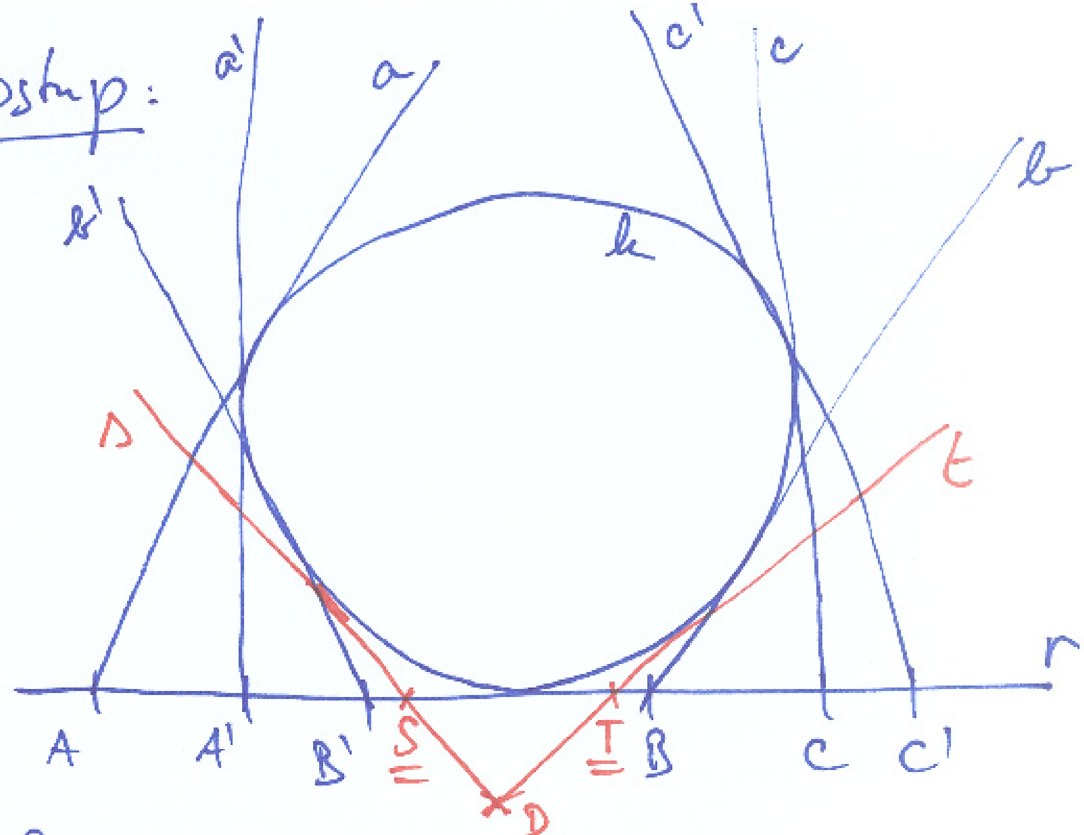
Proj. geometrie, 16.12.2020

Minule: kružnice
($\leftrightarrow$ kolmost, půlení úhlu, přenášení délek na X)
smíme užívat kružítko, umíme vést ke kružnici tečny

<u>Pozn</u>: zatím jsme neuměli sestrojit samodr. body proj. soumístných soustav.
Nyní už to bude možné:

<u>Konstrukce</u>: sestrojení samodr. bodů projektivity soumíst. bodových soustav $r(A,B,C) ::: r(A',B',C')$.

<u>Postup</u>:



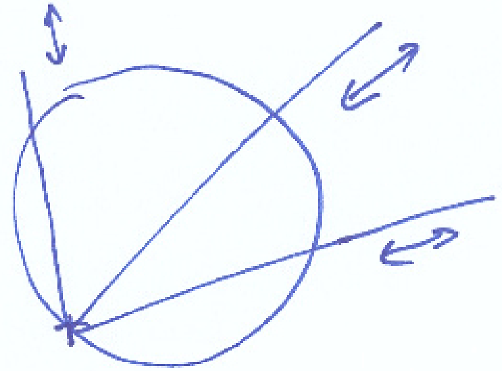
Zvolíme kružnici k, dotýkající se r (v libov. bodě). Z $\forall$ bodu $A, A', \dots$ vedeme tečnu (druhou) ke k. Tím dostaneme projektivitu tečen $k(a,b,c) ::: k(a',b',c')$. Ta má dvoj. bod D, tečny z D ke k jsou právě samodr. tečny s, t (víme!). Pak $S = s \cap r$, $T = t \cap r$.

Pozn.: 1) D vnitřní bod k ⇒ s, t, S, T imaginární

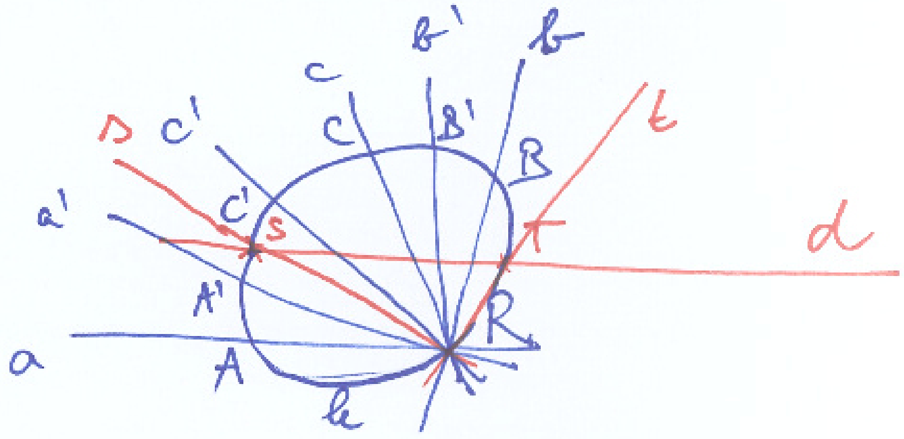
$D \in k \Rightarrow s = t,\ S = T$

2) toto byla konstr. pro r vlastní, pro r nevlastní ($r = n$) ⇒ nelze sestrojit k dotýkající se r.

Možné řešení: těch 6 směrů $A_\infty, A'_\infty, \dots$ promítneme na kružnici k z bodu ležícího na k, pak v ∥ průsečíku vedeme tečnu



Konstrukce*: sestrojit samodružné přímky projektivity soum. přímk. soustav $R(a,b,c) \;\bar{\wedge}\; R(a',b',c')$



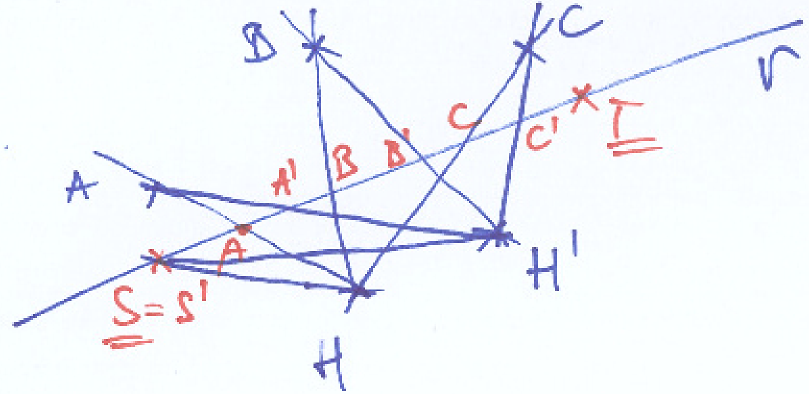
$k(A,B,C) \;\bar{\wedge}\; k(A',B',C')$

→ k mi najdu dir. přímku d

→ $S, T = d \cap k$

→ $s = RS,\ t = RT$

Konstrukce: určit průsečíky kčky dané 5 body s danou přímkou r.

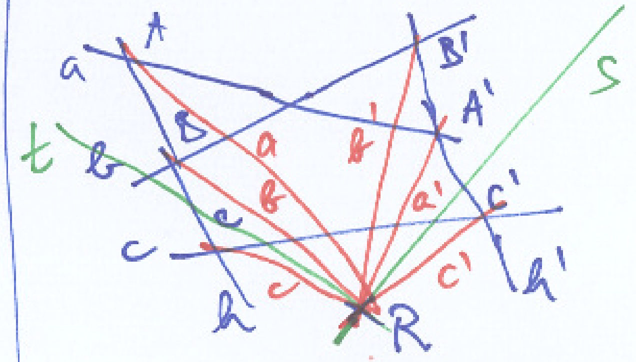


$\begin{pmatrix} 2+3=5 \\ 2\cdot 3=6 \end{pmatrix}$ $r(A,B,C) ::: r(A',B',C')$ pomocí předminulé konstrukce najdu sam. body $S, T \in r$ a to jsou hledané průsečíky, protože:

a) $S \in \mathcal{B}$ protože $S=S'$ a $HS \cap H'S' = S = S'$

b) $S \in r$ - zřejmé

Konstrukce*: určit tečny z bodu R ke kčce dané 5 tečnami.



Označíme tečny: h, h', a, b, c, ozn. průsečíky $h \cap a = A$ atd., spojím tyto průsečíky s R ...

$a, b, c; a', b', c'$ → projektivita

$R(a,b,c) ::: R(a',b',c')$,

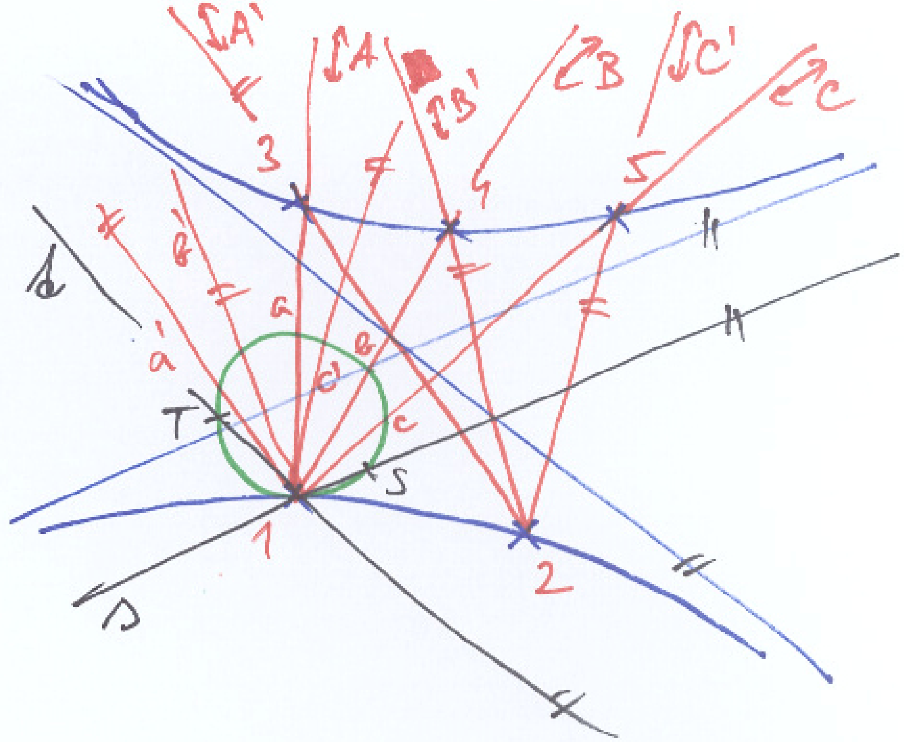
její samodr. přímky s, t jsou hledané tečny

Konstrukce: sestrojit asymptoty kčky dané 5 body

Postup: je to speciální případ předminulé konstrukce: hledáme průsečíky kčky (dané 5 body) s r = n (= s nevlastní přímkou)

→ to budou směry asymptot, jsou-li reálné, jde o hyperbolu a umíme pak asymptoty sestrojit

Postup: zadané body budou 1, 2, 3, 4, 5; z bodů 1, 2 (= H, H') uděláme spojnice s 3, 4, 5 (= A, B, C), jejich směry = 6 nevl. bodů A, B, C; A', B', C'
‖
A_∞ . . .



⇒ hledané směry asymptot budou samodr. body projektivity $n(A, B, C) \;\bar{\wedge}\; n(A', B', C')$.

Pro úsporu práce volím kružnici k tak, že $1 \in k$, z bodu 1 pak promítám těch 6 směrů A_∞, . . .

⇒ mám proj. $1(a, b, c) \;\bar{\wedge}\; 1(a', b', c')$

→ sam. přímky s, t mají směry = = hledané směry asymptot

DÚ: Každý v Geogebře
1 z těchto konstrukcí do 5.1.

Pozn: 2 reálné směry asymptot
$\Rightarrow$ hyperbola
1 $\Rightarrow$ parabola
0 $\Rightarrow$ elipsa

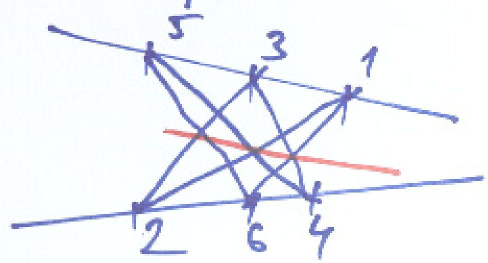
Pascalova a Brianchonova věta

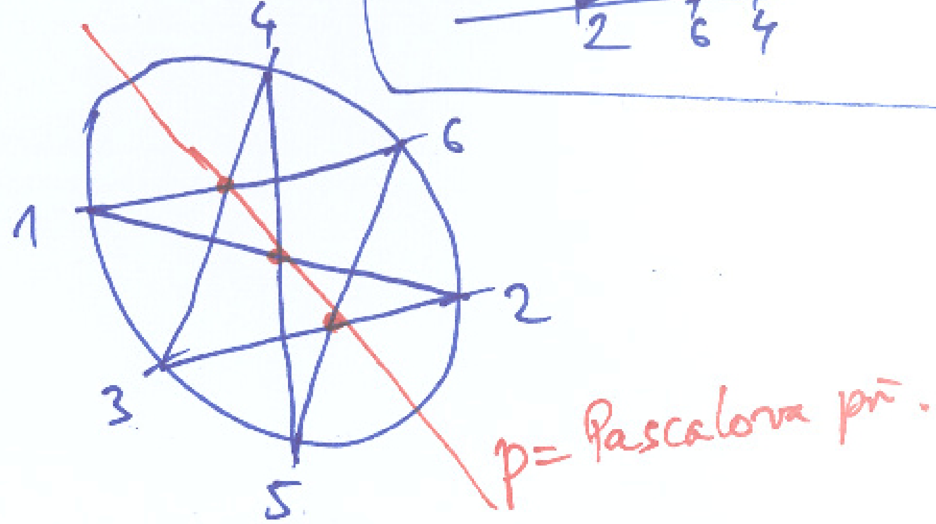
Pozn: Kčka je dána 5 body
$\Rightarrow$ 6 bodů na kčce musí být nějak vázáno.

Pascalova věta: Šest bodů 1, 2, 3, 4, 5, 6 leží na kčce $\Leftrightarrow$ průsečíky spojnic

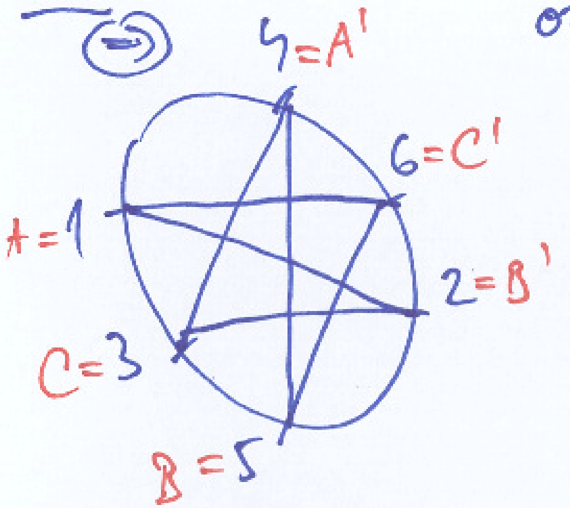
$\overline{12}, \overline{45}$
$\overline{23}, \overline{56}$ leží na jedné, tzv. Pascalově přímce.
$\overline{34}, \overline{61}$

Pozn: Verze Pasc. věty pro sing. kčky (= dvojici přímek) = Pappova věta.





Dk: (⇒)



ozn. body:

1 = A
2 = B'
3 = C
4 = A'
5 = B
6 = C'

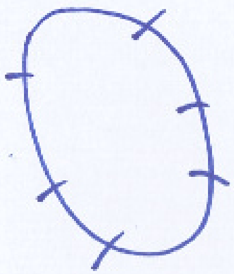
při tomto označení se jedná o projektivitu $B(A,B,C) ::: B(A',B',C')$ a Pasc. př. je její direkční př.

(⇐) Nechť je dáno 6 bodů (1...6) splňujících podmínku s Pasc. př. Chceme ukázat, že i bod 6 leží na kče dané body 1...5.
↓ B

→ Ozn. 6' průsečík B a přímky $\overline{56}$. (6' obecně různý od 5), chceme ukázat že $6'=6$. Víme zatím, že $\overline{56'}=\overline{56}$, a proto spojnice $\overline{12}, \overline{45}$ a také $\overline{23}, \overline{56'}$ se protínají na Pasc. přímce (p) (pro šestici 1 2 3 4 5 6'), na p se protínají rovněž $\overline{34}, \overline{6'1}$. Ale i přímky $\overline{34}, \overline{61}$ se protínají na téže přímce (z předpokladu), a proto $\overline{61} = \overline{6'1} \Rightarrow \underline{6'=6}$ □

Pozn: Pascal větu dokázal eukleidovsky, až později se ukázalo, že to je čistě projektivní věta.

Pozn.: 6 bodů ⇒ 6! možných označení bodů

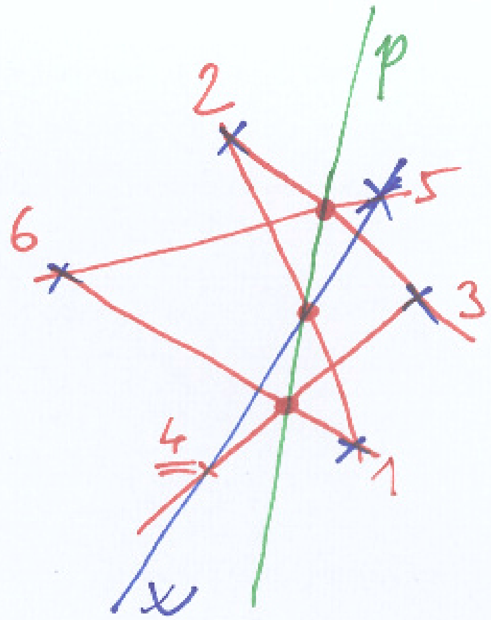


vždy 12 šestiúhelníků má tutéž Pasc. př. (rotace, reflexe)

$\exists \ \frac{6!}{12} = \underline{\underline{60}}$ různých Pasc. přímek

DÚ – dobrovolný: v Geogebře

Konstrukce: kčka ~~pro~~ je dána 5 body, přímka x prochází jedním z nich. Najít druhý průsečík x a $\mathcal{B}$.

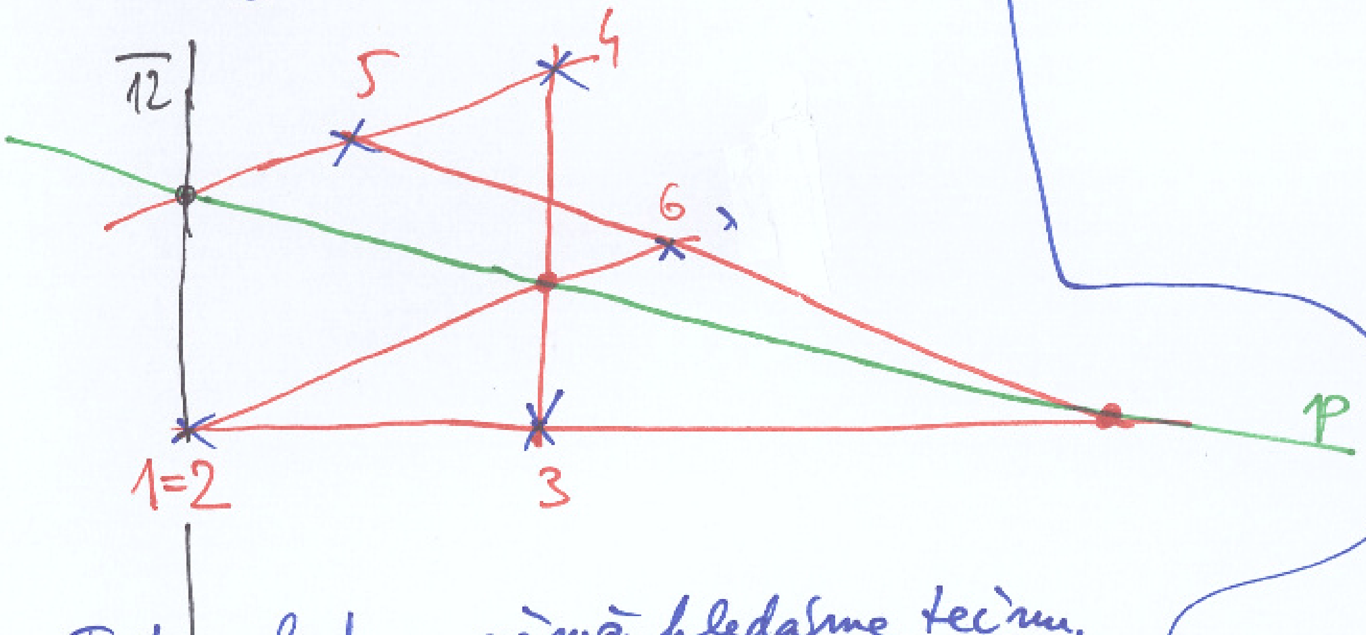


$4 = 2$
$4 \in x$
$x = 45$

Pozn.: 1) Pro konstrukci jednoho bodu je toto rychlejší než z definice (přes def. ~~průsečík~~ bod)

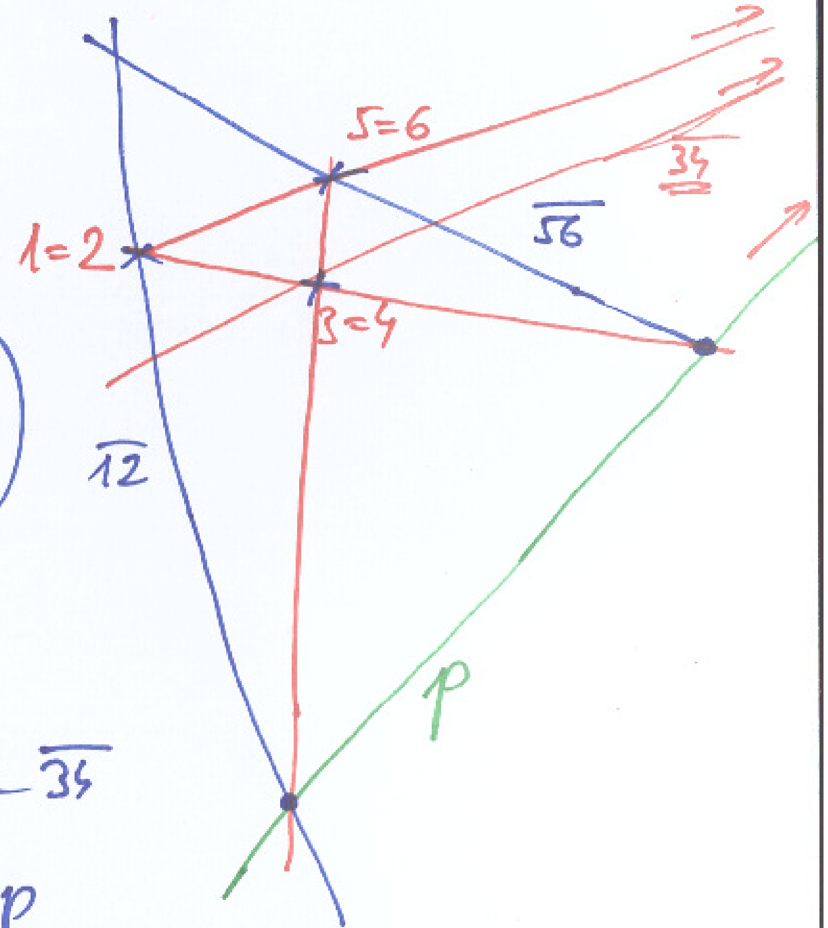
2) Bod na x a bod, který hledáme, musejí mít sousední čísla. (např. 4,5)

Konstrukce: křivka je dána 5 body, v jednom z nich sestrojit tečnu.



Trik: bod, v němž hledáme tečnu, označíme dvěma sousedními čísly (1=2), pak tečna = $\overline{12}$.

Konstrukce: Křivka je dána 3 body + 2 tečnami; sestrojit tečnu ve 3. bodě (v němž ji neznáme)



hledáme $\overline{34}$

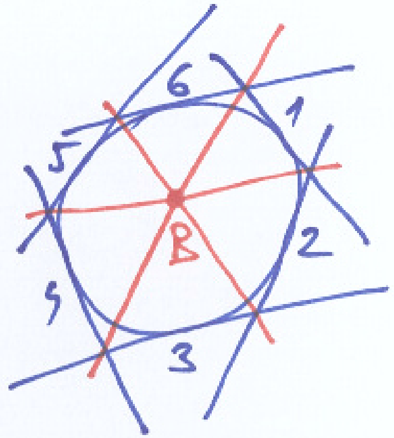
$\overline{34} \cap \overline{16} \in p$

Pozn: výsledná konstrukce je stejná jako pomocí věty D (harm. čtveřice).

Duálně: Brianchonova věta:

Šest přímek 1…6 je tečnami téže kčky $\Leftrightarrow$ spojnice průsečíků

$$\left.\begin{array}{l} 1\cap 2,\ 4\cap 5 \\ 2\cap 3,\ 5\cap 6 \\ 3\cap 4,\ 6\cap 1 \end{array}\right\}$$ procházejí jedním, tzv. Brianchonovým bodem.



DÚ – samostudium:

všechny 3 konstrukce s Pasc. přímkou provést duálně s Brianch. bodem.