Matematická analýza NOFY152, LS 22/23, Cvičení s L. Krumpem

Vzorová písemka č. 1

1. (5 bodů) Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady, všechny kroky řádně zdůvodněte:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{[\frac{n}{2}]} \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{\ln n}$$

(Symbol $[x]$ označuje celou část reálného čísla x, tj. největší celé číslo, které je menší nebo rovné x.)

2. (5 bodů) V $\mathbb{C}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady, všechny kroky řádně zdůvodněte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n \cdot 16^n} \operatorname{arctg} n^2$$

Řešení

1. (5 bodů) Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady, všechny kroky řádně zdůvodněte:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{[\frac{n}{2}]} \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}{\ln n}.$$

(Symbol $[x]$ označuje celou část reálného čísla x, tj. největší celé číslo, které je menší nebo rovné x.)

Nejprve si všimneme, že členy řady se dají napsat ve tvaru součinu $c_n = a_n b_n$, kde

$$a_n = (-1)^{[\frac{n}{2}]}, \quad b_n = \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}{\ln n}$$

přičemž a_n by mohlo mít omezené částečné součty a b_n by mohlo konvergovat monotonně k nule, takže Dirichletovo kritérium nám tak může zajistit konvergenci. Pojďme však obě podmínky ukázat. Nejprve si napíšeme posloupnost $a_n = (-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, \dots)$, takže její částečné součty jsou jistě omezené (mezi -2 a 0). Dále lze upravit člen b_n na

$$b_n = \frac{1}{(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}) \ln n},$$

což má zřejmě limitu 0 a to monotonně, což lze zdůvodnit např. tak, že $\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}$ je zřejmě rostoucí posloupnost, $\ln n$ také, jejich převrácené hodnoty jsou tudíž klesající a kladné a součin takových je tedy zase klesající. Vše je ověřeno a podle Dirichleta tedy řada konverguje.

Nyní má smysl vyšetřovat, zda je tato konvergence absolutní či nikoli. Řada absolutních členů je vlastně

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}) \ln n}.$$

Rádi bychom nyní zjednodušili člen s odmocninami, převedli jej na něco známého. Řady s nezápornými členy stačí porovnávat pomocí (limitního) srovnávacího kritéria, a snadno vidíme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}{n} = 2$, čili nenulové konečné číslo. Proto je konvergence řady $\sum b_n$ ekvivalentní konvergenci řady $\sum \frac{1}{n \ln n}$. Na tu se hodí (pouze) integrální kritérium, podle něhož je její konvergence ekvivalentní konvergenci Newtonova integrálu, konkrétně

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln(\ln(x))]_1^{+\infty} = +\infty,$$

takže tato řada diverguje, a tedy řada ze zadání $\boxed{\text{konverguje neabsolutně}}$.

2. (5 bodů) V $\mathbb{C}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady, všechny kroky řádně zdůvodněte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n \cdot 16^n} \operatorname{arctg} n^2$$

Nejprve je potřeba se nenachytat a uvědomit si, že $\frac{\operatorname{arctg} n^2}{n \cdot 16^n} = a_{4n}$ a nikoli a_n (index v a_n je daný mocninou nad z, nikoli tím, jak koeficient a_n náhodou vypadá). Přitom pro $m \neq 4n$ je $a_m = 0$. Proto poloměr konvergence počítáme takto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4n]{a_{4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4n]{n}} \frac{1}{\sqrt[4n]{16^n}} \sqrt[4n]{\operatorname{arctg} n^2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

a tedy $\boxed{R = 2}$. Střed kruhu konvergence je 0 a tedy víme, že řada konverguje absolutně pro $|z| < 2$, diverguje pro $|z| > 2$, a zbývá tedy vyšetřit konvergenci na hraniční kružnici $|z| = 2$.

Nejprve se zbavíme „zbytečného“ členu $\operatorname{arctg} n^2$, ten má konečnou nenulovou limitu, dosahuje jí monotonně, takže podle Abelova kritéria je konvergence zadané řady ekvivalentní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n \cdot 16^n}.$$

Zkusíme, co se stane pro $z = 2$ a vidíme, že členy řady budou tvaru

$$\frac{2^{4n}}{n \cdot 16^n} = \frac{1}{n},$$

tedy $\boxed{\text{divergentní}}$ řada. Díky čtvrté mocnině ovšem existují další komplexní čísla, kde to dopadne stejně, konkrétně jde o množinu čísel $\boxed{\{2, -2, 2i, -2i\}}$, čtvrtá mocnina každého z těchto čísel je totiž rovna 16.

Zbývá rozmyslet situaci pro ostatní body na kružnici $|z| = 2$, tedy o body tvaru $\boxed{z = 2e^{i\varphi},\ \varphi \neq k\frac{\pi}{2}}$. Pro tato z je ovšem $z^4 = 16e^{4i\varphi}$, $4\varphi \neq 2k\pi$ a tedy $\frac{z^{4n}}{16^n} = e^{4i\varphi n}$ má omezené částečné součty. A jelikož $\frac{1}{n}$ jde monotonně k nule, je podle Dirichletova kritéria tato řada (pro všechna taková z) konvergentní, a z výše uvedeného plyne, že $\boxed{\text{neabsolutně konvergentní}}$.

Lukáš Krump, 15.3.2023