Proj. geom. – 2. přednáška
7.10.2020

Minule:

afinní přímka: $\mathbb{R}$

↳ body: $x \in \mathbb{R}$

↳ vektory: $x \in \mathbb{R}$

projektivní přímka $\mathbb{R}P^1$:

$$\mathbb{R}P^1 = \{ \langle v \rangle ;\ v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \}$$

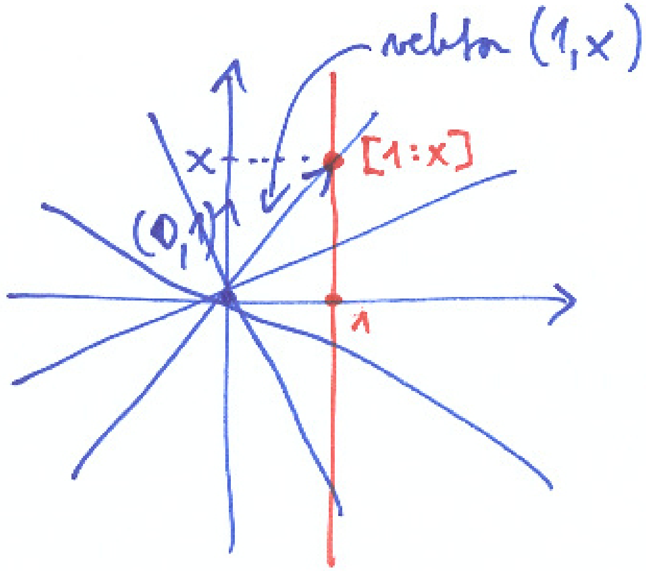
Kanonické vnoření $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}P^1$

bod $x \longmapsto [1:x]$ → vlastní body

vektory $1 \longmapsto [0:1]$ → nevlastní bod

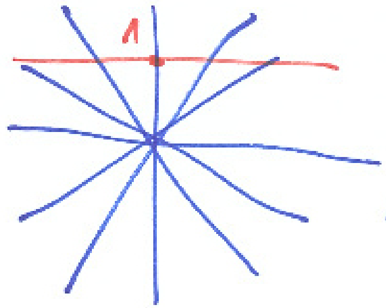
$x \longmapsto [0:x]$

ale $[0:x] = [0:1]$ pro $\forall x \neq 0$



$\forall$ přímka kromě svislé má s přímkou průsečík $[1:x]$, svislá přímka má s přímkou společný směr … bod $[0:1]$

Pozn.: 1) existují i jiná vnoření



odpovídá vnoření

$x \longmapsto [x:1]$

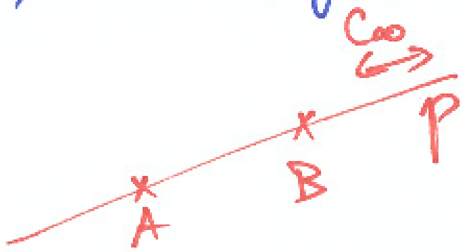
vekt. $1 \longmapsto [1:0]$

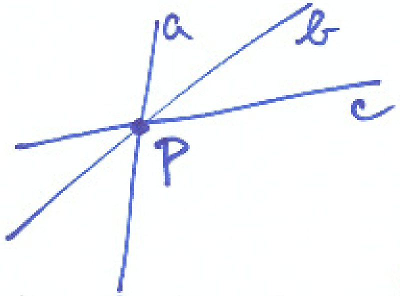
2) Tento obrázek odpovídá dvojímu náhledu na $\mathbb{RP}^1$:

(A) $\mathbb{RP}^1$ se jeví jako přímka obsahující body (vlastní + 1 nevl.)

(B) $\mathbb{RP}^1$ se jeví jako svazek přímek procházejících bodem (= středem svazku)

3) Odsud plyne, že máme dualitu:





⇒ V syntetické geometrii bude vše mít dvě verze, vzájemně duální

4) Rozlišení bodů na vlastní a nevlastní není vlastnost proj. přímky jako takové; je to vlastnost toho vnoření.

Výhoda svazku přímek: nemá žádnou nevl. přímku

Výhoda přímky s body: je to bližší našemu pojmu „přímky"

Projektivní rovina $\mathbb{RP}^2$

Def: $\mathbb{RP}^2 = \{\langle v\rangle;\ v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}\}$

Homogenní souřadnice:

$v = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

$\langle v\rangle = [x_0 : x_1 : x_2]$ ... geom. bod v $\mathbb{RP}^2$

homog. souř.

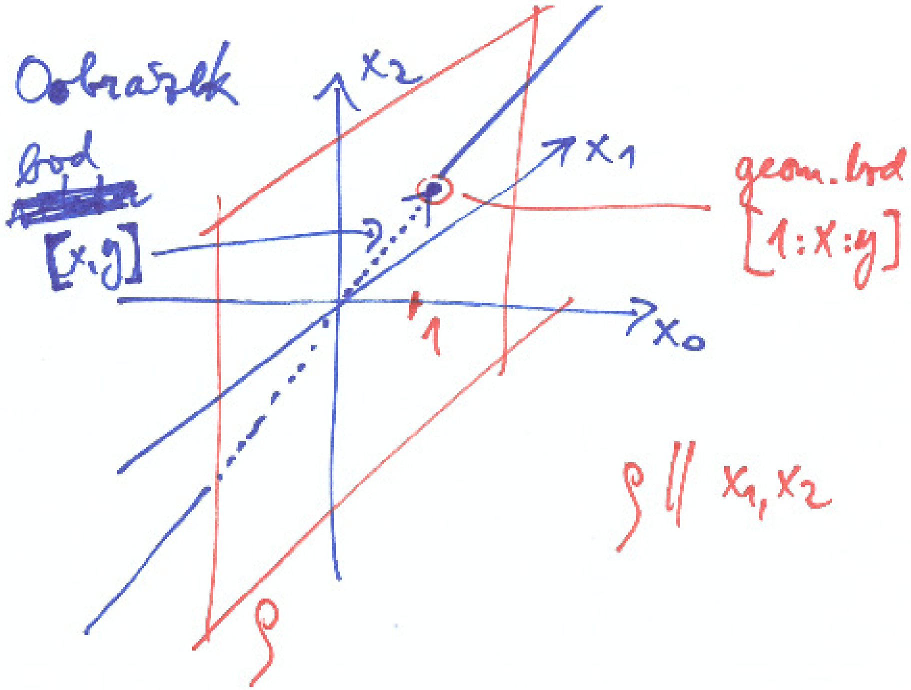
Opět: $\langle v\rangle = \langle w\rangle \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, a \neq 0 : v = a \cdot w$

Kanonické vnoření afinní roviny $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{RP}^2$ je zobr. $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$

bod $[x,y] \longmapsto [1:x:y]$ ← vl. body

vektor $(x,y) \longmapsto [0:x:y]$ ← nevl. body

Obrázek



Pozn: 1) Přímky nerovnoběžné s rovinou ρ s ní mají průsečík ... vl. bod $[1:x:y]$

Přímky rovnoběžné s ρ, tedy obsažené v souř. rovině x_1, x_2 s ρ mají nevlastní průsečík ... $[0:x:y]$

$\Rightarrow$ Nevl. bodů je ∞ mnoho.

2) Lze zavést pojem <u>projektivního podprostoru v $\mathbb{R}P^2$</u>:

je-li W podprostor v $\mathbb{R}^3$ ($W \neq 0$ netriviální)

pak jeho <u>projektivizace</u> je

$$P(W) := \{ \langle w \rangle \in \mathbb{R}P^2 ;\ w \in W \},$$

říkáme též: $P(W)$ je podpr. v $\mathbb{R}P^2$.

Přitom $\dim P(W) = \dim W - 1$

(to je vlastní def. $\dim P(W)$)

<u>Př</u>: $W =$ přímka v $\mathbb{R}^3$ ($\dim = 1$) ... $P(W) =$ geom. bod ($\dim = 0$)

$W =$ rovina v $\mathbb{R}^3$ ($\dim = 2$) ... $P(W) =$ proj. přímka ($\dim = 1$)

$W =$ celé $\mathbb{R}^3$ ($\dim 3$) ... $P(W) =$ celé $\mathbb{R}P^2$ ($\dim 2$)

3) Speciálně, vezmeme-li $W =$ rovina (x_1, x_2) ... rovnoběžná s ρ

$\Rightarrow P(W) =$ <u>nevlastní přímka</u>

$\Rightarrow$ proto je nevl. přímka opravdu přímkou

4) Takto def. proj. rovina splňuje axiomy proj. geometrie a budeme v ní pracovat

5) V rámci $\mathbb{R}P^2$ máme obě verze proj. přímky:

Dvojpoměr

čtyř bodů na (proj.) přímce

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,D)}$$

to je definice z afinní geom.

a ta se nehodí pro proj. geom:

- není zde def. dělicí poměr
- vylučuje to nevl. body.

$\Rightarrow$ Chceme def. dvojpoměr jinak, pomocí aritm. zástupců.

<u>Def</u>: Dvojpoměr 4 vektorů v rovině

nechť a, b, c, d jsou 4 vektory v $\mathbb{R}^2$, každé dva jsou LNZ.

Zřejmě ale každé tři jsou LZ.

Tedy ex. čísla $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$c = \alpha_1 \cdot a + \beta_1 \cdot b$$
$$d = \alpha_2 \cdot a + \beta_2 \cdot b$$

Pak def. dvojpoměr

$$(a\,b\,c\,d) := \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\alpha_1 \cdot \beta_2}.$$

<u>Pozn</u>: 1) dvojpoměr je dobře definován (čísla α_i, β_i jsou jednozn. určena) a nenabývá hodnot (pro a,b,c,d <u>různé</u>)

$0 \ldots \langle a \rangle = \langle c \rangle \ldots \beta_1 = 0$
$ \langle b \rangle = \langle d \rangle \ldots \alpha_2 = 0$

$\infty \ldots \langle b \rangle = \langle c \rangle \ldots \alpha_1 = 0$
$ \langle a \rangle = \langle d \rangle \ldots \beta_2 = 0$

$1 \ldots \left.\begin{array}{l} \langle c \rangle = \langle d \rangle \\ \langle a \rangle = \langle b \rangle \end{array}\right\}$ složitější

2) Hodnota dvojpoměru $(a\,b\,c\,d)$ nezávisí na volbě násobku $\neq 0$ žádného z vektorů !

Př: $r\cdot c = r\cdot\alpha_1\cdot a + r\cdot\beta_1\cdot b$

$$\Rightarrow (a\;b\;r.c\;d) = \frac{a_2\cdot \cancel{r}\cdot\beta_1}{\cancel{r}\cdot\alpha_1\cdot\beta_2} = (a\,b\,c\,d)$$

$\Rightarrow$ dvojpoměr je tudíž definován i pro geom. body !

Tedy při označení $A = \langle a\rangle, \dots$

Def: $(A\,B\,C\,D) = (a\,b\,c\,d)$

dvojpoměr 4 bodů na projektivní přímce

3) Tato def. funguje bez ohledu na to, zda $\mathbb{R}P^1$ uvažujeme „samostatně" nebo jako podprostor v $\mathbb{R}P^2$; zda ji znázorňujeme jako přímku s nevl. bodem či jako rozsek.

Def: pokud body $A, B, C, D \in \mathbb{R}P^1$ splňují $(A\,B\,C\,D) = -1$, říkáme, že:

- body A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřici
- body C, D jsou harm. sdružený vůči A, B
- body C, D jsou harm. oddělovaný body A, B
- bod D je čtvrtý harmonický bod k A, B, C

Věta o 4 determinantech:

jsou-li g. body A, B, C, D vyjádřeny v homog. souřadnicích $A = [a_0 : a_1], \ldots,$ pak platí

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}.$$

Dk: rozepíšeme do souřadnic vztahy z definice:

$$c_0 = \alpha_1 \cdot a_0 + \beta_1 \cdot b_0$$
$$c_1 = \alpha_1 \cdot a_1 + \beta_1 \cdot b_1$$

$$d_0 = \alpha_2 \cdot a_0 + \beta_2 \cdot b_0$$
$$d_1 = \alpha_2 \cdot a_1 + \beta_2 \cdot b_1$$

To jsou 2 soustavy rovnic pro neznámé α_i, β_i s koeficienty a_i, b_i, c_i

Cramerovo pravidlo:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$

a podobně pro $\alpha_2, \beta_1, \beta_2$

dosadíme do def. dvojpoměru

$$(ABCD) = \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\alpha_1 \cdot \beta_2},$$

vykrátí se $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$

a zbyde

$$\frac{\begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}} = \text{to co jsme chtěli}$$

Důsledky:

1) Jsou-li $\forall 4$ body vlastní, lze je psát jako $A=[1:a]$
$B=[1:b]$
...

pak $\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix} = c-a$

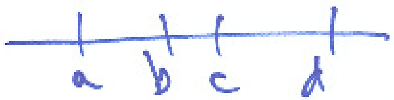
$$\Rightarrow (ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)} = \left(\frac{c-a}{c-b}\right) : \left(\frac{d-a}{d-b}\right) =$$

$$= \frac{(abc)}{(abd)} = \underline{\underline{\frac{(ABC)}{(ABD)}}}$$

(afinní definice)

Zde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$



2) A, B, C vlastní; $D = D_\infty = [0:1]$

$$\Rightarrow (ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix}} = \frac{(c-a)\cdot 1}{1\cdot(c-b)} =$$

$$\frac{c-a}{c-b} = (abc) = \underline{\underline{(ABC)}}$$

Tedy: pro D nevlastní je
$$(ABCD_\infty) = (ABC).$$

Pozn.: $D \rightarrow D_\infty \Rightarrow (ABD) \rightarrow 1$

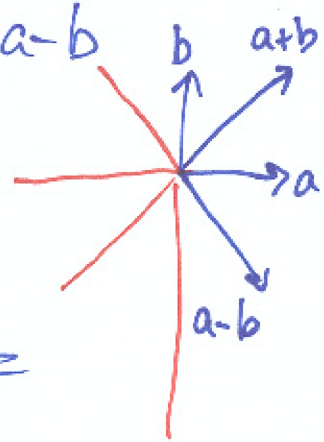
3) Případ $(ABCD_\infty) = (ABC) = -1$
znamená: <u>harm. čtveřice</u> <u>C je střed AB</u>

!

Pozn.: jiný příklad harm. čtveřice:

4 vektory v $\mathbb{R}^2$: a, b

$c = a+b$, $d = a-b$



z definice: $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = 1$

$\beta_2 = -1$

$$\Rightarrow (a\,b\,c\,d) = \frac{1\cdot 1}{1\cdot(-1)} = \underline{\underline{-1}}$$

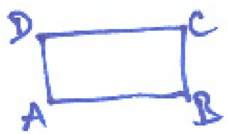
Možné hodnoty dvojpoměru při permutacích 4 bodů: těch je 24, ale platí:

$$(ABCD) = (BADC) = (DCBA) = (CDAB)$$

(je vidět ze 4 determ.)

simultánní prohození dvojic

Kleinova čtyřgrupa = symetrie matrace:



$\Rightarrow$ vždy 4 perm. dávají stejnou hodnotu $\Rightarrow \frac{24}{4} = 6$ možností

a ty už známe z děl. poměru:

$(ABCD) = \lambda$

$(BACD) = \frac{1}{\lambda}$

$(ACBD) = 1-\lambda$

$(BCAD) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$

$(CABD) = \frac{1}{1-\lambda}$

$(CBAD) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$

Tomu také odpovídají čtveřice, kdy některé hodnoty jsou si rovny:

(A) <u>harmonická čtv.</u> $(-1, 2, \frac{1}{2})$ (vše 2x)

(B) <u>dva body splývají</u> $(1, 0, \infty)$

(C) <u>ekvianharmonická čtveřice</u> $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

Důsledek: vztah pro harm. čtveřici lze zapsat 8 různými způsoby:

$$(ABCD)=(BADC)=(DCBA)=(CDAB)=$$
$$=(BACD)=(ABDC)=(CDBA)=(DCAB)=-1$$

Tudíž: D je 4. harm. bod k $A,B,C \iff$

$\iff$ C —"— k A,B,D

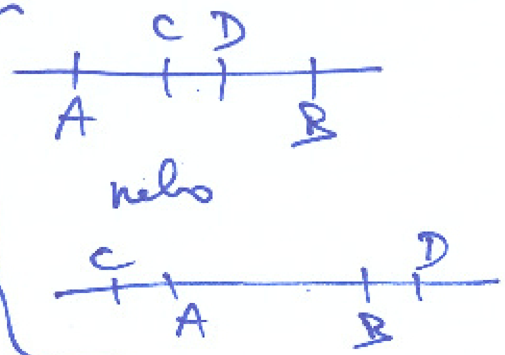
(atd.) Pozn, záleží na pořadí - obecně

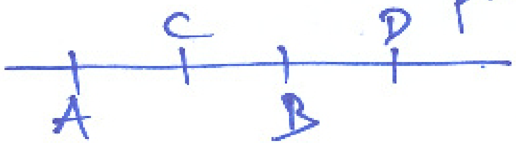
Pozn: u děl. poměru platí

$$(ABC) \begin{cases} >0 \iff C \text{ mimo } AB \\ <0 \iff C \text{ mezi } AB \end{cases}$$

proto i pro dvojpoměr platí:

$$(ABCD) \begin{cases} >0 \iff C,D \text{ jsou ve stejné části přímky vydělené } A,B \\ <0 \iff C,D \text{ jsou v různých částech přímky} \end{cases}$$





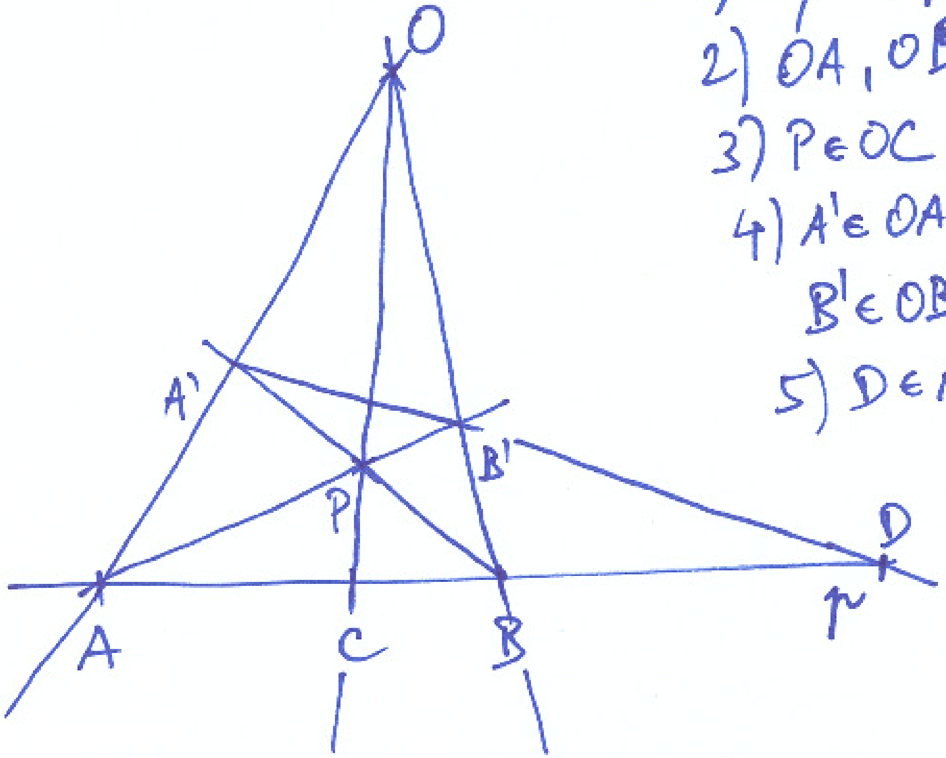
Proto i pro případ $(ABCD)=-1$ jsou C, D oddělovány body A,B

$\Rightarrow$ odsud „jsou harmonicky oddělovány")

Konstrukce 4. harmonického bodu

Dány A, B, C na přímce p,
máš se najít D, že $(ABCD) = -1$.

1) O; $O \notin p$
2) OA, OB, OC
3) $P \in OC$
4) $A' \in OA \cap BP$
   $B' \in OB \cap AP$
5) $D \in A'B' \cap p$



DÚ: 1) zkusit v různých polohách bodů
2) zkusit v GeoGebře

Pozn: tato konstrukce
nezávisí na ~~volbě~~ volbě
- bodu O
- bodu $P \in OC$

(GeoGebra!)

Příště: - důkaz této konstrukce
- duální konstrukce