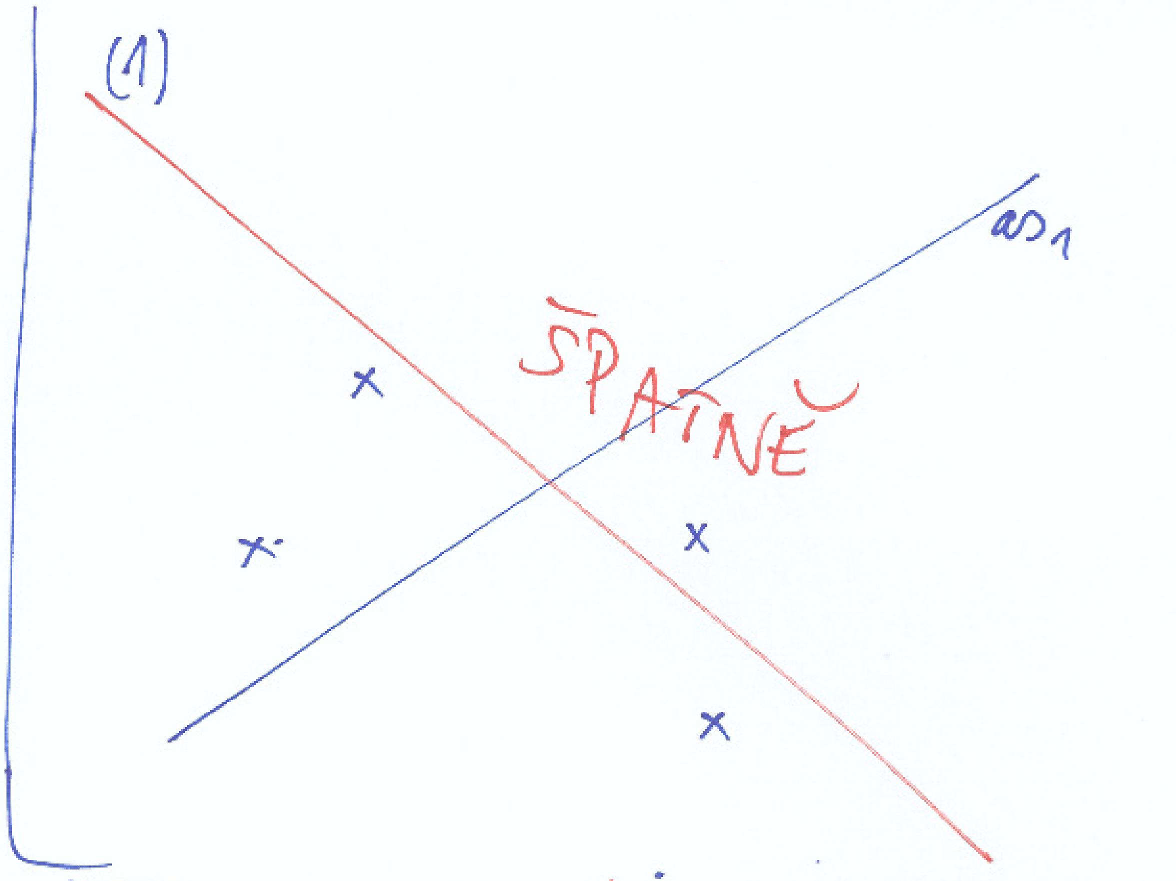
Proj. geometrie, 9.12.2020

Konstrukce: sestrojit hyperbolu vč. asymptot a středu, je-li dáno:

(1) 4 body + 1 směr asymptoty

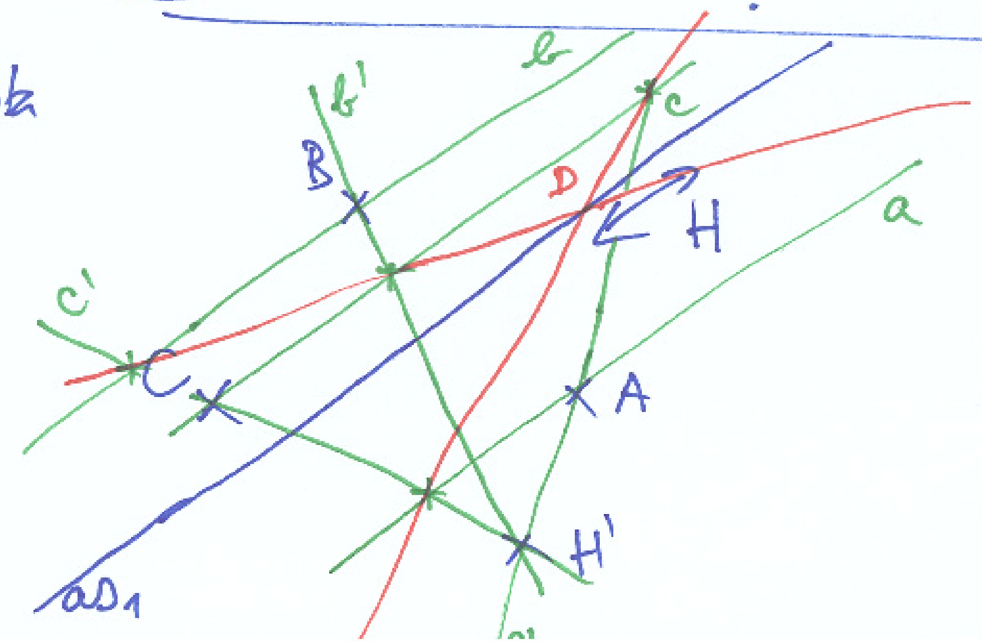
(2) 3 body + 1 asymptota

(3) 1 asymptota + 3 tečny

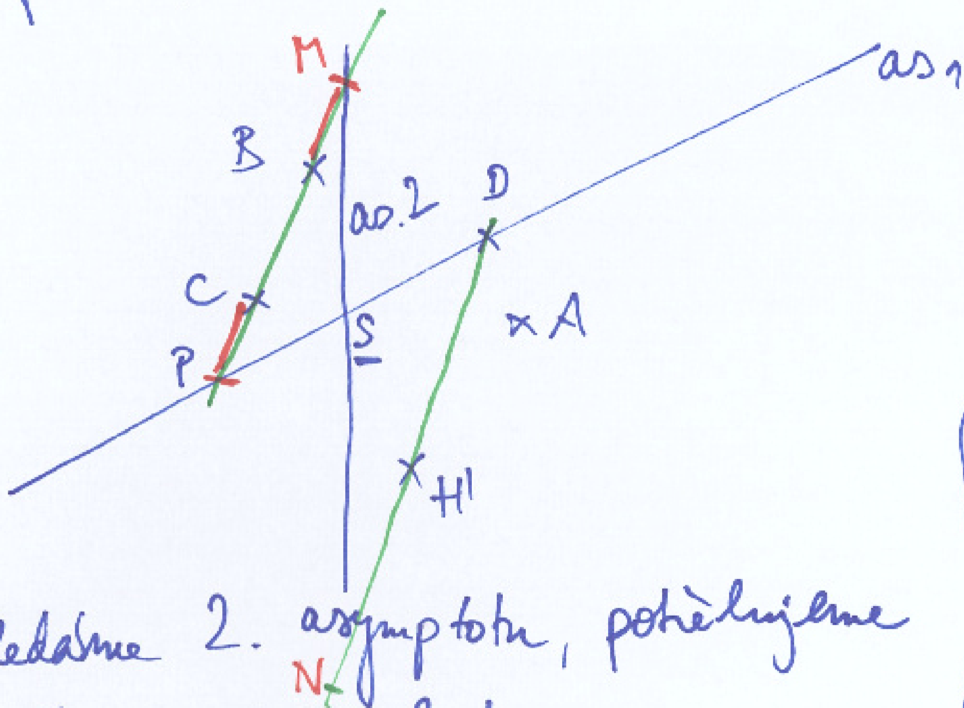


(1) Najdeme D, DH je 1. asymptota (při ozn. H = směr as.)

Jak najít 2. asymptotu?



(1) – pokračování:



Hledáme 2. asymptotu, potřebujeme najít 2 její body:

a) $M \in BC$; $|MB| = |CP|$

b) N určí stejně jako M pro jinou dvojici bodů

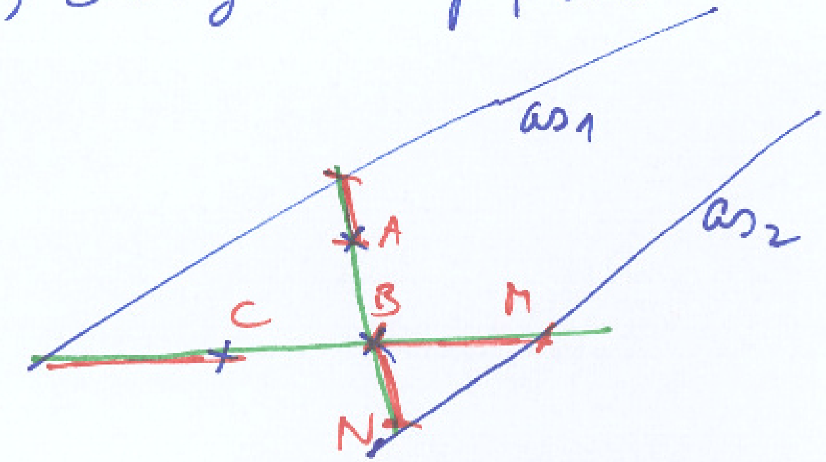
nebo pomocí 2. věty:

DH' = tečna v bodě H'

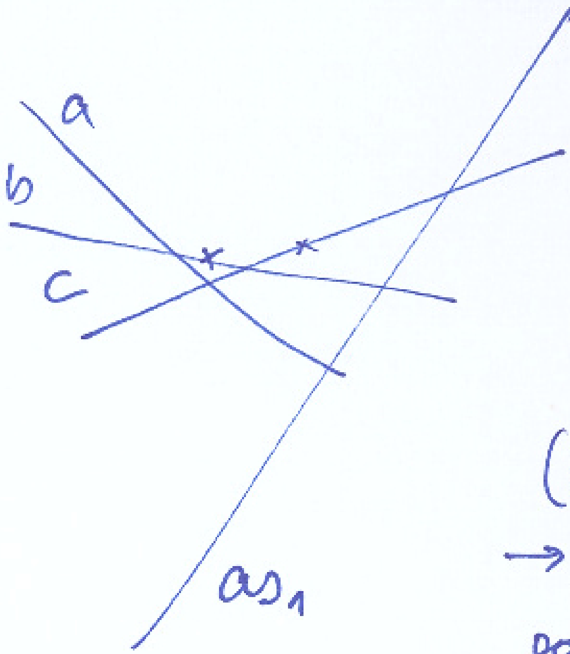
$\Rightarrow N \in DH'$, $|NH'| = |H'D|$

$\Rightarrow as.2 = MN$

(2) 3 body + 1 asymptota



(3) 1 asymptota + 3 tečny



Na 2 tečnách potřebujeme body dotyku (klasicky!)

→ 2x použijeme poslední větu

Parabola – speciální konstrukce

Pro parabolu platí:

(1) parabola je dána 4 tečnami,

tzn. 4 vlastními tečnami +
1 nevlastní tečnou

(Nevl. přímka je tečnou paraboly!)

varianty: • 3 tečny + 1 bod dotyku

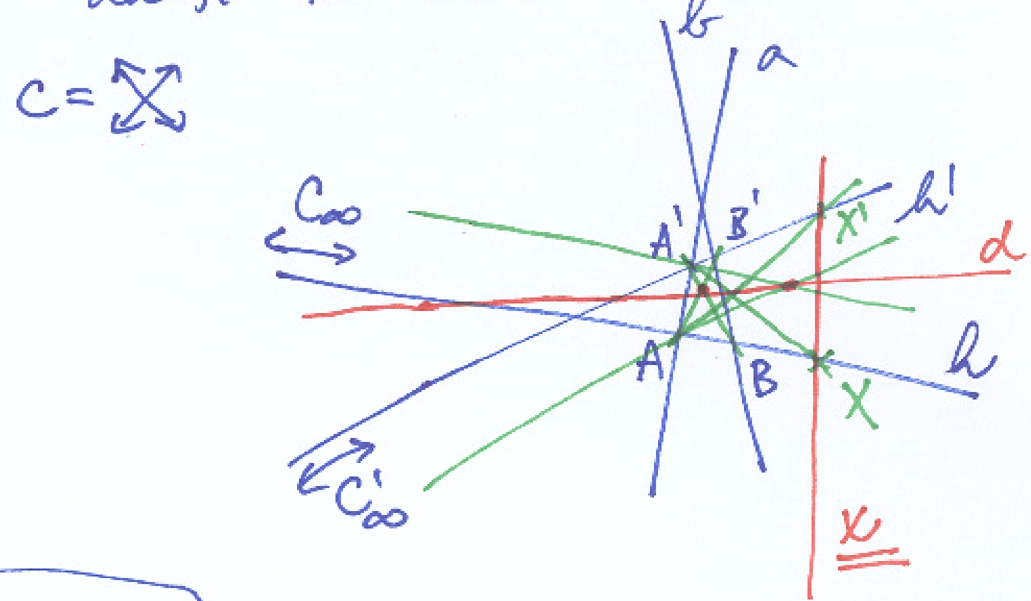
• 3 tečny + směr průměrů S_∞

atd.

(2) všechny průměry paraboly jsou rovnoběžné, jejich směr $= S_\infty$

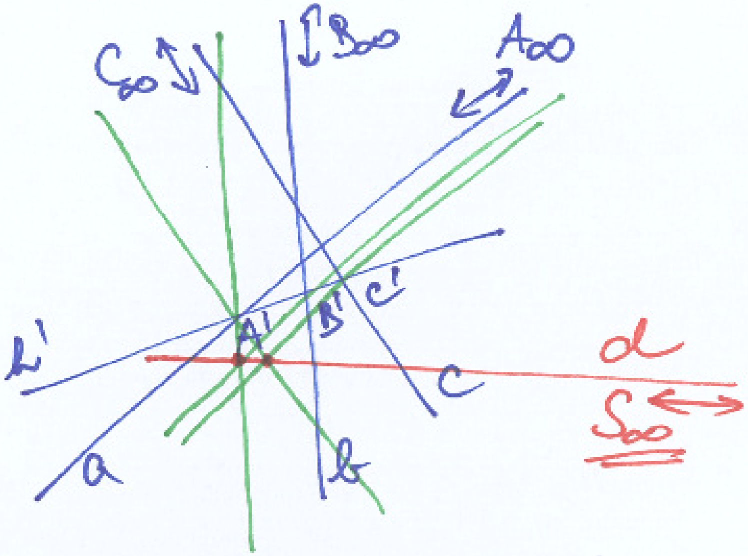
(3) parabola nemá rovnoběžné tečny (v $\forall$ směru $\exists!1$ tečna)

Konstrukce: sestrojit parabolu ze 4 tečen, tj. najít jednu další tečnu.



Konstrukce: parabola je dána 4 tečnami, najít její směr průměrů (S_∞)

$h = $ ↗↙↖↘



<u>Platí</u>: S_∞ je <u>bodem dotyku</u> <u>nevlastní přímky</u> jakožto tečny k parabole.

Proto hledáme S_∞ jako bod dotyku na nevl. přímce, kterou proto označíme h, hledaný bod S_∞ bude $d \cap h$, tj.

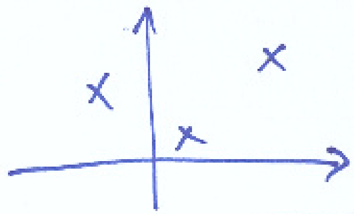
S_∞ = směr direkční přímky.

Sami rozmyslet:

<u>Konstrukce</u>: parabola ze 3 tečen a 1 bodu dotyku

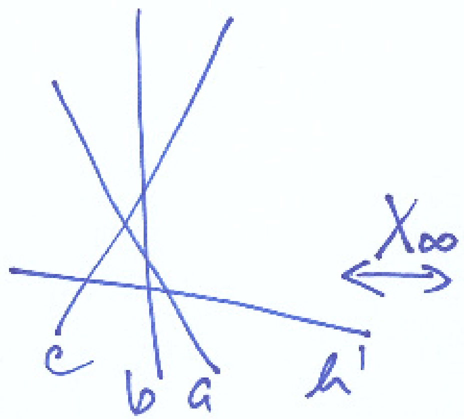
<u>Konstrukce</u>: parabola ze 3 bodů a směru průměru S_∞

<u>Pozn.</u>:



proložení paraboly 3 body (v MA)

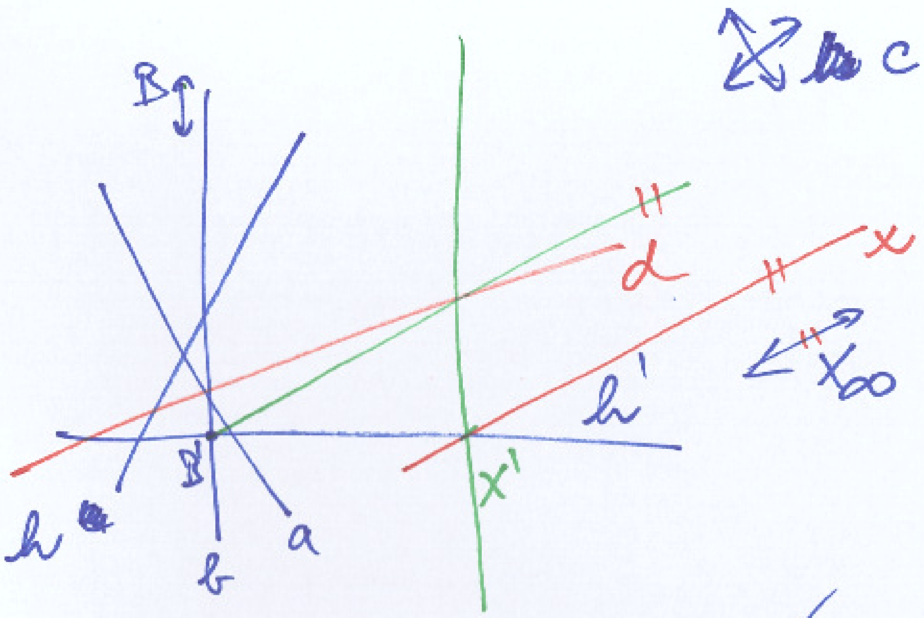
<u>Konstrukce</u>: k parabole, dané 4 tečnami, sestrojit tečnu s daným směrem X_∞



$h = $ ↗↙↖↘

a pak je daný směr $X_\infty \in h$, klasicky přes d najdeme X'

$\Rightarrow \underline{x = XX'}$



Alternativní řešení ✓

(a) klasicky – množina bodů stejně vzdálených od středu S, což lze buď v rámci eukl. geometrie, nebo aspoň se zavedeným pojmem „<u>stejně dlouhé úsečky</u>" i pro <u>nerovnoběžné přímky</u>

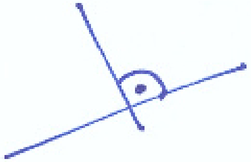
(b) pomocí <u>kolmosti</u> (viz níže), tj. k afinní geom. potřebujeme přidat pojem <u>kolmosti</u> (ne nutně obecný úhel) → dostáváme nový typ geometrie mezi afinní a euklidovskou (nemáme vzdálenosti, úhly, jen kolmost)

Elipsa / Kružnice

<u>Pozn</u>: pro elipsu nejsou žádné speciální konstrukce (nemá totiž nevlastní body). Místo toho budeme studovat kružnici. Jak ji ale definovat?

Zde pak máme ekvivalentní postupy:

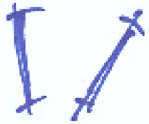
- kolmost



- kružnice

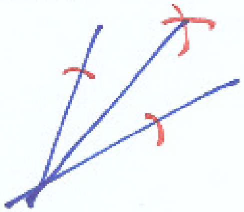
⇕

- přenos délek mezi neroznob. přímkami



⇓

- půlení úhlu

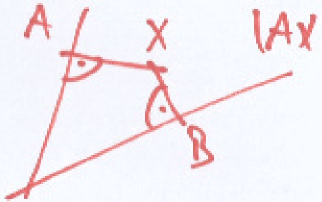


⇓

kolmost

(rozpůlení přímého úhlu)

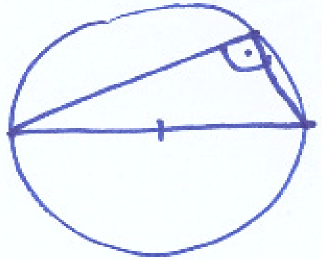
⇑



$|AX| = |XB|$

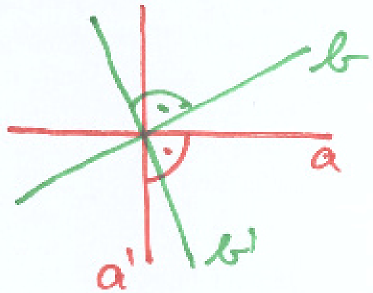
Kolmost ⟺ Kružnice

Thaletova věta:



kružnice ~~pa~~ nad průměrem je ~~prostě~~ množina právě těch bodů, z nichž je ten průměr vidět pod pravým úhlem.

(c) <u>Věta</u>: dva páry kolmic ve svazku přímek určují <u>eliptickou</u> involuci.



<u>Dk</u>: páry se „rozdělují"

tzn. jsou na přeskáčku b a' b' a ⇒ <u>elipt.</u>

<u>Def</u>: nazývá se <u>absolutní involuce</u>

<u>Pozn</u>: jde o otáčení o 90°.

Důsledek: Absol. involuce má 2 komplexně sdružené samodr. přímky, nazývají se **izotropické přímky**, jejich směry = **izotropické body**

(V PG II uvidíme, že to jsou body $[0:1:i]$, $[0:1:-i]$.)

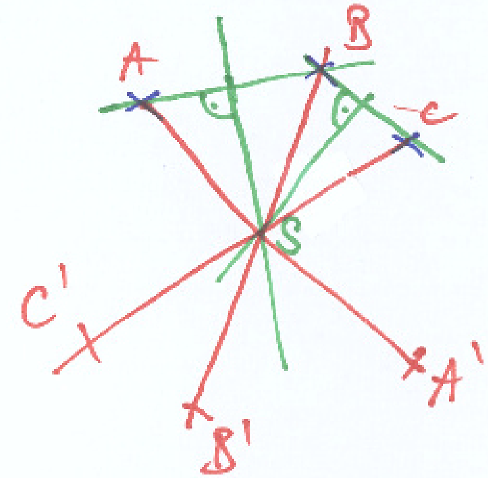
Def: **kružnice** je elipsa, jejíž asymptoty jsou izotropické přímky procházející jejím středem.

(V PG II uvidíme: všechny kružnice v rovině procházejí izotropickými body.)

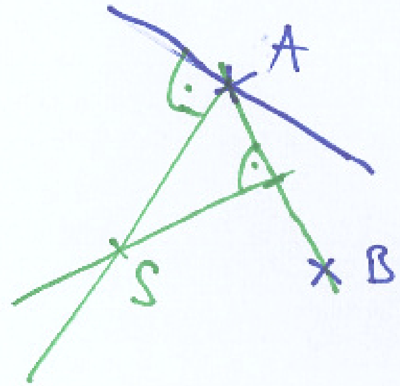
Důsledek: $\forall$ kružnice je určena **3 body** (zbylé 2 = izotropické), případně **3 podmínkami**.

Konstrukce: sestrojit kružnici, je-li dáno: (bez kružítka)

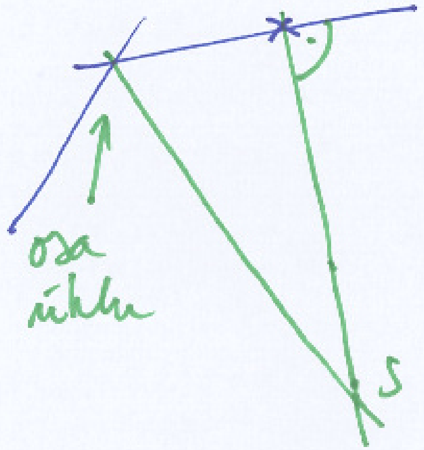
(a) 3 body:



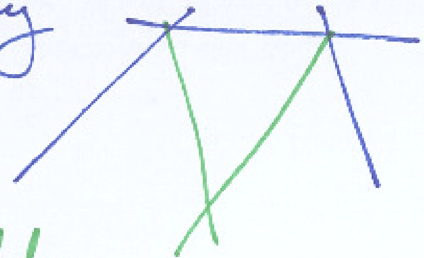
(b) 2 body + 1 tečna



(c) 2 tečny + 1 bod



(d) 3 tečny



2x osa úhlu

Pozn: (1) Všechny 3 způsoby definice kružnice jsou ekvivalentní a platí ∀ obvyklé vlastnosti kružnice.

(2) V praxi od teď můžeme používat kružítko.

(3) Ke kružnici umíme vést tečny z nějakého bodu:

(Thaletova věta)