

Proj. geom. 4.11.2020

Samodružné elementy

Uvažujeme projektivitu
soumístných soustav

$$P(A, B, C) :: P(A', B', C')$$

$$P(a, b, c) :: P(a', b', c')$$

Def: Je-li v této projektivitě
nejaký element X rovný
svému obrazu X' , nazývá
se samodružným.

Často je značíme S, T (s, t)

$$\begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ \hline \underline{\underline{S=S'}} & A & A' & \underline{\underline{T=T'}} \end{array}$$

Věta: Neidentická projektivita
má nejvýše dva reálné
samodr. elementy, přesněji:

$$\begin{cases} 2 & \Leftrightarrow 2 \text{ reálné různé} \\ 1 & \Leftrightarrow 1 \text{ reálný "dvojnásobný"} \\ 0 & \Leftrightarrow 2 \text{ komplexně sdružené} \end{cases}$$

(připustíme-li body
s kompl. souř.)

Důkaz - ať v PG II.

Pr: $x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\begin{array}{ccc} | & | & | \\ \hline -1 & & 1 \\ \hline \end{array}$$

2 sam. body
reálné

$$\begin{array}{cccc} x \mapsto x+1 & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

\rightarrow
 $+1 \ +1 \ +1$

1 sam. bod
 $= \infty$



($\varphi \neq k\pi$)
0 reálných
sam. přímek

Pozn: 3 samodr. body, $A=A', B=B', C=C'$
 \Rightarrow nutně to je identita

Věta + Def: jsou-li $S \neq T$
 samodr. body (tj. $S=S', T=T'$)
 nějaké projektivity,
 pak hodnota dvojpoměru
 $w := (XX'ST)$ nezávisť
 na volbě bodu $X (\neq S, T)$.
 Číslo $w = \underline{\text{charakteristika}}$
 $\underline{\text{projektivity}}$.

Dk: opět v PG II

Pozn: díky $X \neq S, T$ jsou X, X', S, T
 4 různé body $\Rightarrow w \neq 0, 1, \infty$.

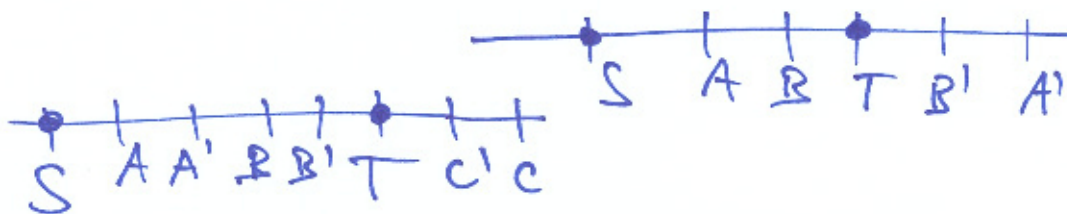
Pozn: jsou-li $S \neq T$ reálné samodr. body,
 projektivity $p(A, B, C) :: p(A', B', C')$,
 pak platí:

$w \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ body X, X' leží $\begin{cases} \text{v téže části} \\ \text{v opačných částech} \end{cases}$

přímky p různé body S, T .

$w > 0$

$w < 0$



Důkaz: máme, že $(ABCD) > 0$

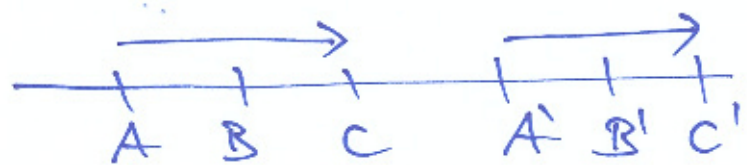
$\Leftrightarrow A, B$ leží v téže části
 různé C, D

Těž existují pojmy
(pro projektivitu soum. soustav):

soustavy jsou souhlasné:

$A, B, C; A', B', C'$

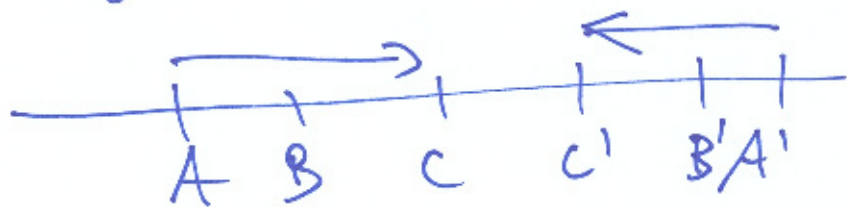
jdou ve stejném směru



— " — nesouhlasné:

$A, B, C; A', B', C'$

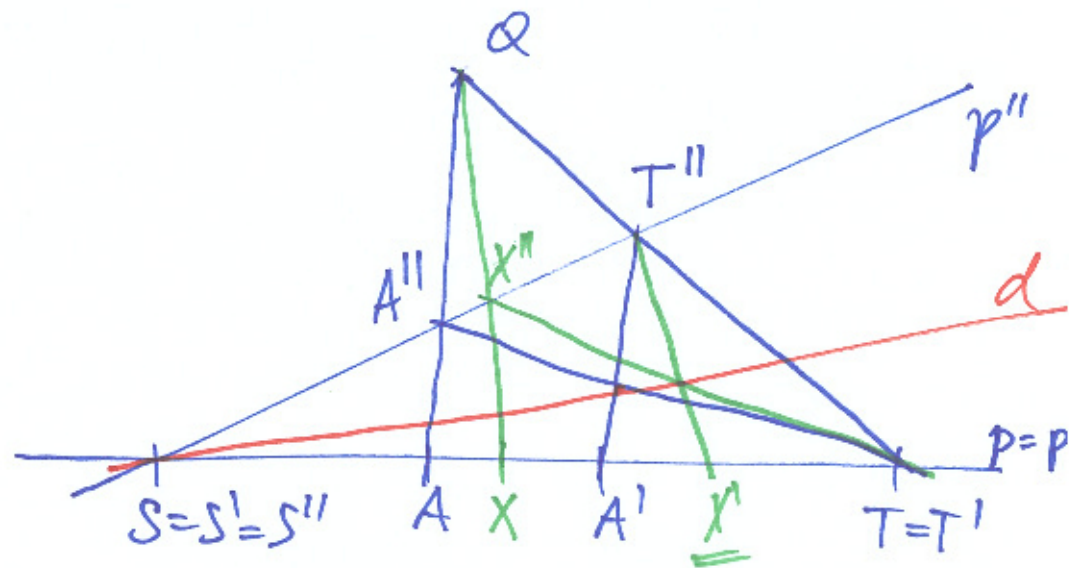
jdou v opačném směru



Vidíme: $ns > 0 \Leftrightarrow$ souhlasné
 $ns < 0 \Leftrightarrow$ nesouhlasné

31

Konstrukce: doplňováním projektivity
soum. soustav dané 2 samodr.
body ($S=S', T=T'$) a 1 párem A, A' .



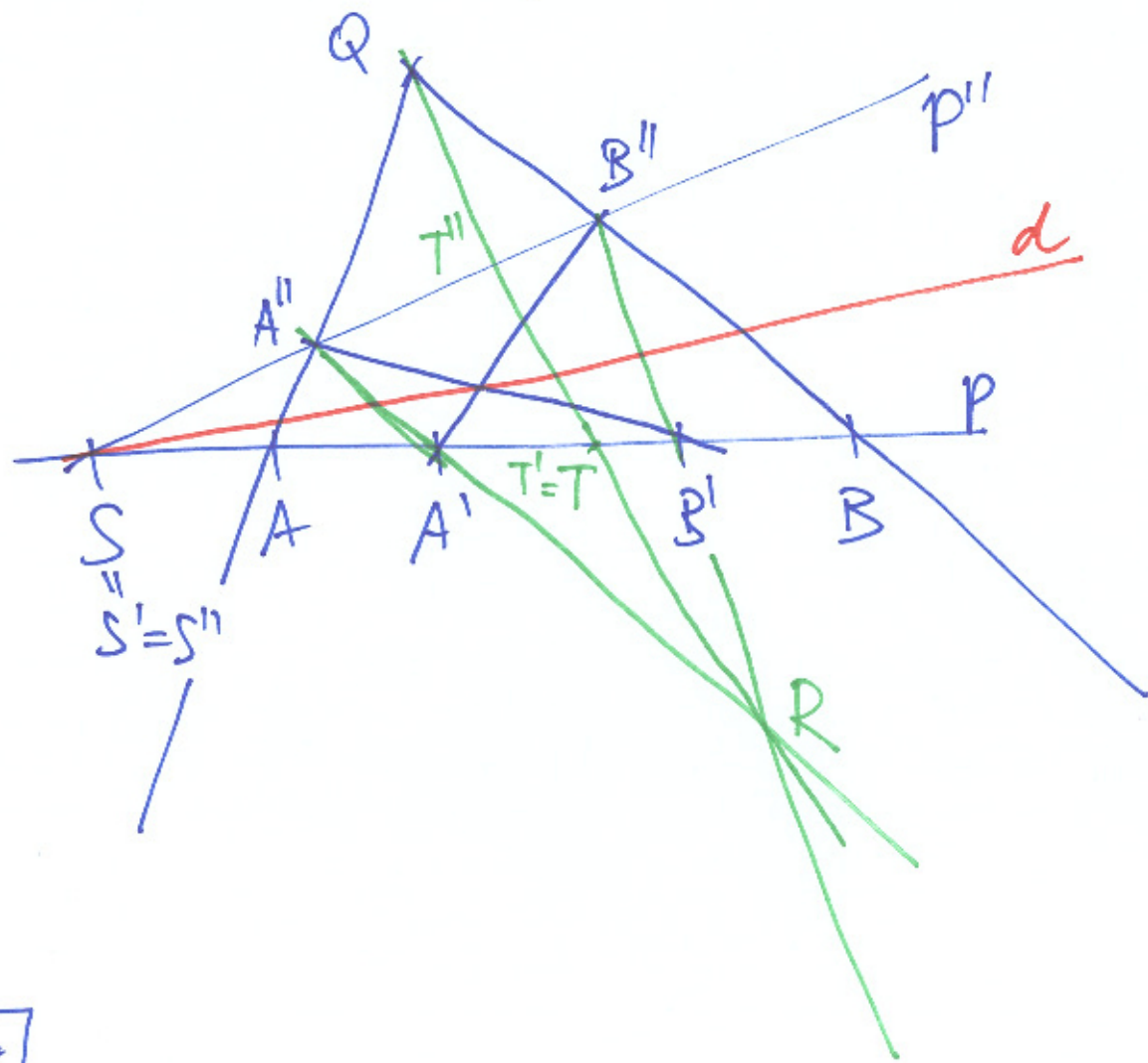
! $S \in d$ (Díky silkové volbě $S \in p''$)

Pozn: $p''(A'', S'', T'') :: p(A', S', T')$

mať samodr. bod ($S'=S''$)

\Rightarrow je to perspektivita $\Rightarrow \exists$ střed
perspektivity $R = T'T'' \cap A'A''$
 \Rightarrow vše by doplňovat projekcí z R

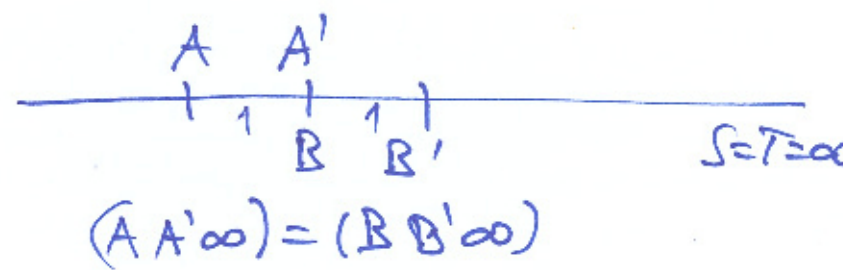
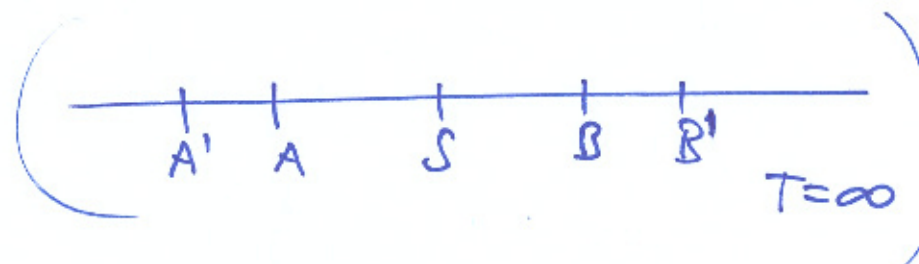
Konstrukce: Najít druhý
samodr. bod (T) projektivity
dané 1 sam. bodem (S)
a 2 páry A, A' ; B, B' .



Řešení: $T = QR \cap p$
je hledaný samodr. bod

Druhá konstrukce k oběma
- samostudium

Pozn: $S = T \Leftrightarrow$



Je to "vácný" případ.

Pozn: Zátím nemůžeme
 sestavit 2 samodr. body
 (při zadání proj. 3 páry bodů).

Involuce

Věta + Def: Uvažujme neidentickou
 projektivitu soum. soustav se
 samodr. body $S \neq T$. Pak NÁPOJE:

- ① $w = -1$
- ② $\forall X: (XX'ST) = -1$
- ③ $\exists X \neq S, T: X'' = (X')' = X$
- ④ $\forall X \neq S, T: X'' = X$

Takováto projektivita se
 nazývá involuce.

Olečně v matem.: ~~info~~
 involuce je zobrazení $f: A \rightarrow A$
 splňující $f \circ f = \text{id}$
 tj. $\forall a \in A: f(f(a)) = a$

- Př:
- osová souměrnost
 - středová — " —
 - $x \mapsto \frac{1}{x}$

Dk: ① \Leftrightarrow ② z definice w

① \Rightarrow ④ předp. $w = -1 = (XX'ST)$
 (pro $\forall X$); zároveň máme, že

$(X'XST) = \frac{1}{w} = -1$

přitom X', X'' je také pár této
 proj. \Rightarrow $(X'X''ST) = -1$

Nakonec: ke 3 bodům a zadane
 hodnotě dvojp. $\exists!$ bod $\Rightarrow X = X''$

④ \Rightarrow ③ je triviální

③ \Rightarrow ① předp. že $\exists X$ takové,
že $X'' = X$

pak $w = (XX'ST) = (X'X''S'T') =$

projektivita zachovává
dvojpoměr

$= (X'X''ST) = (X'XST) =$
 \uparrow \uparrow \uparrow
 S, T samodr. $X'' = X$ w máme

$= \frac{1}{(XX'ST)} = \frac{1}{w} \Rightarrow w^2 = 1$

\Rightarrow $w = 1$ a to nemůže nastat
protože X, X', S, T různé
 $w = -1$ jediná možnost \square

Def: Mějme involuci se samodr.
body $S \neq T$. jsou-li body

S, T $\left\langle \begin{array}{l} \text{reálné různé} \\ \text{komp. sdružené} \end{array} \right\rangle$

involuce se nazývá $\left\langle \begin{array}{l} \text{hyperbolická} \\ \text{eliptická} \end{array} \right\rangle$

Pozn: případ $S = T$ (dvojnásobný
reálný) spolu s podmínkou
 $w = -1$ vede na degenerované
zobrazení, které \nexists body zobrazí
do 1 bodu (do $S = T$). Nemí
to tedy projektitiva a tudíž
ani involuce, přesto se
nazývá parabolická involuce
(Více bude v PG II.)

Pozn: hyperb. involuce je tvořena
nesouhlasnými soustavami:

S, T reálné, $w = -1 < 0$
 \Rightarrow nesouhlasné

eliptická inv. je tvořena
souhlasnými soustavami
(viz viz PG II)

Pozn: n involuce mají $\frac{n}{2}$ páry
elementů vlastnost:

$$X \mapsto X', X' \mapsto X$$

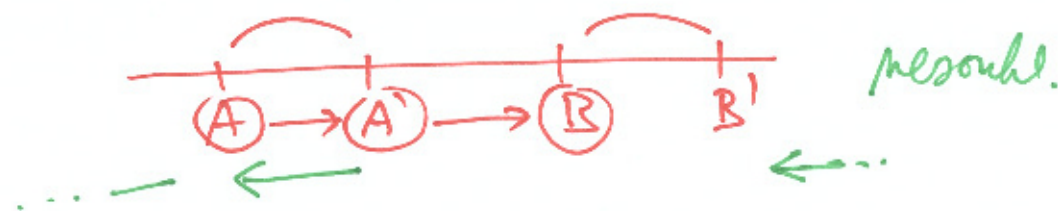
... říkáme jim páry involuce

\Rightarrow involuce je zadána
dvěma páry involuce

77

Pozn: 4 body tedy zadávají

3 involuce:

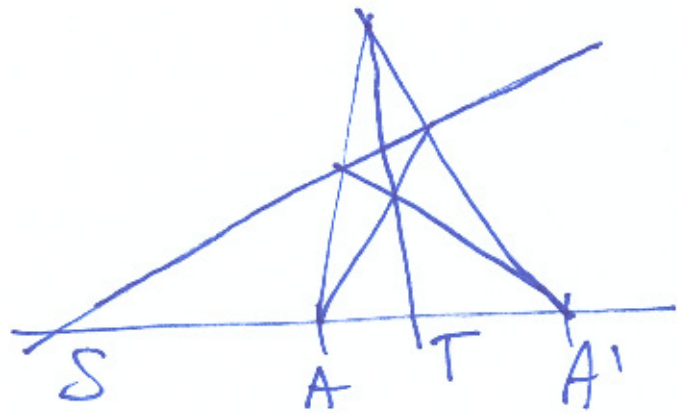


Konstrukce: určit druhý samodr.
bod (T) involuce zadané

1 samod. bodem (S) a 1 párem
involuce (A, A') .

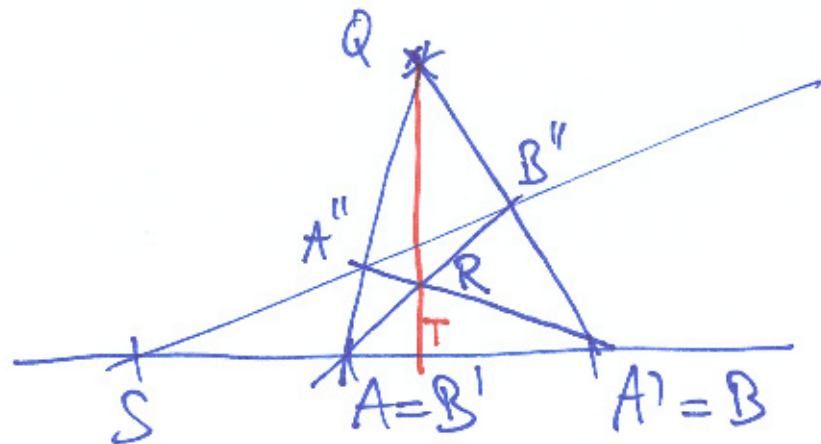


1. řešení: ~~pro~~ $T = 4.$ harm. bod



Díky tomu, že σ je involuce
musí platit $(AA'ST) = -1$.

2. řešení: pomocí předchozí
konstrukce hledání 2. sam. bodu



Dualní konstrukce -
-samostudium.