrow\quad y = \begin{cases} c_1 + c_2 x + c_3 e^{ax} + c_4 e^{-ax} & x<0 \\ c_1 + \left(c_2 + \frac{1}{a^2}\right)x + \left(c_3 - \frac{1}{2a^3}\right)e^{ax} + \left(c_4 + \frac{1}{2a^3}\right)e^{-ax} & x>0 \end{cases}$$

$$\in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Aby bylo $\in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, musíme vynulovat $c_4 e^{-ax}$ a $\left(c_3 - \frac{1}{2a^3}\right)e^{ax}$, které nejsou z $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, pro $a>0$.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_4 &= 0 \\ c_3 &= \frac{1}{2a^3} \end{aligned}}$$

$$y = \begin{cases} c_1 + c_2 x + \frac{1}{2a^3} e^{ax}, & x<0 \\ c_1 + \left(c_2 + \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{1}{2a^3} e^{-ax}, & x>0 \end{cases} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

- Pokud chceme navíc $y(0) = 0$

$$\Downarrow$$

$$c_1 + \frac{1}{2a^3} = 0 \Rightarrow \underline{c_1 = -\frac{1}{2a^3}}$$

- Pokud chceme navíc sudost y, tj: $y(x) = y(-x)$, máme

$$\underline{-\frac{1}{2a^3}} + c_2(-x) + \underline{\frac{1}{2a^3} e^{-ax}} = \underline{-\frac{1}{2a^3}} + c_2 x + \frac{x}{a^2} + \underline{\frac{1}{2a^3} e^{-ax}}$$

$$\left(2c_2 + \frac{1}{a^2}\right)x = 0 \Rightarrow \underline{c_2 = \frac{-1}{2a^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \begin{cases} -\frac{1}{2a^3} - \frac{1}{2a^2}x + \frac{1}{2a^3} e^{ax} & x<0 \\ -\frac{1}{2a^3} + \frac{1}{2a^2}x + \frac{1}{2a^3} e^{-ax} & x>0 \end{cases}$$

neboli:

$$\underline{y = -\frac{1}{2a^3} + \frac{1}{2a^2}|x| + \frac{1}{2a^3} e^{-a|x|}.}$$

Poissonova sumační formule

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pak $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \mathcal{F}(\varphi)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \varphi(n)}$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta_\Sigma) = \delta_\Sigma} \text{ v } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

<u>vzorkovací distribuce</u>: $\delta_\Sigma := \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \delta_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \delta_0(x-n)$

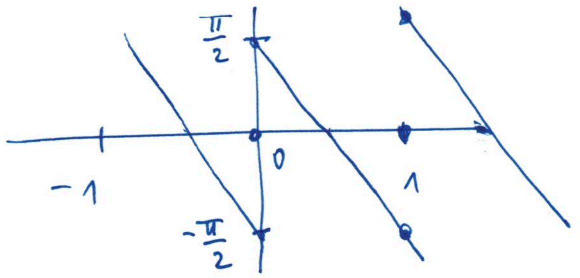
(⇒ platí neboť $\mathcal{F}(\delta_\Sigma) = \delta_\Sigma \Leftrightarrow \langle \mathcal{F}(\delta_\Sigma), \varphi \rangle = \langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\underline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\varphi)(n)} = \langle \delta_\Sigma, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \qquad \underline{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \varphi(n)}.$$

Odvodíme si platnost Poissonovy sumační formule.

- na intervalu $(0,1)$ platí $f = \pi\left(\frac{1}{2} - x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n}$

(klasická Fourierova řada)

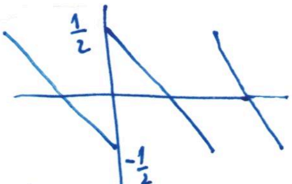


- $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \varphi \, dx = \lim_{N \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{N}{}' \frac{\sin(2\pi n x)}{n} \varphi \, dx$

- $\lim_{N \to \infty} \int_{\mathbb{R}} 2\pi \sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi n x) \varphi(x) \, dx = -\lim_{N \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{N}{}' \frac{\sin(2\pi n x)}{n} \varphi' \, dx$

$$= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \int_n^{n+1} f \varphi' \, dx = -\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{2} - x\right) \varphi' \, dx$$

$$\overset{\text{p.p.}}{=} -\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left[\left(\tfrac{1}{2} - x\right)\varphi \right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} (-1)\,\varphi \right) dx$$



$$= -\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left(-\tfrac{1}{2}\varphi(n+1) - \tfrac{1}{2}\varphi(n) \right) + \int_n^{n+1} \varphi(x)\,dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n+1) + \varphi(n) \;-\; \pi \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) - \pi \langle T_1, \varphi \rangle = \pi \Big(\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle \Big)$$

$$\Rightarrow \qquad 2 \lim_{N\to\infty} T_{\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi n x)} = \delta_\Sigma - T_1 \quad \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

členy se sinem vypadnou kvůli lichosti

dále $\displaystyle \lim_{N\to\infty} T_{\sum_{-N}^{N} e^{-2\pi i n x}} = \lim_{N\to\infty} T_{\sum_{-N}^{N} \cos(2\pi n x) - i\sin(2\pi n x)} = \lim_{N\to\infty} T_{\sum_{-N}^{N} \cos(2\pi n x)}$

$$= \lim_{N\to\infty} T_{2\sum_{1}^{N} \cos(2\pi n x)} + T_1 = \delta_\Sigma$$

Nakonec: $\displaystyle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\varphi)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle T_{e^{-2\pi i n x}}, \varphi \rangle = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta_n(x), \varphi \rangle}_{\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n).$