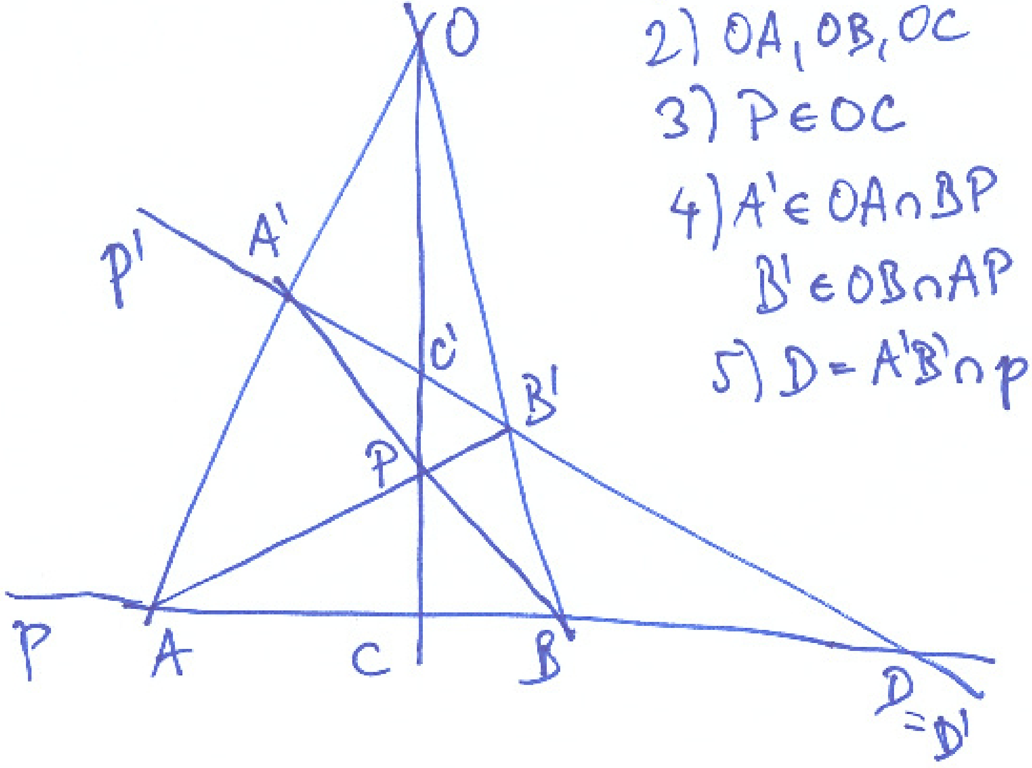
Proj. geometrie, 14.10.2020

Konstrukce (4. harmonický bod)

dány body A, B, C na přímce

$\Rightarrow$ najít D, že $(ABCD) = -1$



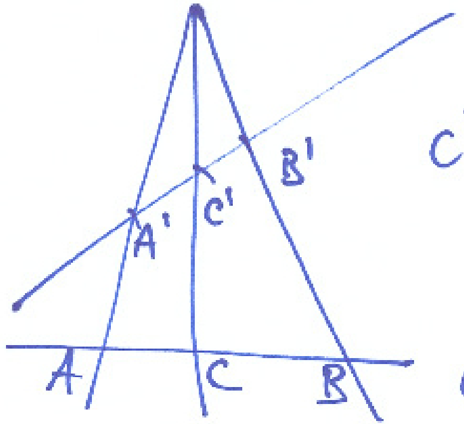
1) O, $O \notin p$
2) OA, OB, OC
3) $P \in OC$
4) $A' \in OA \cap BP$
   $B' \in OB \cap AP$
5) $D = A'B' \cap p$

Pozn.: bod D nezávisí na volbě O, P

Jak dokázat tuto konstrukci?

Dk1: projekce z bodu („perspektivity") zachovávají dvojpoměr

Pozn.: projekce nezachovávají dělicí poměr



C' není obecně střed $A'B'$!

$C =$ střed AB

— uvidíme později

Projekce z O:

$(ABCD) = (A'B'C'D)$

Projekce z P:

$(BACD) = (A'B'C'D)$

$\Rightarrow (ABCD) = (BACD) = \frac{1}{(ABCD)}$

$\Rightarrow (ABCD)^2 = 1$

$\Rightarrow (ABCD) = \begin{cases} 1 & \text{– nemůže nastat (4 různé)} \\ \underline{\underline{-1}} & \end{cases}$

Navíc je vidět, že D nezávisí na O, P. □

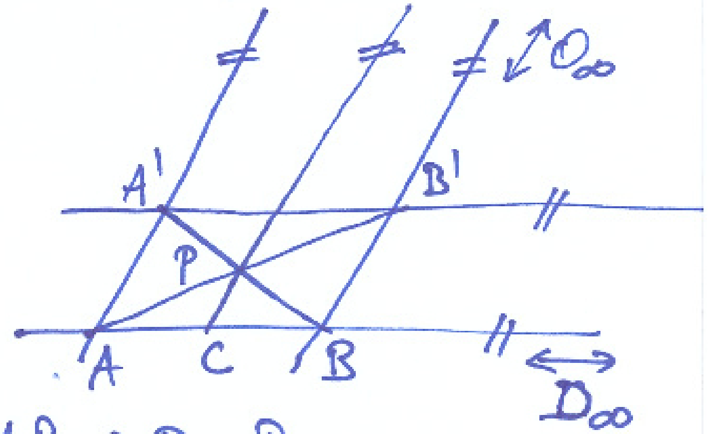
<u>Dk2</u>: <u>projektivní trik</u>: protože nevl. body nejsou nijak výjimečné, proto můžeme konstr. provést ve spec. poloze; projektivní vlastnosti (jako: dvojpoměr) se zachovají při přechodu do obecné polohy (nedokázáno).

Speciální poloha („afinní")

$D = D_\infty$

$O = O_\infty$

$OD = $ ⤨



$C =$ střed $AB \Rightarrow D = D_\infty$

$P =$ střed rovnob. $ABB'A'$

$PC \parallel AA' \parallel BB'$

$\Rightarrow A'B' \parallel AB \Rightarrow AB \cap A'B' = D_\infty$

Přitom $(ABCD_\infty) = (ABC) = -1$

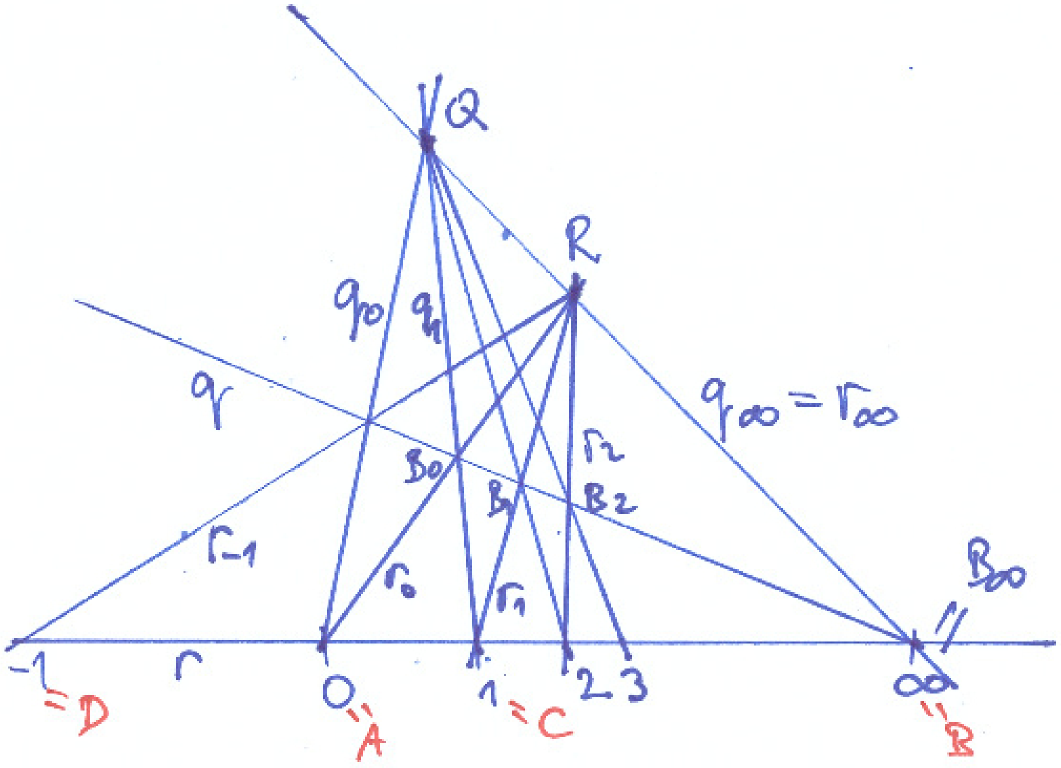
Pak přejdeme k obecné poloze bodů O, D. □

Konstrukce* (4. harmon. přímka)

dány přímky a, b, c protínající se v bodě P ⇒ najít př. d tak, že $(a\,b\,c\,d) = -1$.

Duálně k 4. harm. bodu :

Konstrukce (projektivní škála na přímce): dány A, B, C, číslo $d \neq 0, 1, \infty$ ⇒ najít D: $(ABCD) = d$, ekvivalentně najdeme „jiné zobrazení $\mathbb{R}$ do $\mathbb{RP}^1$": volíme obrazy bodů $0, 1, \infty$ a k nim najdeme obrazy ∀ ost. reálných čísel tak, aby byly zachovány dvojpoměry



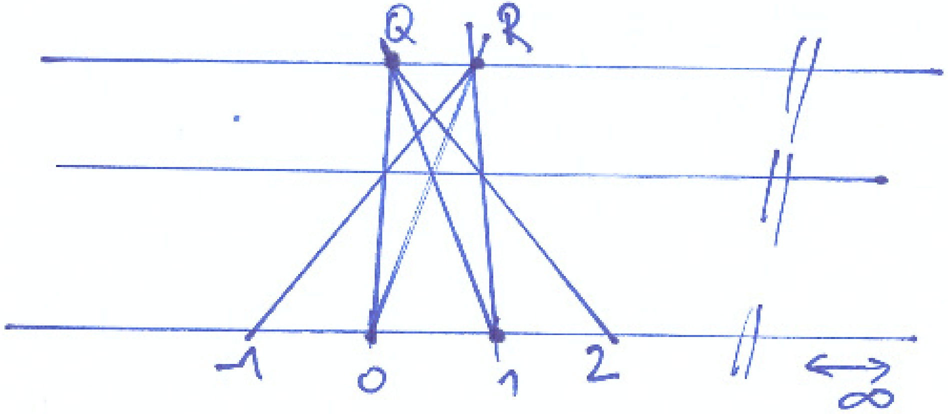
$$\text{chceme } (-1\ 1\ 0\ \infty) \underset{\text{platí vždy}}{=} (\overset{A}{0}\ \overset{B}{\infty}\ \overset{D}{-1}\ \overset{C}{1}) \underset{\text{chci}}{=} -1$$

podobně chceme bod 2, aby

$$(1\ \infty\ 0\ 2) = -1$$

(Pak ještě čísla z Q, R) — vynecháme

Speciální případ:
∞ = nevl. bod



Zde budou shodné vzdálenosti (eukl.)

$|-1\,0| = |0\,1| = |1\,2| = \dots$

$\Rightarrow$ jde o „obyčejnou" = „afinní" přímku

Pozn: duální konstrukce „proj. škály ve svazku" odpovídá záměně označení v pův. konstrukci:

$R \Leftrightarrow r, \quad Q \Leftrightarrow q$

$\infty \Leftrightarrow q_\infty (= r_\infty)$

$0, 1, 2 \Leftrightarrow r_0, r_1, r_2$

Důsledek: pro $\forall A, B, C$, $\forall \lambda \neq 0, 1, \infty$

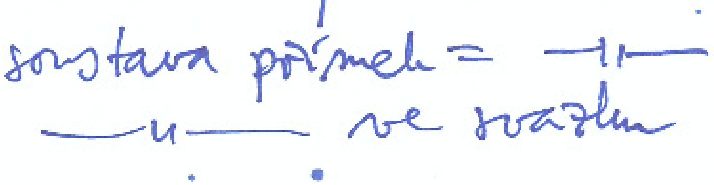
$\exists!\, D$ že $(ABCD) = \lambda$

(a umíme jej zkonstruovat pro $\lambda \in \mathbb{Z}$)

II. Projektivita a perspektivita lineárních soustav

Idea: soustava bodů = „označení bodů na přímce"

soustava přímek =



ve svazku

Def: soustava

- bodová ... body na přímce p(A,B,C)
- přímková ... přímky ve svazku P(a,b,c)

(P = střed svazku)

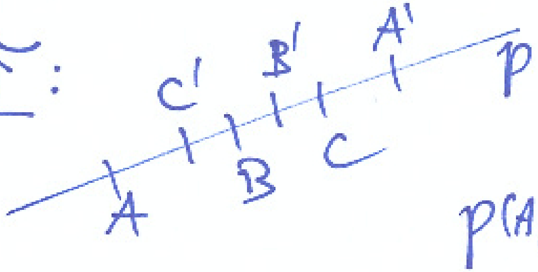
dvě soustavy jsou

- sourodé ≡ obě stejného typu
- nesourodé ≡ jinak

dvě sourodé soustavy jsou

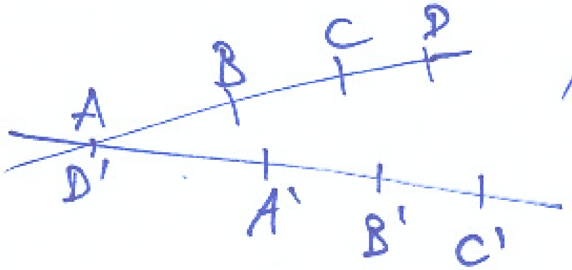
- soumístné ≡ jsou na téže přímce /svazku
- nesoumístné ≡ jinak

Př:



... soumístné bodové

p(A,B,C), p(A',B',C')



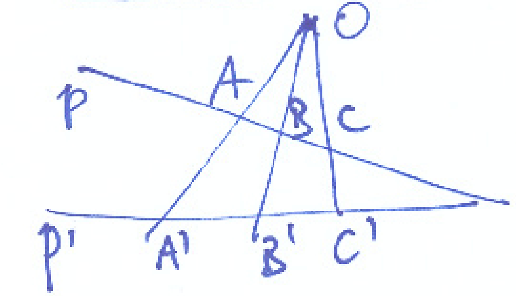
nesoumístné

Nyní chceme definovat pojmy projektivita a perspektivita.
Persp. je spec. případem proj.
Definujeme to 2 cestami:

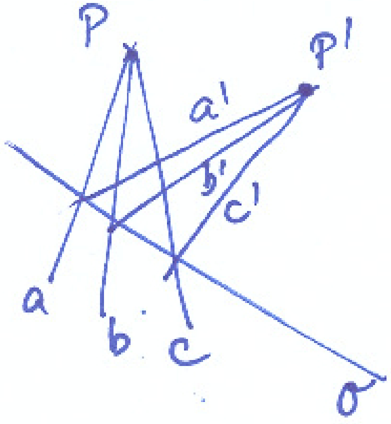
1.cesta od persp. k proj.

Def: perspektivita je zobrazení sourodých nesoumíst. soustav

pro bodové soustavy = promítání z bodu



pro přímkové s. duálně:



$A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, …

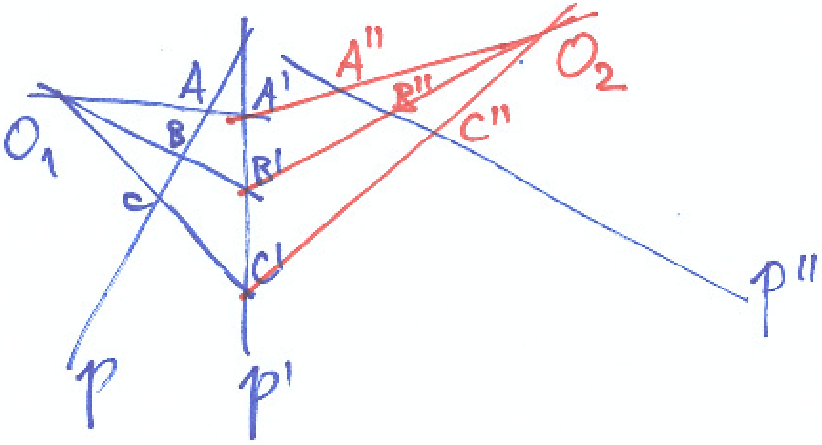
Označení $p(A,B,C) :: p'(A',B',C')$

$P(a,b,c) :: P'(a',b',c')$

dvě dvojtečky … persp. je dána dvěma páry bodů / přímek

$A \mapsto A'$
$B \mapsto B'$

Složení dvou perspektivit obecně není perspektivita



Obecně neex. O_3, z něhož by se promítalo $A \mapsto A''$, $B \mapsto B''$, $C \mapsto C''$

Takové složení se nazývá projektivita.

Přesněji: projektivita je složení kon. počtu perspektivit. Lze dokázat, že se dá vždy realizovat jako složení ≤ 2 persp.

Toto byla syntetická definice.

Lze dokázat, že

$\boxed{\text{projektivita zachovává dvojpoměr 4 bodů}}$

ale to je složitější.

Tzn. $(A'B'C'D') = (ABCD)$.

(2. cesta) od proj. k persp.
čili analytická def.

Def: projektivní souřadný systém (PSS) na přímce $\mathbb{R}P^1$ je trojice bodů $0, 1, \infty$.
Souřadnice bodu X vůči tomuto PSS je $[1:x]$, kde číslo x je $x = (X\,1\,0\,\infty)$.

(Viz konstrukce proj. škály.)

Projektivita je zobrazení

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^1 &\longrightarrow \mathbb{R}P^1 \\ X &\longmapsto X' \\ [x_0:x_1] &\longmapsto [x_0':x_1'] \end{aligned}$$

dané násobením regulární maticí A, určenou až na násobek $\neq 0$,
A je rozm. 2×2:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Pozn: Toto rozebereme podrobněji v PGII, nicméně už teď lze říci, že

$\boxed{\text{projektivita zachovává dvojpoměr 4 bodů}}$

(to bude snadné)

2) Je to dokonce ekvivalence:

projektivity jsou <u>právě</u> ta zobrazení, která zachovávají dvojpoměr.

⇓

3) Proto hrají stejnou roli jako už známá zobrazení:

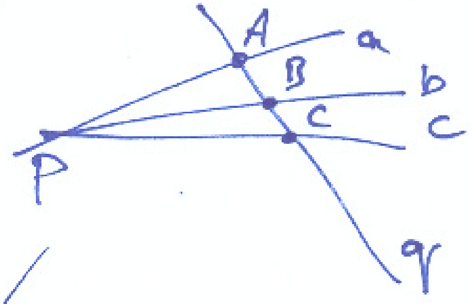
Eukl. ⟶ Afinní ⟶ Proj. geom.

grupa:	shodnosti	afinity	projektivity
zachovává:	vzdál. (+úhel) 2b	děl. poměr 3b	dvojpoměr 4b

zobrazení tvoří tzv. pohybovou grupu

4) Této anal. definici projektivity odpovídají ∀ syntetické verze pro sourodé i nesourodé soumístné i nesoumístné soustavy

5) Tedy to zahrnuje ∀ projektivity z 1. cesty + nesourodé případy:



↙

Ozn: $P(a,b,c) ::: q(A,B,C)$

<u>3 dvojtečky</u> ... ∀ proj. je dána <u>třemi</u> páry bodů

Proč? $0, 1, \infty \longmapsto 0', 1', \infty'$

dán $X \longmapsto X' = ?$

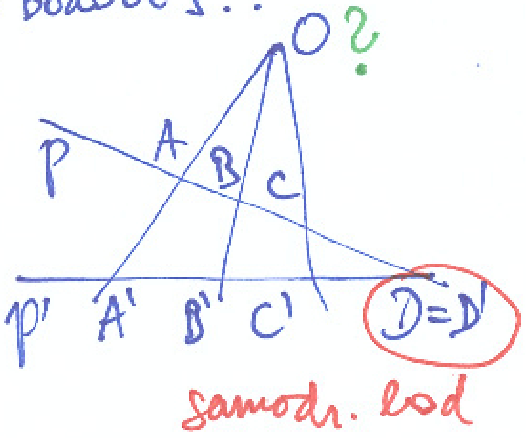
X' je jednozn. určen díky

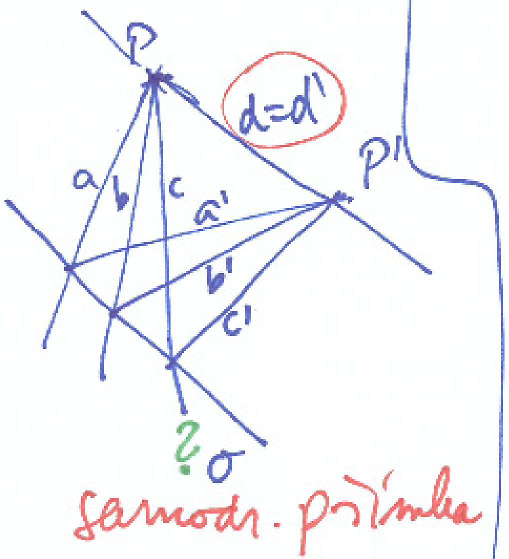
$$(X\,1\,0\,\infty) = (X'\,1'\,0'\,\infty')$$

Dále z projektivity definujeme perspektivitu:

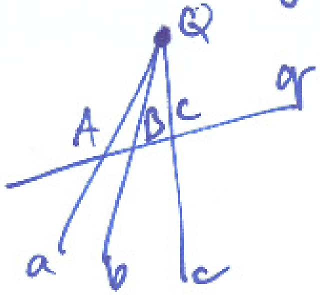
Def: Perspektivita (nesoumístných sourodých) soustav je projektivita, která má samodružný element.

Pro bodové s.:





Def: Perspektivita nesourodých soustav je projektivita, kdy jedna soustava je průmětem/ /průsekem té druhé.



Př: v „projektivní štafle":

$r(0,1,2) :: R(r_0,r_1,r_2) :: q(B_0,B_1,B_2) ::$

$:: Q(q_1,q_2,q_3) :: r(1,2,3)$

$\Rightarrow r(0,1,2) ::: q(B_0,B_1,B_2)$

(složení persp. je obecně proj.!)

ale je tam samodr. bod $B_{00} = \infty \Rightarrow$ jde o persp.

$r(0,1,2) :: q(B_0,B_1,B_2)$

atd.

Pozn: v def. vlevo nemáme (zatím) zaručenu existenci O resp. σ.

A proto ...

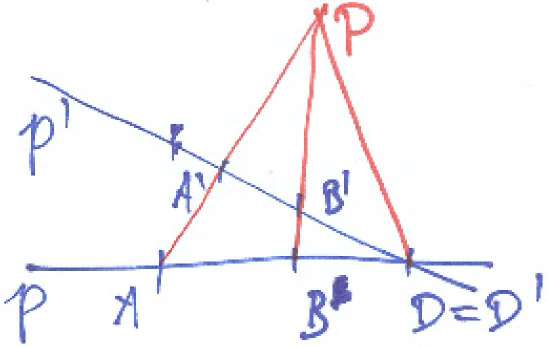
Věta: $\Pi, \Pi' \ldots$ 2 sourodé nesoumístné soustavy.

Pak $\Pi :: \Pi' \Leftrightarrow$ obě jsou perspektivní s touž nesourodou soustavou.

Dk: pro bodové soustavy Π, Π':

$p(A,B,C) :: p'(A',B',C') \Longleftrightarrow$
(tj. ex. samodr. bod)

$\Leftrightarrow$ ex. soustava $P(a,b,c)$ persp. s oběma



⓵ $\Rightarrow$ proj. je dána 3 páry bodů, např. $p(A,B,D) ::: p(A',B',D')$
přitom ~~za~~ předp. $D=D'$,
pak položíme $P = AA' \cap BB'$
a automaticky pak $PD = PD'$;
označme $a = PA = PA'$
$b = PB = PB'$
$d = PD = PD'$
$\Rightarrow P(a,b,d)$ je hledaná nesourodá soustava

$\Leftarrow$ Známe-li již $P(a,b,d)$, pak jde o promítání a tedy persp., přičemž sam. bod $D=D' \in p \cap p'$.

Pro přímkové soust. – z duality. $\square$

Názvosloví: P = bod perspektivity (= střed promítání)
p = přímka perspektivity