Proj. geom 21.10.2020

Synteticky:

projektivita = zobrazení (2 bodových soustav)

$$p(A,B,C) \longrightarrow p'(A',B',C')$$

dané 3 body a jejich obrazy

$A \mapsto A'$, ...

zachovávající dvojpoměr;

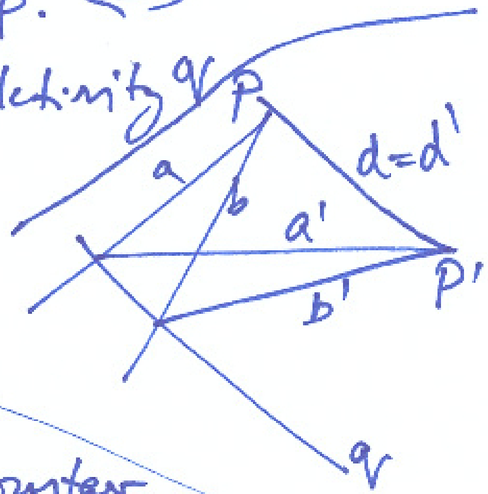
jedná se zároveň o složení perspektivit

perspektivita = spec. případ projektivity: má samodr. bod

Věta: proj. je persp. $\Leftrightarrow$ $\exists$ střed perspektivity Q (= střed promítání)

Duálně: proj. přímk. soustav

Věta*: proj. $\swarrow$ je persp. $\Leftrightarrow$ $\exists$ přímka perspektivity q



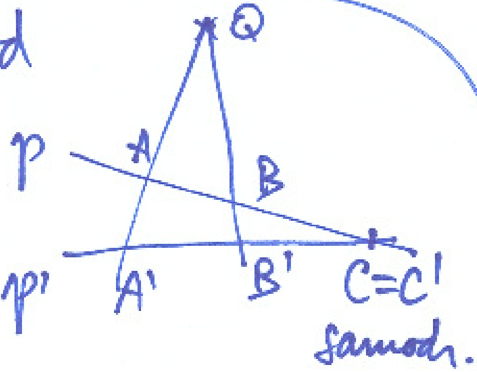
Doplňování soustav

1) Doplňování perspektivit:

= úloha $\Pi :: \Pi'$

$A, B \mapsto A', B'$

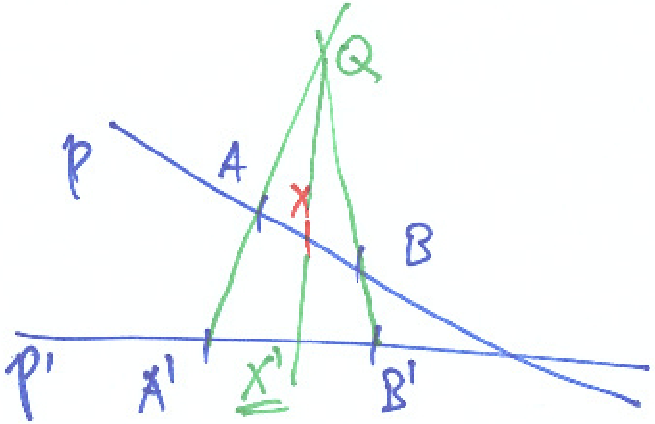
$X \mapsto X' = ?$



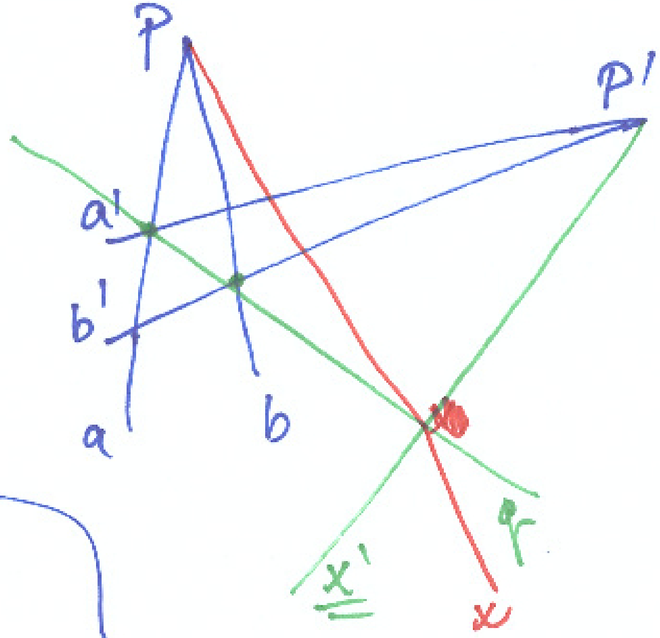
Je dána perspektivita (páry $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$), k bodu X se má nalézt jeho obraz X'.

(resp. k př. $x \mapsto x'$)

bodová:



přímková:



Doplňování projektivit

je složitější

úloha $\Pi ::: \Pi'$

$A, B, C \longmapsto A', B', C'$

$X \longmapsto X' = ?$

Věta o direkční přímce (+Def.): nechť

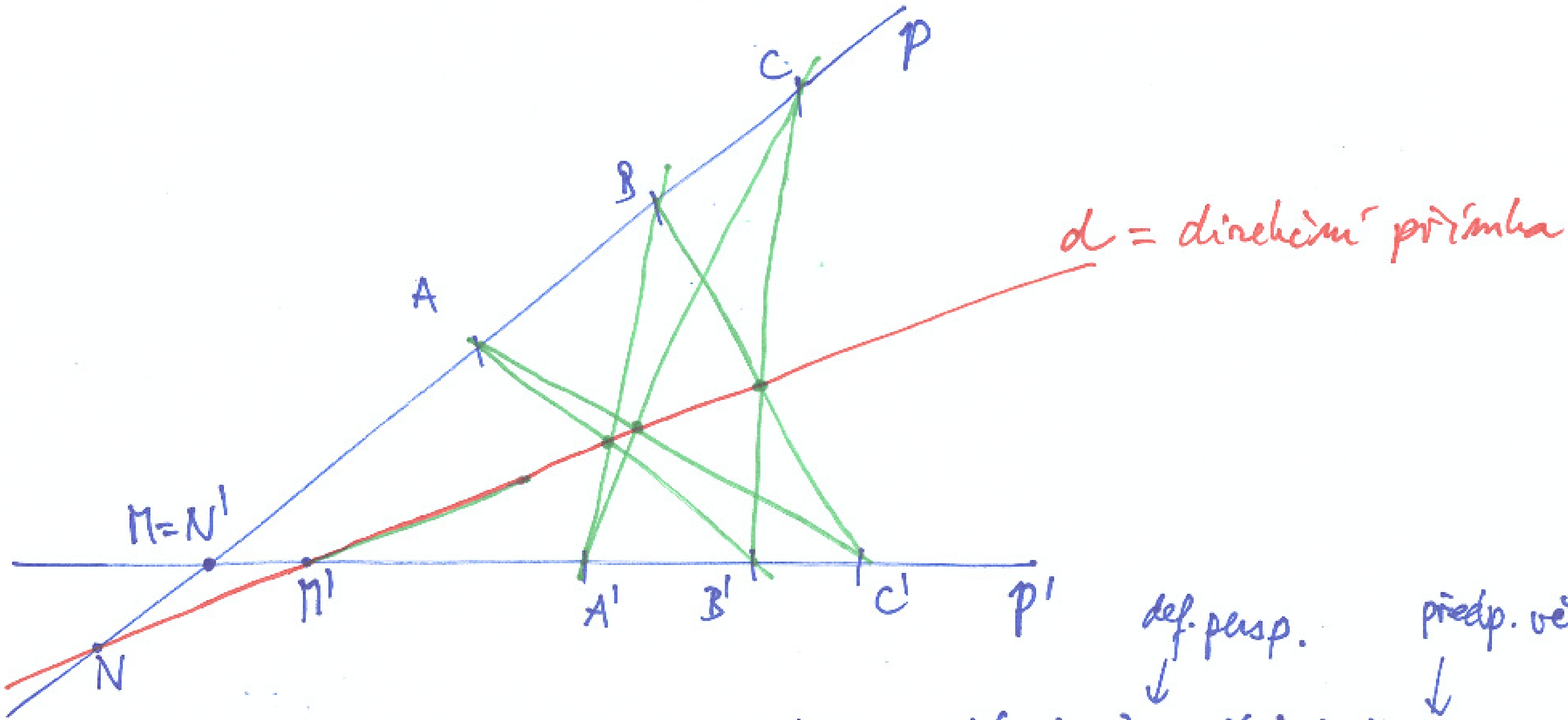
$p(A,B,C) ::: p'(A',B',C')$ je proj. nesoum. s.

Pak průsečíky spojnic AB' a $A'B$

AC' a $A'C$

BC' a $B'C$

leží na jedné přímce d → tzv. direkční přímka projektivity.



<u>Dk</u>: Zvolme pár bodů A, A',

označme $a = AA' = a' = A'A$

$b = AB'$ $\quad b' = A'B$

$c = AC'$ $\quad c' = A'C$

Víme: $A(a,b,c) \overset{\text{def. persp.}}{::} p'(A',B',C') \overset{\text{předp. věty}}{:::} p(A,B,C) ::$

$:: A'(a',b',c')$

$\Rightarrow$ jejich složení $A(a,b,c) ::: A'(a',b',c')$

tato proj. má samodr. přímku $a = a'$

$\Rightarrow$ je to <u>perspektivita</u> $\Rightarrow \exists$ přímka

perspektivity ... to je ona ... d

%.

A proto se a na d protínají odpovídající si přímky

tj. $b = AB'$, $b' = A'B$

$c = AC'$, $c' = A'C$

($a = a'$ … nelze mluvit o průsečíku)

Potřebujeme ukázat ještě, že:

- také BC' a $B'C$ se protínají na D
- poloha d <u>nezávisí</u> na volbě bodů A, A'.

Obojí plyne z následující úvahy:

označme průsečík p a p' jako $M = N'$.

Pak $N \in d \cap p$, $M' = d \cap p'$

Proč? $N \in p$ – zřejmé

$N \in d$ protože průsečík přímek $n = AN' = p$ a $n' = A'N$ $\Big\}$ leží na d

ale tento průsečík je N, protože to je jediný bod přímky $A'N$ ležící na p.

($M \in d \cap p'$ – analogicky)

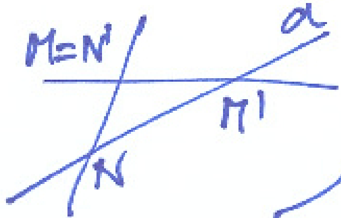
Proto $d = M'N$ závisí jen na dané projektivitě (a ne na volbě A, A'). Proto lze body A, A' nahradit třeba B, B'

$\Rightarrow$ i BC', $B'C$ se protínají na d.

$\square$

Důsledky:

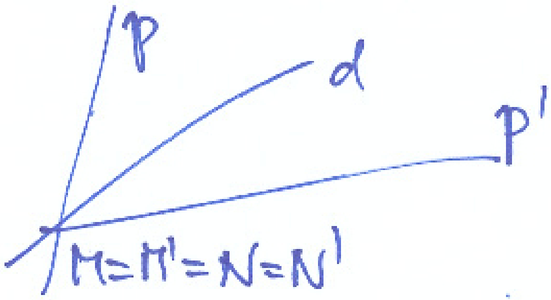
① $d = M'N$, tj.

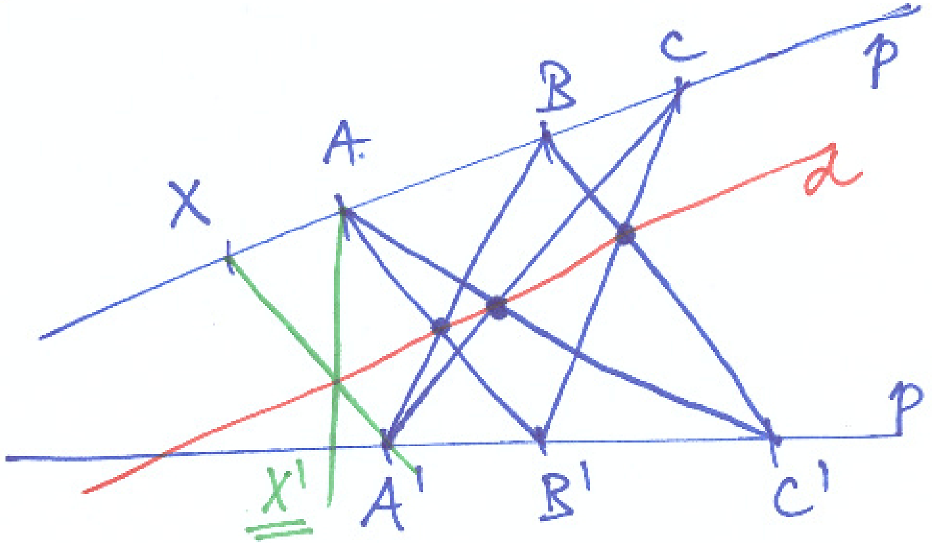


dir. přímka je spojnice obrazů průsečíků přímek p a p'

② jedná se o perspektivitu $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ direkční př. prochází průsečíkem p a p' ($M=M'=N=N'$)





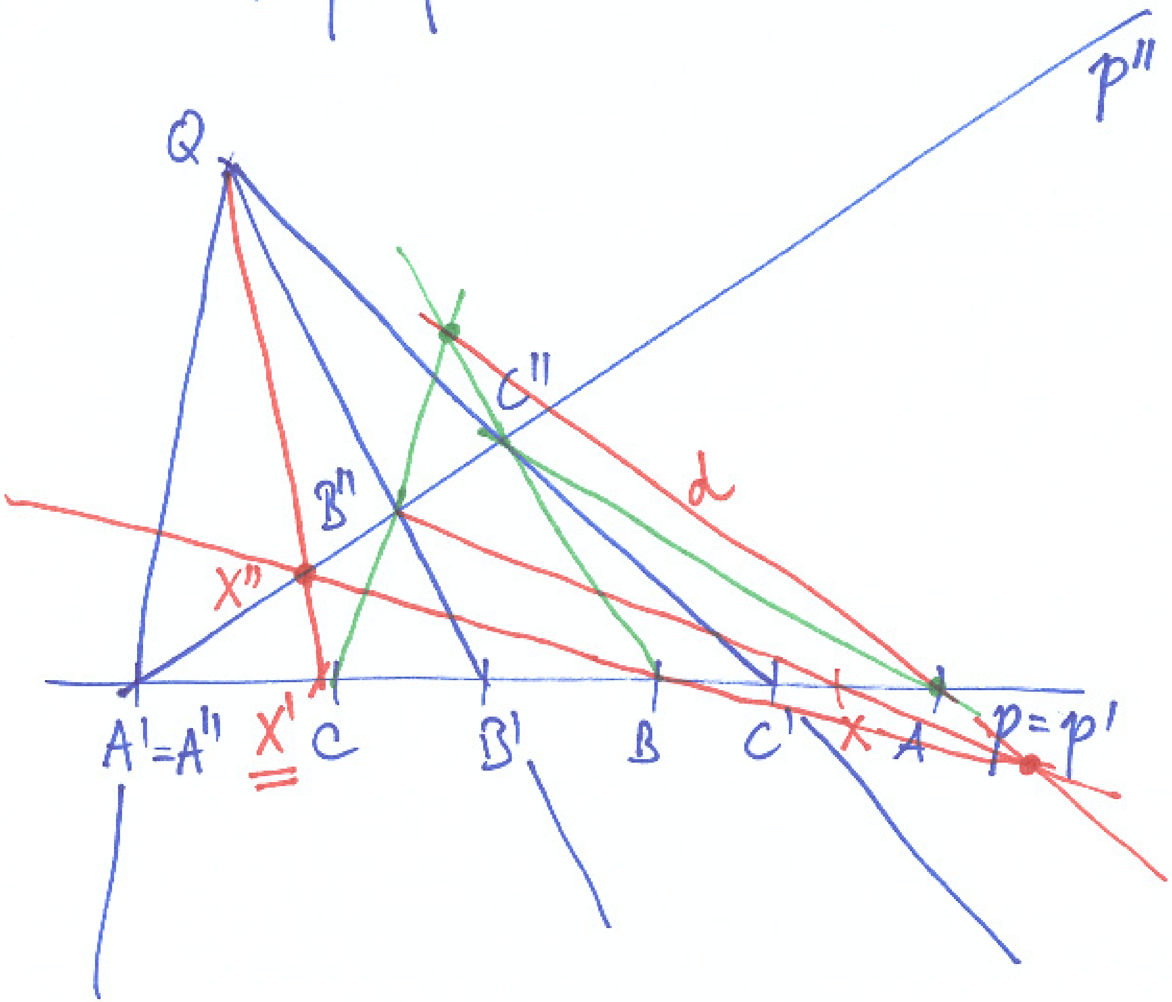
Konstrukce: doplňování projektivity nesoumístných bodových soustav

1) najdeme dir. přímku (stačí 2 páry)

2) křížením přes d najdeme k X bod X'

Konstrukce: doplňování proj. soumístných bod. soustav

$\hookrightarrow p = p'$



1) Zvolíme libov. přímku p'' (pro zjednodušení bude procházet bodem A') a lib. bod $Q \notin p''$, $Q \notin p$

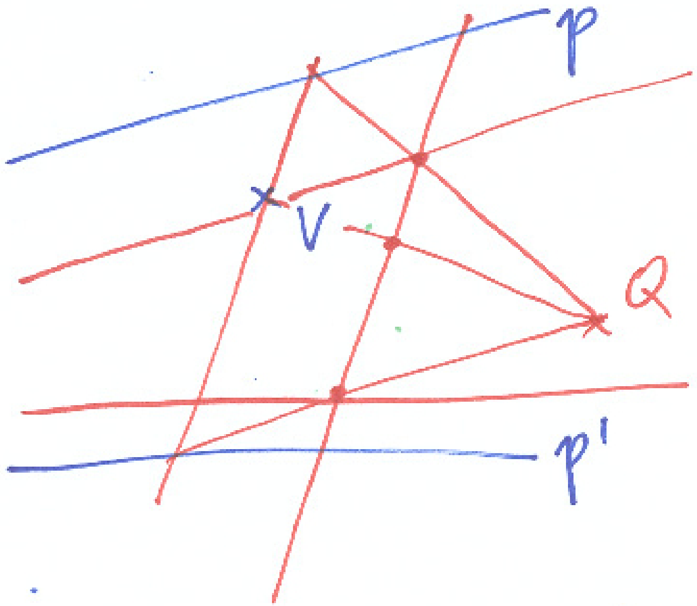
2) z bodu Q promítneme $p'(A', B', C')$ na $p''(A'', B'', C'')$ (zachovány dvojpoměry!)

3) provedeme předch. konstr. (= najdeme dir. př.) pro $p(A, B, C) ::: p''(A'', B'', C'')$

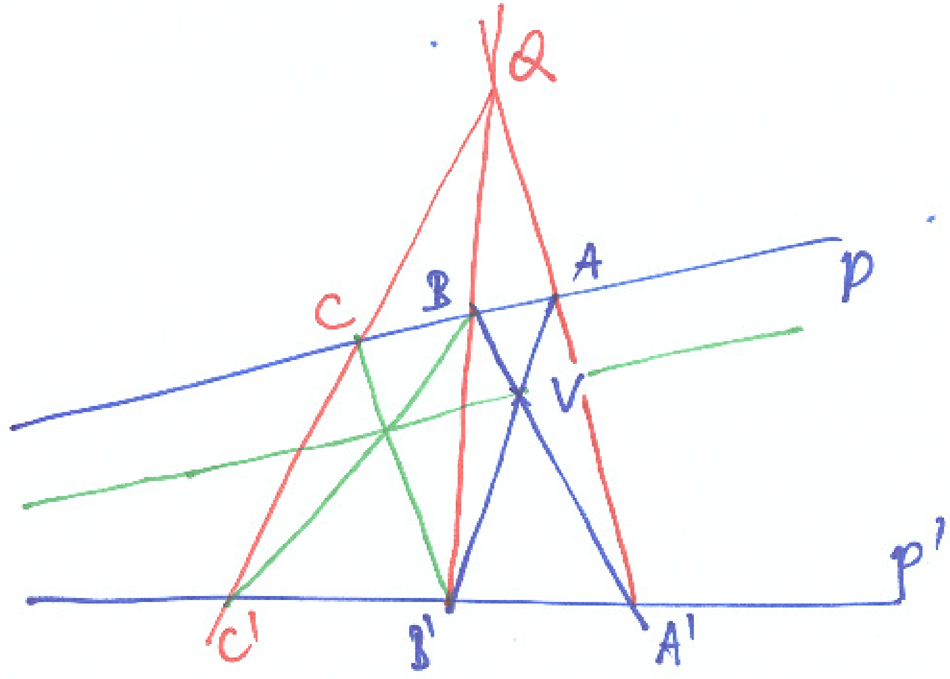
[Pozn.: $A \in d$ díky tomu, že $A' \in p''$]

4) vše nakonec promítneme a bod X'' z Q: $X'' \longmapsto X'$.

Konstrukce: spojení bodu V s nepřístupným průsečíkem dvou přímek p, p'.



OK, ale chceme řešení bez rovnoběžnosti



Podle Důsl. ② : d prochází průsečíkem $p \cap p'$ $\Leftrightarrow$ je to perspektivita $\Rightarrow$

1) vedeme lib. AB', $A'B$ bodem V; $A, B \in p$, $A', B' \in p'$

2) Q = střed persp.

3) C, C' = další pár této persp.

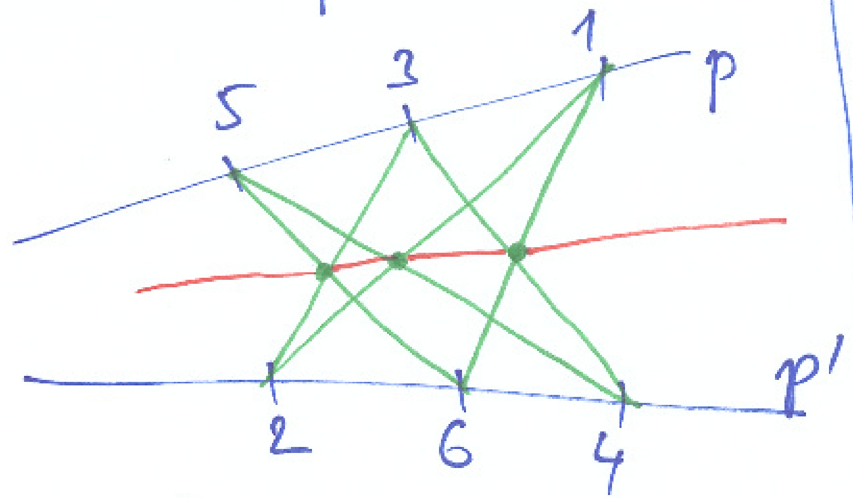
4) křížením $BC' \cap B'C$ najdeme 2. bod d

Pappova věta o šestiúhelníku

(Pappos z Alexandrie): nechť 6-úhelník má vrcholy $1 \dots 6$, přičemž $1,3,5 \in p$
$2,4,6 \in p'$,

pak průsečíky
12 a 45
23 a 56
34 a 61

leží na 1 přímce.



Dk: reformulace V. o dir. přímce.

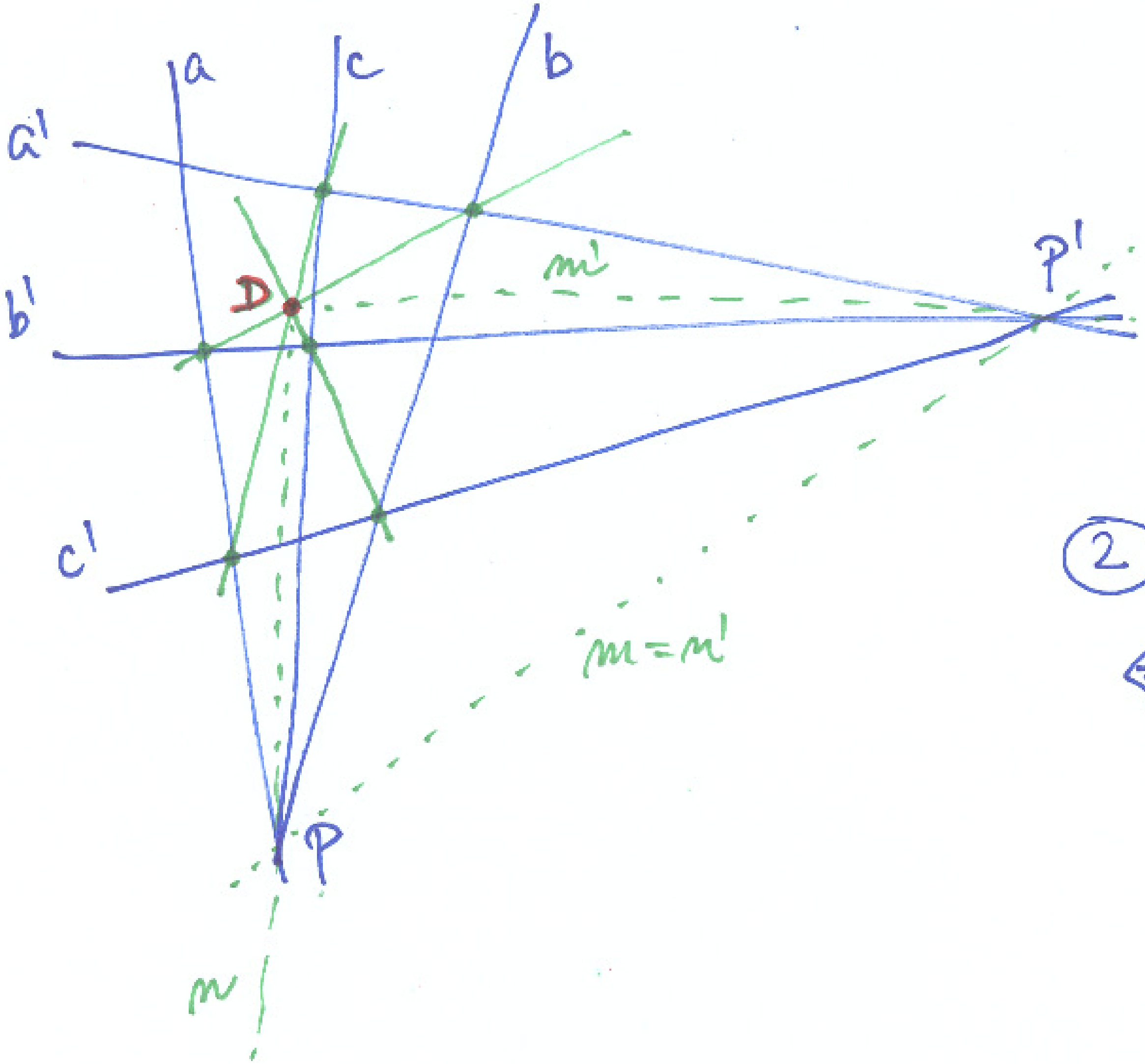
Vše duálně:

Věta o direkčním bodu (+Def.):

Nechť $P(a,b,c) ::: P'(a',b',c')$ je projektivita nesoum. přímk. soustav. Pak spojnice průsečíků

$a \cap b'$, $a' \cap b$;
$a \cap c'$, $a' \cap c$;
$b \cap c'$, $b' \cap c$

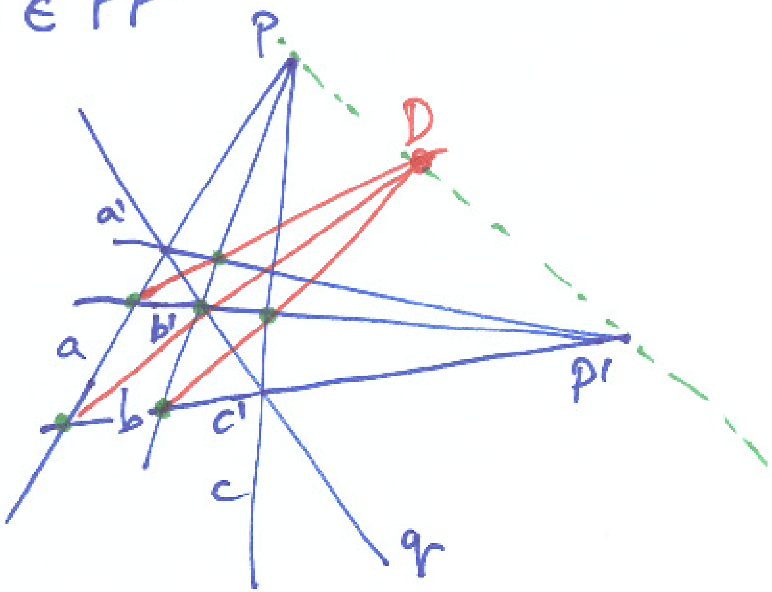
procházejí jediným bodem D, tzv. **direkčním bodem projektivity**.



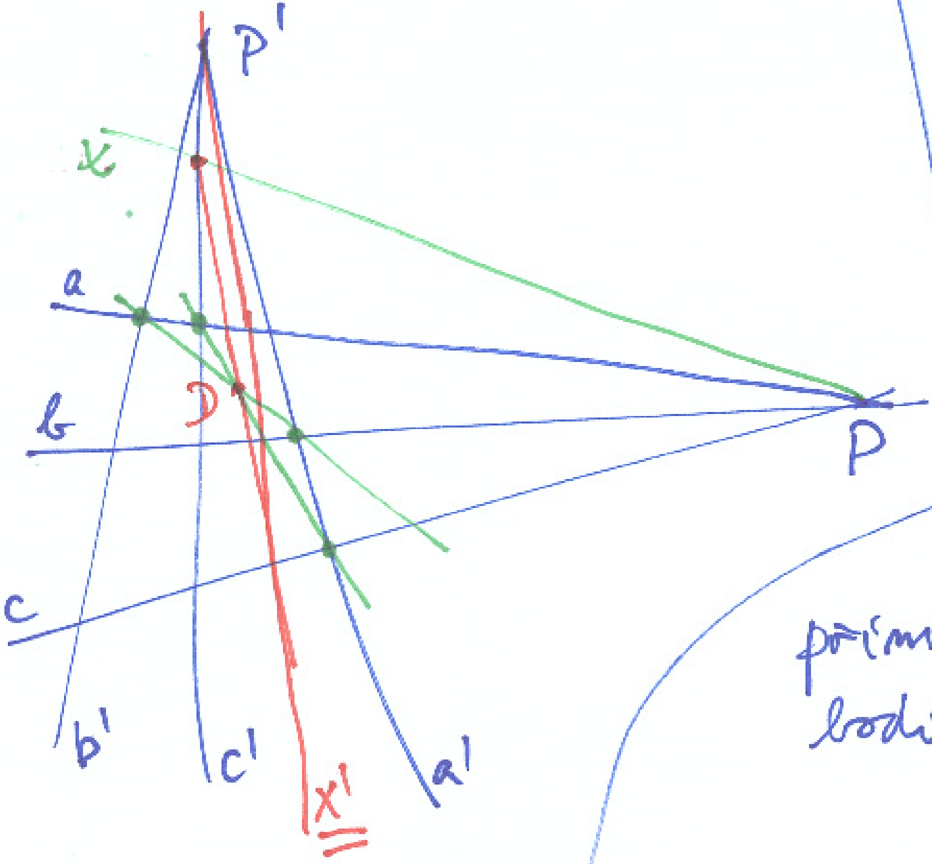
Důsledky:

(1) dir. bod je průsečík přímek m' a m, což jsou obrazy přímky $m = m' = PP'$; přitom $m = PD$, $m' = P'D$

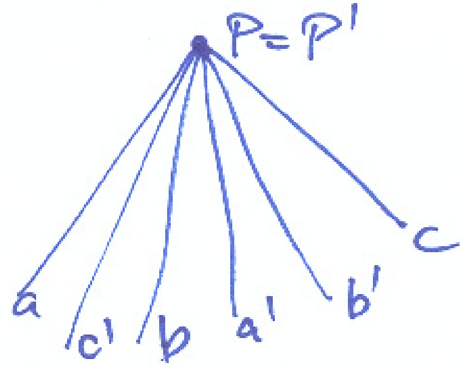
(2) jde o perspektivitu $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow D \in PP'$



Konstrukce*: doplňování proj. nesoum. přímk. soustav:



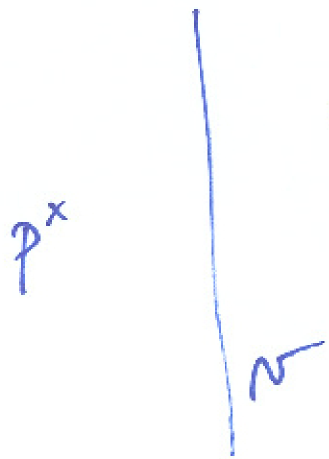
Konstrukce*: doplňování proj. soumíst. přímk. soustav



→ DÚ – sami

Konstrukce*: určit průsečík přímky v s nenarýsovanou spojnicí bodů P, P'.

DÚ (bonus)



Duální Pappova věta

o šestiúhelníku:

strany 6-úhelníka : 1...6

1, 3, 5 proch. bodem P

2, 4, 6 —— " —— P'

pak spojnice průsečíků

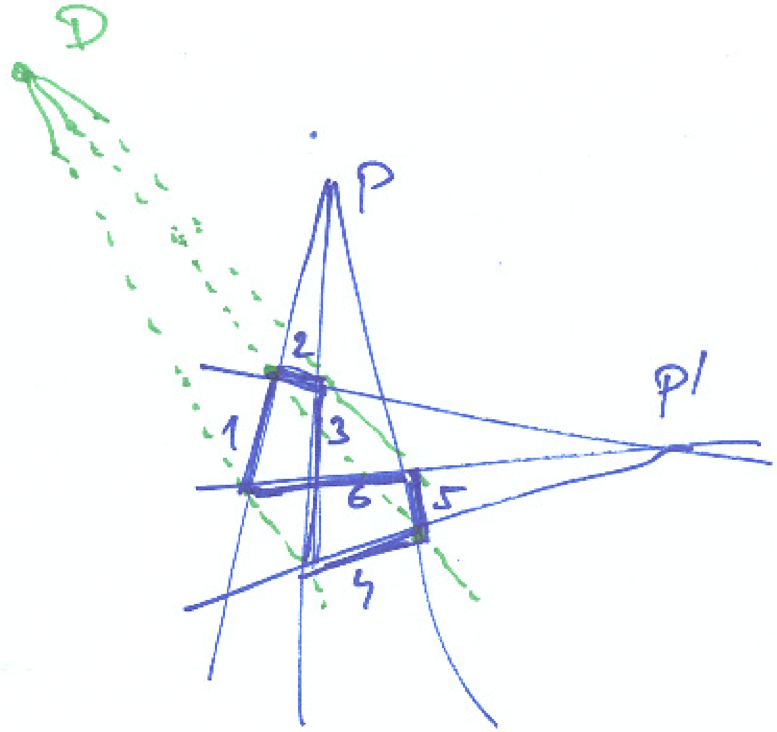
1,2 a 4,5

2,3 a 5,6

3,4 a 6,1

procházejí jedním bodem (D)

(Opět je to reformulace věty o dir. bodu.)



Příště : za 14 dní

Úkol k odevzdání : 31.10.

každý 3 konstrukce z dneška v GeoGebře