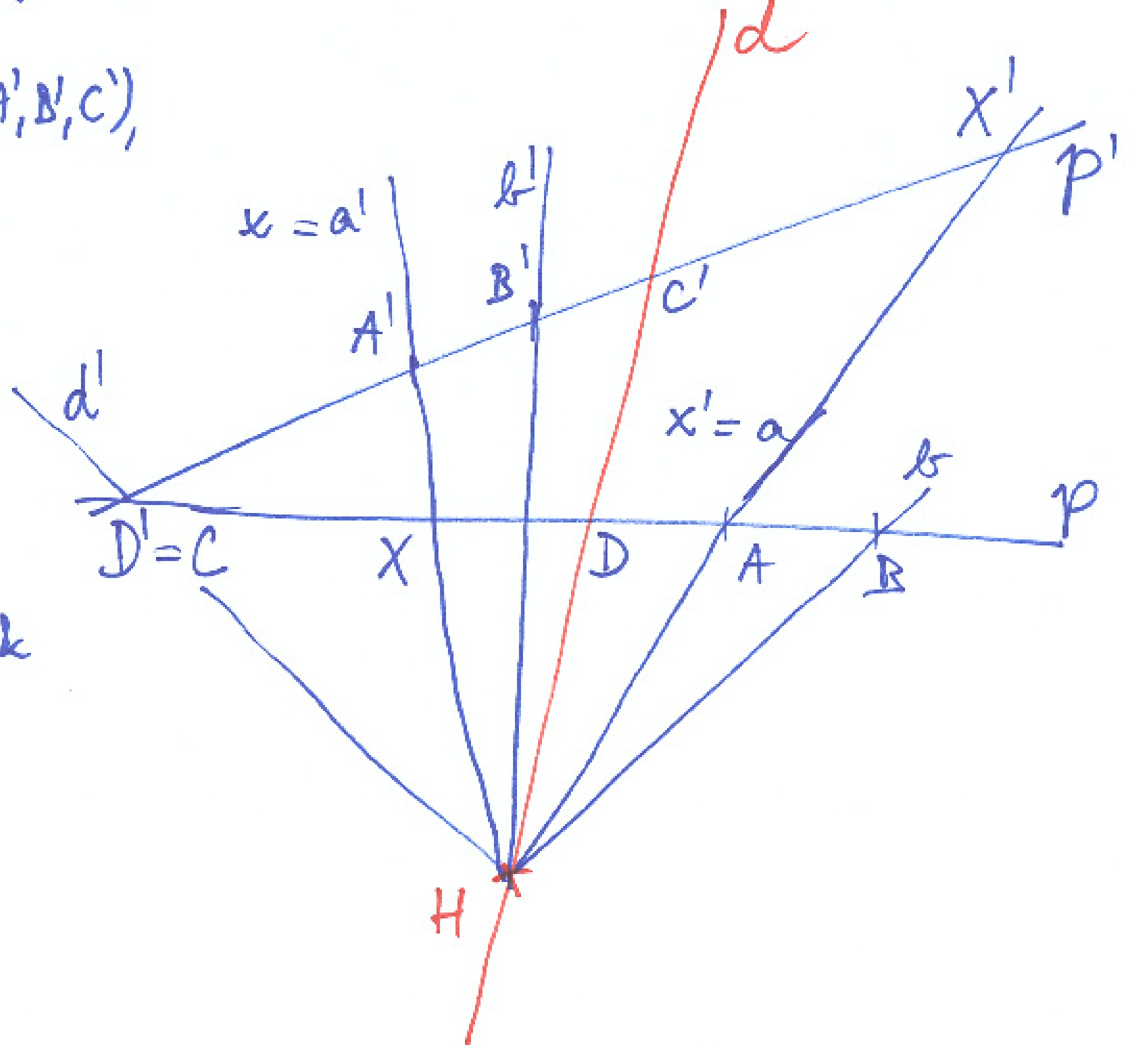
Proj. geometrie, 11.11.2020

<u>Věta</u> (o bodu na direkční přímce):

Mějme projektivitu $p(A,B,C) ::: p'(A',B',C')$, $H \in d$ libovolný bod na její direkční přímce. Pak páry přímek $a = HA$, $a' = HA'$; $b = HB$, $b' = HB'$ atd. jsou páry téže involuce přímek ve svazku se středem H, tj.

$H(a,b,c) ::: H(a',b',c')$

je involuce.



Dk: 1) $H(a,b,c) :: p(A,B,C) ::: p'(A',B',C') :: H(a',b',c')$

$\Rightarrow$ též $H(a,b,c) ::: H(a',b',c')$ je proj.

2) tato proj. je involuce protože:

označíme-li $X = p \cap A'H$, musí být

$X' = HA \cap p'$ (protože $A'X$, AX' se protínají na d, v bodě H);

proto $a' = A'H = XH = x$

$a = AH = X'H = x'$

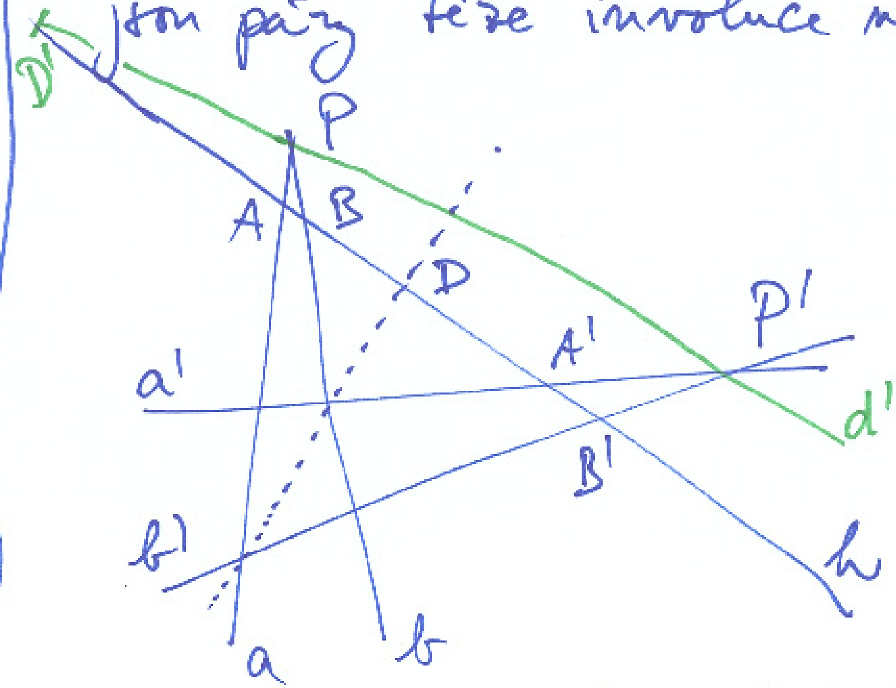
$\Rightarrow$ našli jsme 1 pár involuce

$\Rightarrow$ je to involuce. $\square$

Pozn: pro dir. přímku d je $d' = HD'$, $D' = C = p \cap p'$

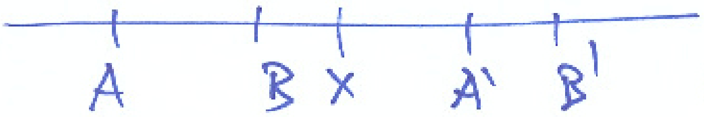
Věta* (o přímce procházející direkčním bodem):

Mějme proj. $P(a,b,c) ::: P'(a',b',c')$, h = lib. přímka proch. dir. bodem D. Pak páry bodů $A = h \cap a$, $A' = h \cap a'$; $B = h \cap b$, $B' = h \cap b'$ atd. jsou páry téže involuce na h.



Pozn*: Pro dir. bod D je $D' = h \cap d'$, kde $d' = PP'$

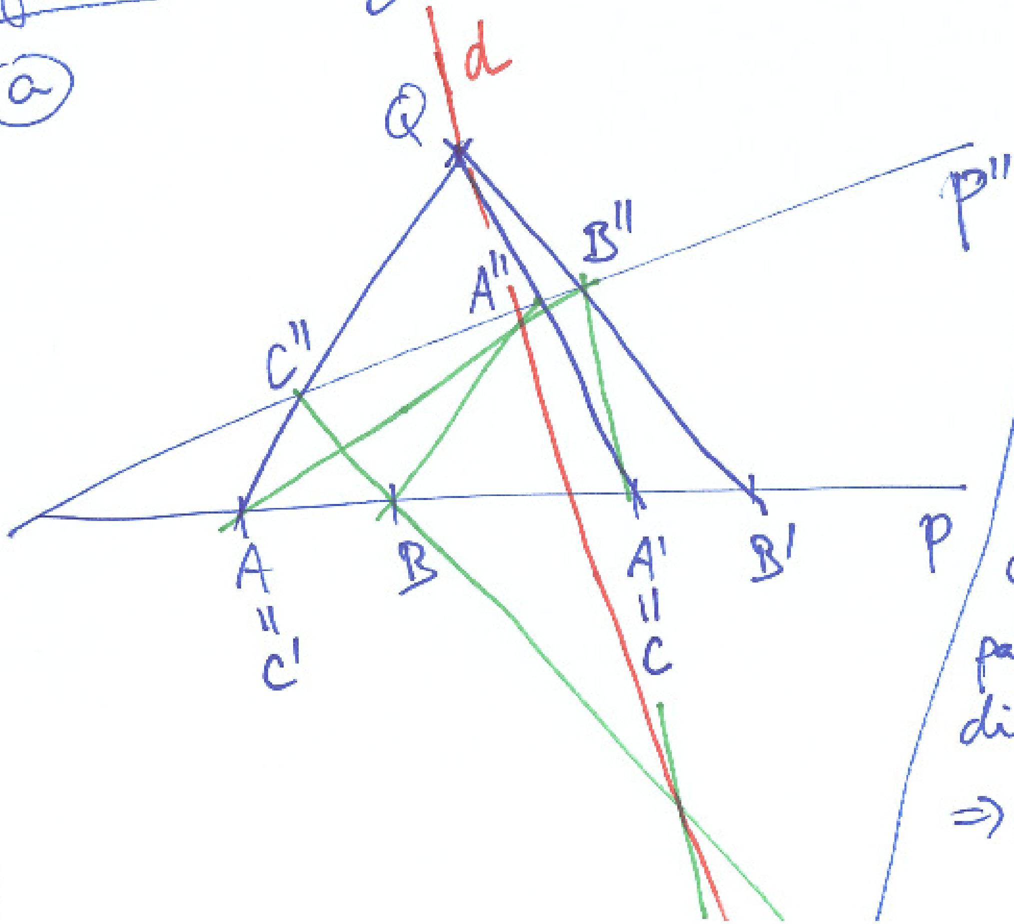
Konstrukce: doplňování bodové involuce dané dvěma páry



$x' = ?$

Jsou 3 způsoby:

(a)

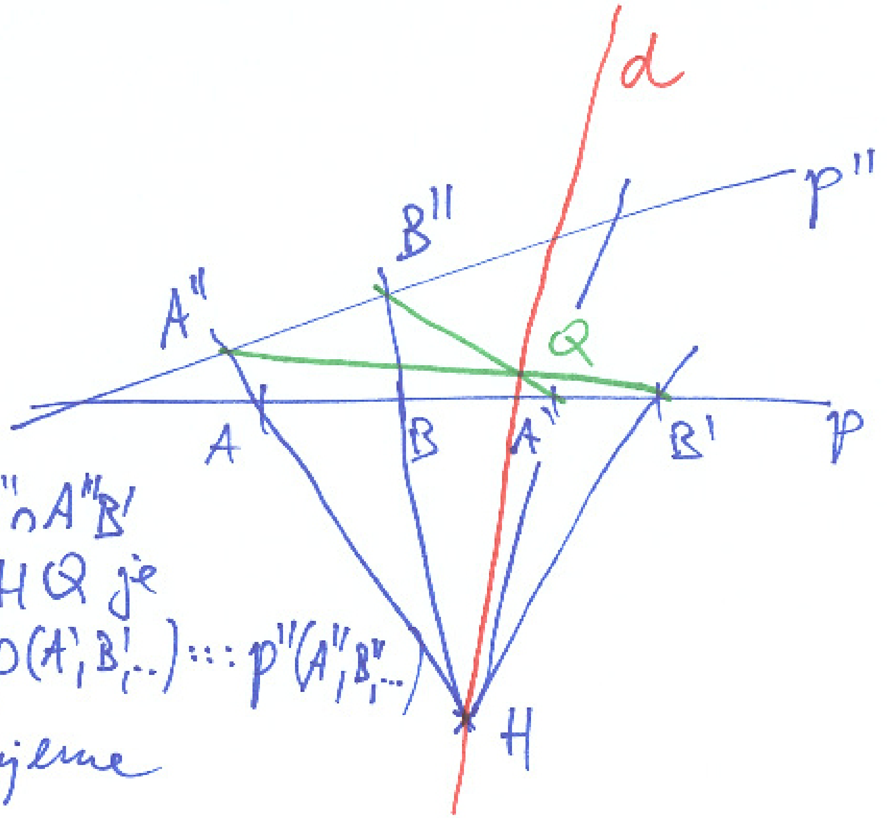


(a) klasicky – přes pomocnou přímku p'', bod Q a s využitím $A = C'$, $A' = C$

– najdeme d a můžeme doplňovat

(Pozn: $Q \in d$)

(b) pomocí V. o bodu na dir. př.:

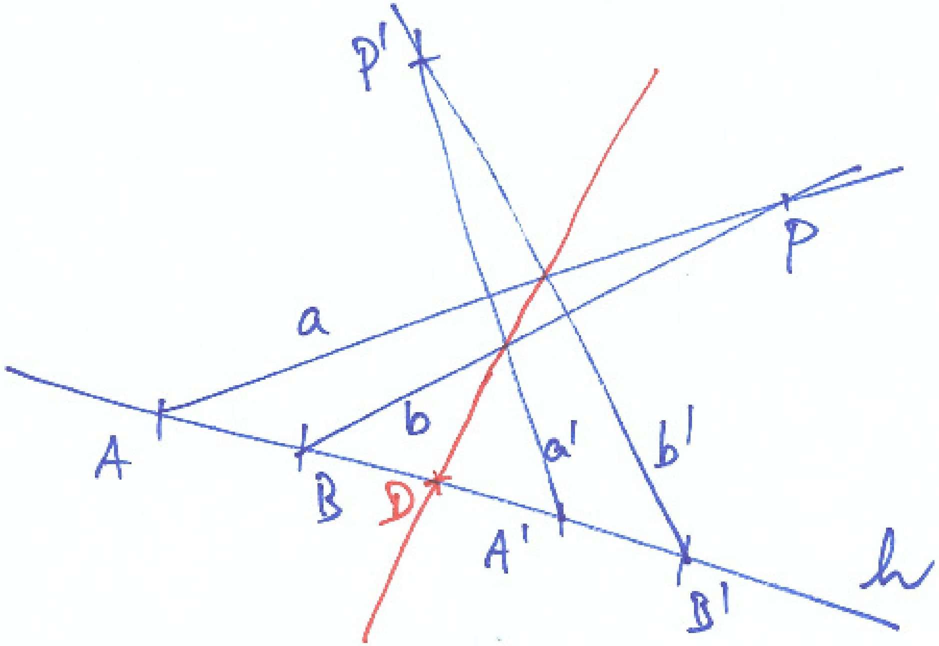


$Q = A'B'' \cap A''B'$

pak $d = HQ$ je dir. př. $p(A', B', \dots) ::: p''(A'', B'', \dots)$

$\Rightarrow$ doplňujeme

(c) pomocí V. o přímce procházející dir. bodem:



P, P' libov., $a = PA$ atd.

$P(a, b, \dots) ::: P'(a', b', \dots)$ bude proj.

(zatím neznáme 3. pár)

ale najdeme její dir. bod:

křížením $a \cap b', a' \cap b'$ + $D \in h$

$\Rightarrow$ doplňujeme proj. $P(a, b, \dots) ::: P'(a', b', c')$

a tedy i zadanou involuci

Sami: • komplet tyto konstrukce

• Další konstrukce.

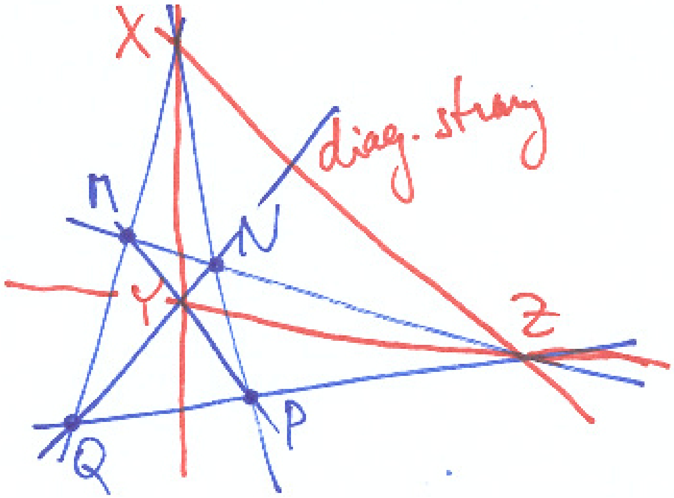
Def:

Úplný čtyřroh

- čtveřice bodů v rovině (M, N, P, Q), přičemž žádné 3 nejsou kolineární

M, N, P, Q = <u>vrcholy čtyřrohu</u> (4)

jejich spojnice = <u>strany čtyřrohu</u> (6)



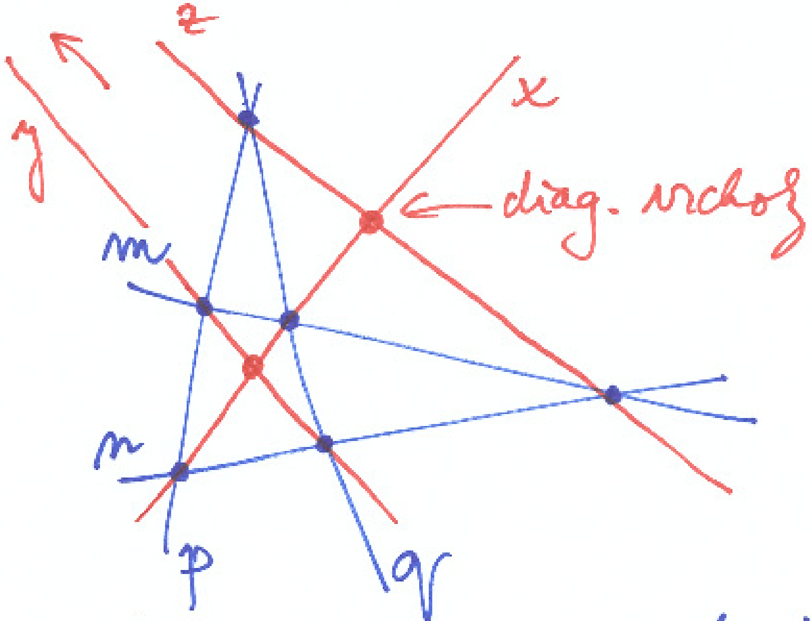
- <u>protější strany</u> = určené disj. páry vrcholů: MN, PQ atd. (3 páry)

Úplný čtyřstran

- čtveřice přímek v rovině (m, n, p, q), přičemž žádné 3 nejsou konkurentní (= neprocházejí 1 bodem)

m, n, p, q = <u>strany čtyřstranu</u> (4)

jejich průsečíky = <u>vrcholy čtyřstranu</u> (6)



- <u>protější vrcholy</u> = urč. disj. páry stran: $m \cap n$, $p \cap q$ atd. (3 páry)

- diagonální vrchol čtyřrohu
  = průsečík dvou protějších stran: X, Y, Z (3)
- diagonální strana
  = spojnice diag. vrcholů XY, XZ, YZ (3)

- diagonální strana čtyřstranu
  = spojnice dvou protějších vrcholů: x, y, z (3)
- diagonální vrchol
  = průsečík diag. stran $x \cap y$, $x \cap z$, $y \cap z$ (3)

Pozn: čtyřroh má celkem 9 stran (6 nediag., 3 diag.)

Pozn*: čtyřstran má 9 vrcholů (6 nediag., 3 diag.)

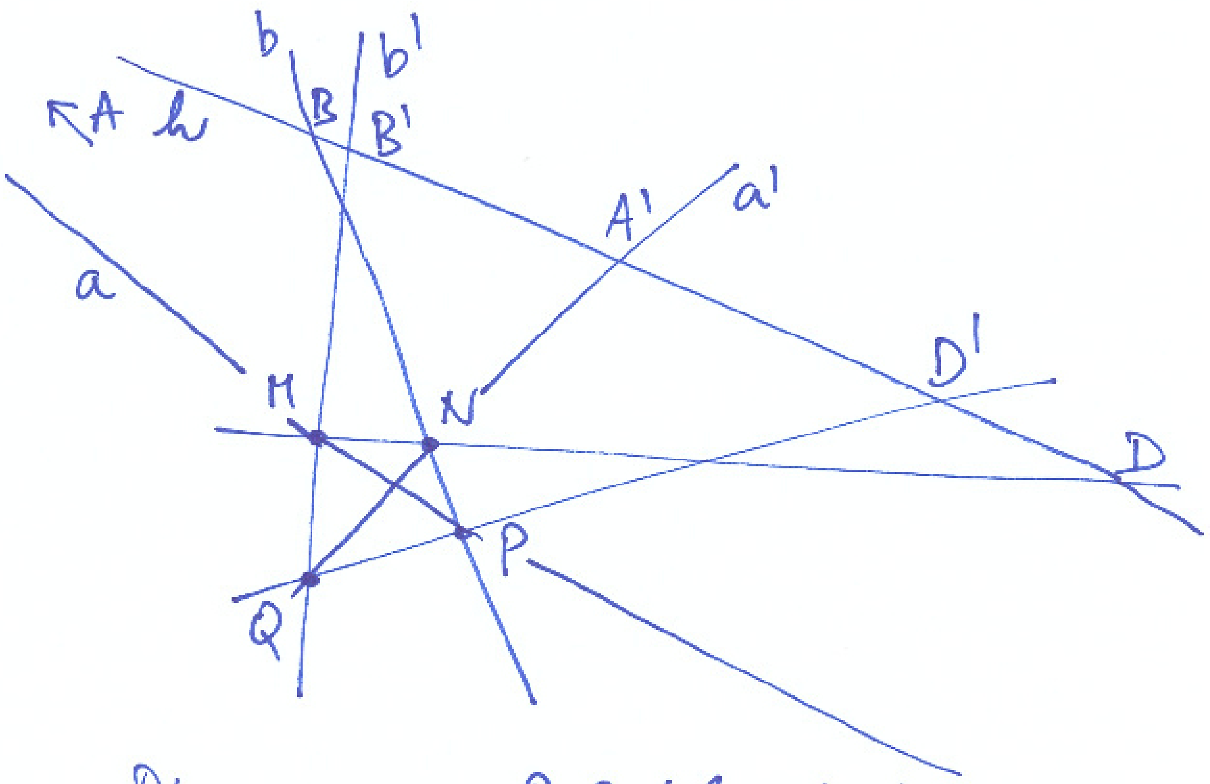
Věta: Každá (i diagonální) strana úplného čtyřrohu je protínána všemi ostatními stranami jen ve 4 bodech. Tyto body navíc tvoří harmonickou čtveřici.

Dk: a) vždy jen 4 průsečíky – viz obrázek
b) harm. čtveřice pro nediag. strany – viz konstrukce harm. čtveřice
c) pro diag. strany – promítnutím z nediag. strany

II

Věta*: Každý (i diag.) vrchol úplného čtyřstranu je spojen s ost. vrcholy jen 4 přímkami. Ty navíc tvoří harm. čtveřici.

Pozn.: v obrázku nejsou vidět všechny spojnice.



Věta: (o přímce a čtyřrohu): Buď dán úplný čtyřroh a h = přímka různá od jeho stran. Pak protější strany čtyřrohu vytínají na h tři páry téže involuce.

Dk: vezmeme P, Q jako středy svazků,

Ozn. $a = PM$, $a' = QN$, $A = a \cap h$ atd.
$b = PN$, $b' = QM$,

Páry A, A'; B, B' zadávají invol. na h

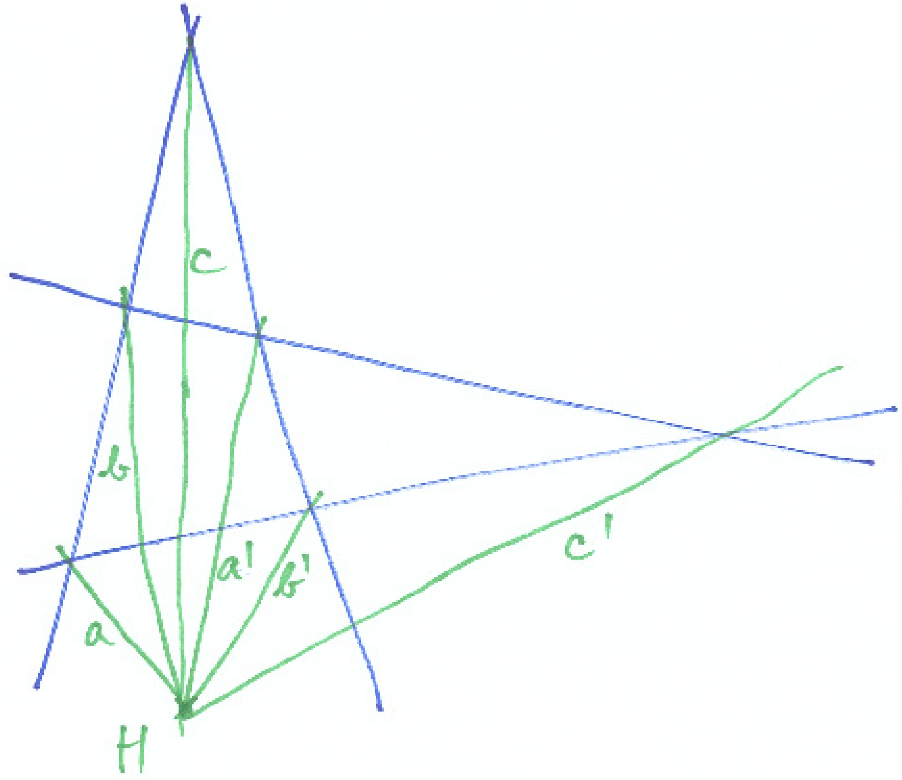
Chci, že i $PQ \cap h$, $MN \cap h$ patří k téže involuci

!! Bod $MN \cap h$ je dir. bodem proj. $P(a, b, \dots) ::: Q(a', b', \dots) \to D$

A dle Pozn. za V. o př. proch. dir. bodem je $D' = h \cap PQ$ $\square$

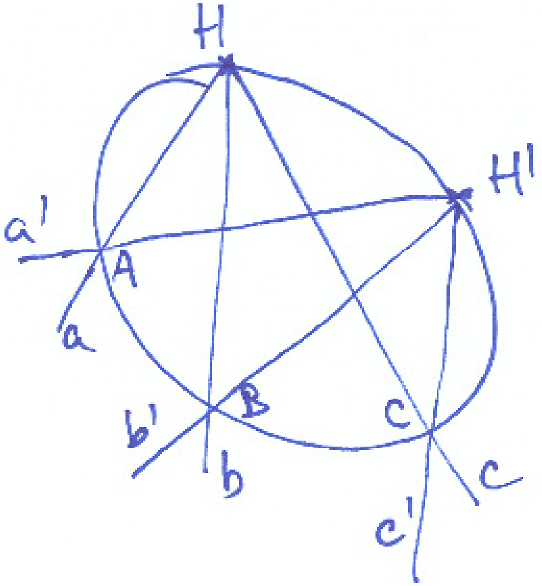
Věta* (o bodu a čtyřstranu):

Buď dán úplný čtyřstran a H = bod různý od jeho vrcholů. Pak spojnice protějších vrcholů čtyřstranu s bodem H tvoří páry téže involuce.

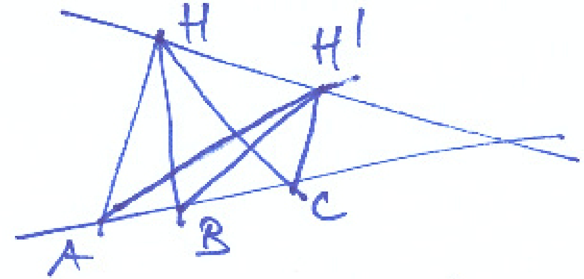


III. Kuželosečky

Def: mějme projektivitu nesoum. přímk. soustav $H(a,b,c) ::: H'(a',b',c')$.
<u>Bodová kuželosečka</u> $\mathcal{B} =$
= množina průsečíků odpovídajících si přímek v této projektivitě
(Zkratka: kčka)



Věta: $H(a,b,c) :: H'(a',b',c')$ (jde o perspektivitu) $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je složená ze dvou přímek, a sice z přímky perspektivity a samodružné přímky HH'.



Dk – ihned z vlastností persp.

Def: kčka je <u>singulární</u> $\equiv H :: H'$
kčka je <u>regulární</u> v opačném případě