30.9.
2020

Projektivní geometrie I

I. Úvod

Proj. geom. = „geometrie polohy",

tj. bez měření vzdáleností, úhlů

máme pouze pojmy bod, přímka

incidence

Klasická inspirace

malířství

16. – 17. stol.

Klíčové pojmy (nové oproti Eukl. geom.):

- nevlastní body („body v ∞")
- princip duality

Možné přístupy ke geometrii:

- axiomatický (čistá teorie bez obrázků)
- syntetický (obrázky, konstrukce) – PG I
- analytický (souřadnice, rovnice, výpočty) – PG II

Axiomatický přístup

Primitivní pojmy: bod, přímka, incidence

1. Eukleidův axiom říká:

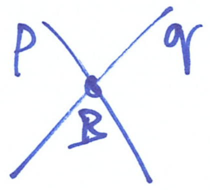
(A1) Ke každým dvěma (různým) bodům B, C existuje právě jedna přímka p s nimi incidentní.
(tj. $B, C \in p$).

p = <u>spojnice</u> bodů B, C

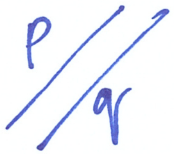
? platí podobné tvrzení při záměně pojmů bod ↔ přímka ?

(A2) Ke každým dvěma (různým) přímkám p, q existuje právě jeden bod B s nimi incidentní.
($B \in p$, $B \in q$)

B = <u>průsečík</u> přímek p, q



V Eukl. geom. (A2) neplatí: rovnoběžky <u>nemají</u> průsečík.



V proj. geom. chceme, aby platil

$\boxed{\text{PRINCIP DUALITY}}$

Tvrzení zůstávají v platnosti, zaměníme-li v nich zároveň pojmy

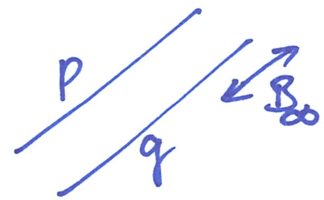
bod ↔ přímka
průsečík ↔ spojnice
ležet na přímce ↔ procházet bodem
(incidence)

a další pojmy z nich odvozené

Proto už i axiomy PG musejí být vzájemně duální: má platit (A1) i (A2).

Potřebujeme, aby rovnoběžky <u>nebyly</u> výjimečným případem pro (A2),
tj. chceme, aby se taky protínaly ⇒ zavedeme <u>body nevlastní</u>

<u>nevlastní bod</u> = „bod v ∞" = <u>směr v rovině</u>



Pozn: 1) Pozor! Směr je „na obě strany"

tj. každá (vlastní) přímka má 1 směr (ne dva)

2) Často nevl. body značíme $\underline{\underline{B_\infty}}$

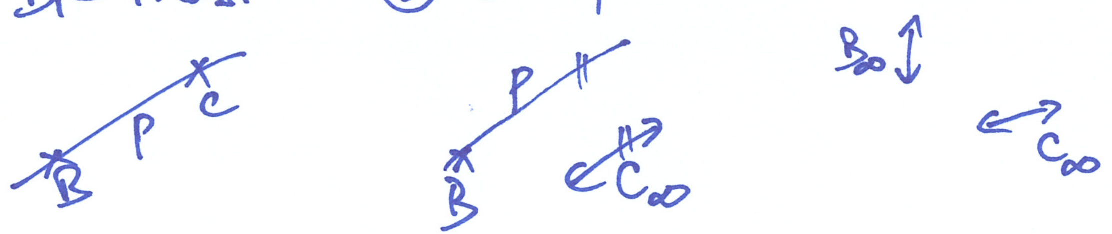
3) pův. body nazýváme <u>vlastní</u>

4) nevl. bodů je ∞, jsou to $\forall$ směry v rovině:

Nyní platí (A2) pro $\forall$ dvojici přímek.

Ale co teď (A1) ?

(a) B, C vlastní (b) B vl., C_∞ (c) B_∞, C_∞



Zavádíme tzv. <u>nevlastní přímku</u> $\equiv$

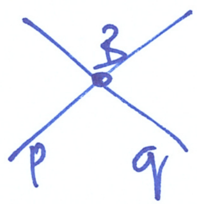
$\equiv$ množina $\forall$ nevl. bodů

Pozn: 1) nevl. přímku budeme značit n, n_∞,

2) n_∞ je <u>jediná</u>, ost. př. = <u>vlastní</u>

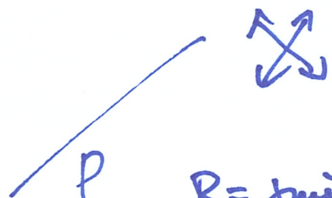
Nyní platí (A1) pro $\forall$ dvojici bodů, ověříme (A2) pro $\forall$ dvojice přímek:

(a) p, q vlastní různob.



(b) p, q vlastní rovnob.

(c) p vl., $q = n_\infty$



B = směr přímky p

(d) $p = q = n_\infty$ nejsou různé

$\boxed{\text{Vše platí}}$

3

Závěr + Def: tento systém vl. a nevl. bodů a přímek splňuje (A1) i (A2) a nazýváme jej projektivní rovina $\mathbb{R}P^2$.

Pro vybudování proj. geometrie axiomaticky se přidává ještě axiom

(A3) existují aspoň 4 body, z nichž každé 3 jsou nekolineární.

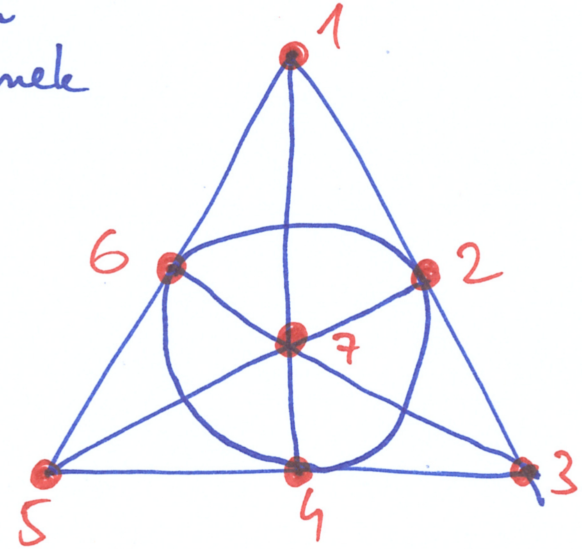
Pozn: duální tvrzení k (A3) už se dá dokázat z (A1)...(A3)

Pozn: axiomy (A1)...(A3) splňují i jiné modely než $\mathbb{R}P^2$.

Př: Fanova rovina = = nejmenší model PG

7 bodů

7 přímek



bod: 1, ..., 7

přímky = 3-prvkové množiny bodů (vyznačené čarami v obr.)

např. {1,2,3}, {2,7,5}, {2,4,6}

incidence: bod ∈ přímce

Př: Dobble

Můžou být různé geometrie

Euklidovská geom. : body, přímky, incid.
vzdálenost, úhly

Afinní geom. : body, přímky, incid.
vlastní / nevl. body

Projektivní geom. : body, přímky, incidence

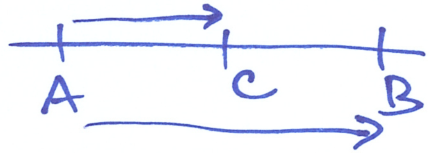
↓ zapomínání

V Eukl. geom. máme zobrazení : shodnosti
– zachovávají vzdál., úhly

Toto je přístup F. Klein : Erlangenský progr.
– snaha klasifikovat možné geometrie
zahrnuje i neeuklidovské geometrie
(sférická, hyperbolická = Lobačevského)
↓
vzdál. + úhly (jiné než euklid.)

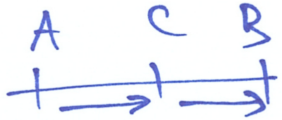
Afinní geom. (v rovině):

body : $A, B, \ldots$
vektory : $u, v, \ldots$
operace : bod + vektor = bod
$$A + v = B$$
s obvyklými axiomy
$$(A + (u+v)) = (A+u)+v$$
jinak : $v = B - A$
body, vektory → přímky
vzáj. poloha přímek
(různob., rovnob.)
Lze definovat <u>střed úsečky</u>:



./.

Např. takto:



$$AC = \tfrac{1}{2}(AB)$$

$$\parallel$$

$$C-A$$

ekvivalentně: $AC = CB$

$$C-A = B-C$$

Dělicí poměr 3 bodů na přímce

$$\lambda = \pm \frac{|AC|}{|BC|}$$

$\ominus$ ... C mezi A, B

$\oplus$ ... C mimo A, B

Def. λ bez vzdáleností ... ?

$$(C-A) = \lambda \cdot (C-B)$$

$$\lambda = (A\,B\,C) = (A\,B;C)$$

Pozn: 1) z nové def. lze odvodit „původní" definice

↳ Euklidovská

2) Zřejmě pro 3 různé body A, B, C

λ nenabývá hodnot: 0 ... $A=C$

1 ... $A=B$

∞ ... $B=C$

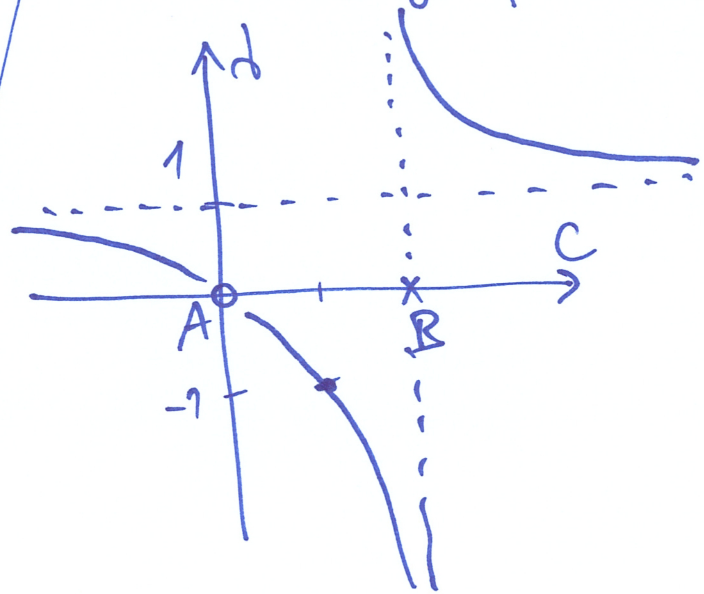
3) C je střed AB $\Leftrightarrow$ $\boxed{(ABC) = -1}$

$$C-A = B-C$$

$$C-A = (-1)\cdot(C-B)$$

4) předp. A, B pevné, C pohyblivý,

$\Rightarrow \lambda = \lambda(C)$ je funkce, lineárně lomená



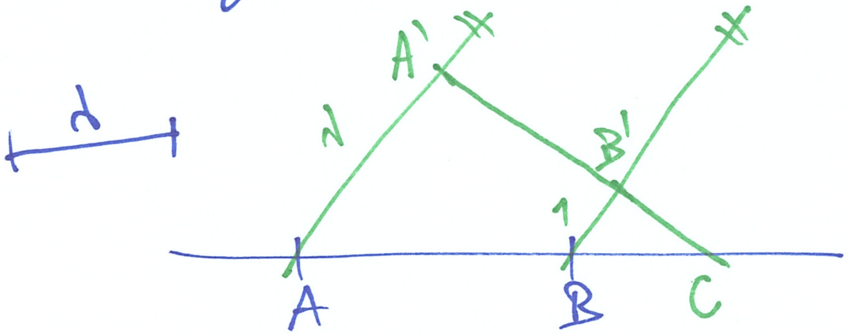
5) Dány $A \neq B$, $d \neq 0, 1, \infty$, $d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists!\, C$, že $(ABC) = d$

Konstrukčně: dáno číslo d, body A, B

najít C: $(ABC) = d$

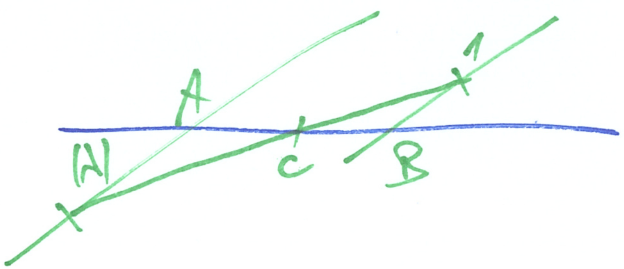
úsečka délky d



Z podobnosti Δ: $\dfrac{|AA'|}{|BB'|} = \dfrac{d}{1} = d$

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AA'|}{|BB'|} = d$$

Pro $d < 0$



7

Zobrazení v af. geometrii:

afinní zobrazení:

na bodech: posunutí

na vektorech: homomorfismus

$A \ldots$ matice: $A \cdot v + v_0$

vektor, posunutí

speciálně, jde-li o izomorfismus

$\rightarrow$ zobr. se nazývá afinita

Platí: afinity jsou právě ta zobrazení, která zachovávají dělicí poměr

Cvičení: Je-li $(ABC) = d$, čemu se rovná dělicí poměr pro ostatní permutace bodů? (6 perm.)

$(ACB) = ?$, $(BAC) = ?$

$(ABC) = \lambda$ $\qquad (C-A) = \lambda \cdot (C-B)$

$(BAC) = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad (C-B) = \frac{1}{\lambda} \cdot (C-A)$

$(ACB) = 1-\lambda$

$(BCA) = 1-\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$

$(CAB) = \frac{1}{1-\lambda}$

$(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$

$$\boxed{\text{Konvence} \quad \frac{1}{0} = \infty}$$

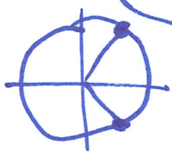
Pro obecné λ se jedná o 6 různých hodnot.

Ex. speciální hodnoty λ, kde některé hodnoty splývají:

(A) $-1, \; 2, \; \frac{1}{2}$ (vše 2x)

(B) $1, \; 0, \; \infty$ (vše 2x)

(C) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \; \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ (vše 3x)



Projektivní přímka $\mathbb{R}P^1$

Ozn: Je-li $v = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

ozn. $\langle v \rangle$ = přímka generovaná vektorem v (= podprostor)

Je tedy $\langle v \rangle = \langle (x_0, x_1) \rangle = \langle (ax_0, ax_1) \rangle$ pro $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Def: Projektivní přímka $\mathbb{R}P^1$ je množina

$$\mathbb{R}P^1 = \{ \langle v \rangle ; \; v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \}$$

tj. je to množina $\forall$ přímek v $\mathbb{R}^2$ proch. počátkem.

$\langle v \rangle$ nazýváme geometrický bod v $\mathbb{R}P^1$

vektor v ... jeho aritmetický zástupce
$\in \mathbb{R}^2$

$\forall$ geom. bod $\langle v \rangle \in \mathbb{R}P^1$ má ∞ mnoho aritm. zástupců, všechny se liší jen nenulovým násobkem: $\langle v \rangle = \langle a \cdot v \rangle$ $(a \neq 0)$

Homogenní souřadnice geom. bodu:

je-li $v = (x_0, x_1)$,

píšeme $\underbrace{\langle v \rangle = [x_0 : x_1]}$,

jsou určeny jednoznačně až na nenulový násobek.

Př: $[1:3] = [2:6] = [3:9] = \ldots$

Pozn: podíly $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \ldots$

Kanonické vnoření afinní přímky

$\mathbb{R}$ do proj. přímky $\mathbb{R}P^1$ je zobrazení

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}P^1$$

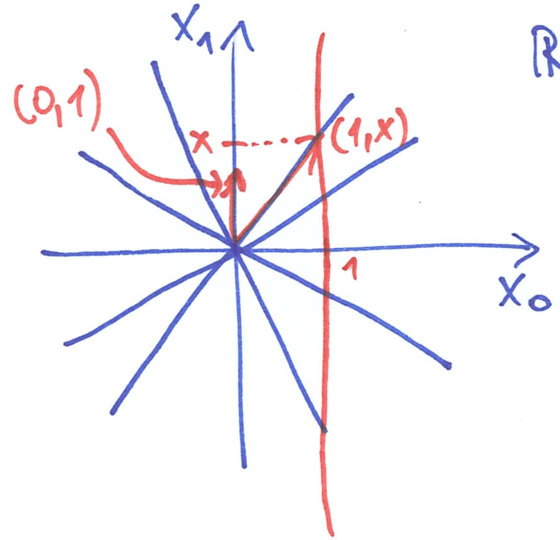
bod $x \longmapsto [1:x]$ → vlastní body

vektor $1 \longmapsto [0:1]$ → nevlastní bod

Pozn: $[0:1] = [0:2] = \ldots$

nevl. bod má souř. $x_0 = 0$

vl. body mají $x_0 \neq 0$



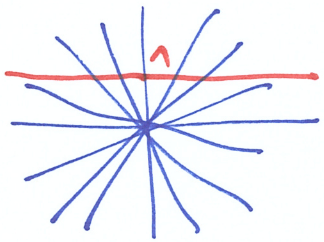
$\mathbb{R}P^1 = \{$přímky proch. $0\}$

svislá přímka má směr $(0,1)$ → odpovídá nevl. bodu

Pozn.: vnoření lze volit i jinak

(zaměníme souř.: $x \longmapsto [x:1]$

velká $1 \longmapsto [1:0]$



používají se oba způsoby v literatuře)