

Písemka č. 1, 26.3.2025, 13:10 – Řešení

1. (5 bodů) Spočítejte délku křivky $y = x^{\frac{3}{2}}, x \in \langle 0, 4 \rangle$.

Stačí dosadit do vzorce pro délku křivky s funkcí $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, přičemž $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

Použijeme substituci

$$t = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}, \quad x = \frac{4}{9}(t^2 - 1), \quad dx = \frac{8}{9}t dt,$$

pro $x = 0$ je $t = 1$, pro $x = 4$ je $t = \sqrt{10}$ a integrál se převede na

$$l = \int_1^{\sqrt{10}} \frac{8}{9}t^2 dt = \left[\frac{8}{9} \frac{t^3}{3} \right]_{t=1}^{\sqrt{10}} = \boxed{\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)}$$

2. (6 bodů) Spočítejte objem tělesa zadaného jako průnik koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2$ a válce $x^2 + y^2 \leq R^2$, kde $R > 0$.

Těleso vznikne rotací jisté plochy S okolo osy z , přičemž plocha S je vymezená v rovině xz křivkami $x = 0$, $x = R$, $z = \sqrt{4R^2 - x^2}$, $z = -\sqrt{4R^2 - x^2}$. Podle vzorce z tabulky pak máme

$$V = 2\pi \int_0^R (x(2\sqrt{4R^2 - x^2})) dx.$$

Můžeme zvolit třeba substituci $x = 2R \sin t$, $dx = 2R \cos t dt$, přičemž $t \in \langle 0, \frac{\pi}{6} \rangle$ (hodnota $t = \frac{\pi}{6}$ se najde z omezení $x = 2R \sin t = R$). Dále v tomto intervalu máme $\sqrt{4R^2 - x^2} = 2R|\cos t| = 2R \cos t$, a integrál se tedy převede na

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2R \sin t \cdot 4R \cos t \cdot 2R \cos t dt = 32\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t \cos^2 t dt = \\ &= 32\pi R^3 \left[-\frac{1}{3} \cos^3 t \right]_{t=0}^{\frac{\pi}{6}} = \boxed{\frac{4\pi}{3} R^3 (8 - 3\sqrt{3})} \end{aligned}$$

3. (7 bodů) Najděte obecné řešení rovnice a zdůvodněte, zda je či není možné nalezená řešení v některých bodech „nalepovat“:

$$xy' + y = xy^2 \ln x$$

Ze zadání hned vidíme jednak omezení $x > 0$ a také očividné řešení $y = 0$. Jedná se o Bernoulliho rovnici, vydělíme ji $-y^2$ a také x , takže máme tvar

$$-y'y^{-2} - \frac{1}{x}y^{-1} = -\ln x.$$

Substitucí $z = y^{-1}$ dostáváme tvar lineární rovnice 1. řádu

$$z' - \frac{1}{x}z = -\ln x,$$

kterou budeme řešit metodou integračního faktoru. Pro $p(x) = -\frac{1}{x}$ je $P(x) = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x = \ln \frac{1}{x}$ ($x > 0$, takže bez absolutní hodnoty) a integrační faktor je

$$e^{P(x)} = \frac{1}{x}.$$

Dále pro $q(x) = -\ln x$ spočteme

$$\int e^{P(x)}q(x)dx = -\int \frac{1}{x} \ln x dx = -\frac{\ln^2 x}{2} + c$$

a proto

$$z(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)}q(x)dx = x \frac{2c - \ln^2 x}{2}$$

a při přeznačení $2c$ na c dostáváme řešení

$$\boxed{y_c(x) = z^{-1}(x) = \frac{2}{x(c - \ln^2 x)}}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Definiční obor tohoto řešení je } \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{pro } c < 0 \\ (0, 1), (1 + \infty) & \text{pro } c = 0 \\ (0, e^{-\sqrt{c}}), (e^{-\sqrt{c}}, e^{\sqrt{c}}), (e^{\sqrt{c}}, +\infty) & \text{pro } c > 0. \end{cases}$$

Lepení by připadalo v úvahu v dělicích bodech mezi těmito intervaly, ale tam snadno spočteme, že řešení mají vždy nekonečné limity ($\pm\infty$) a tudíž lepit nelze – tato řešení jsou maximální. Zrovna tak ihned vidíme, že žádné řešení y_c nikdy nenabývá hodnoty 0, takže nedojde ani k lepení s identicky nulovým řešením.

Lukáš Krump, 27.3.2025

Edit 9.4.2025: oprava názvů os v úloze 2