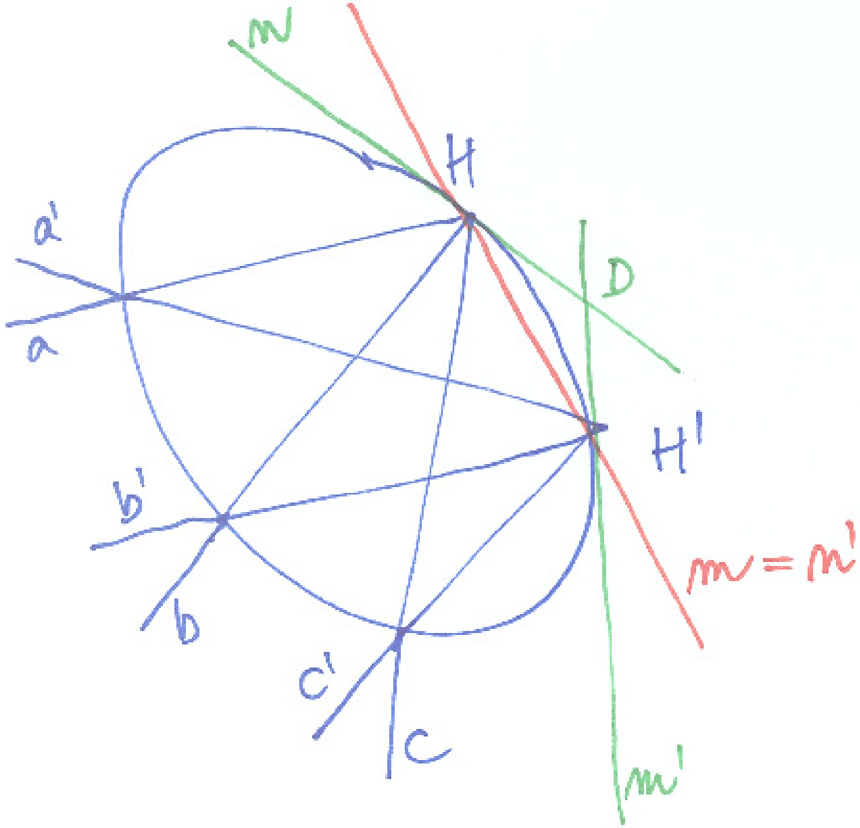
Proj. geometrie, 18.11.2020

Def - minule: je zadána proj.

$$H(a,b,c) ::: H'(a',b',c')$$

(bodová) křivka $\mathcal{B}$ = množina

průsečíků $a \cap a'$, $b \cap b'$, ...



Věta - minule: $H :: H' \Leftrightarrow \mathcal{B}$ je složená ze 2 přímek: HH' a přímka perspektivity

↳ křivka je singulární

jinak: regulární

Pozorování: $H, H' \in \mathcal{B}$

Dk: pro regul. ozn. $m = m' = HH'$

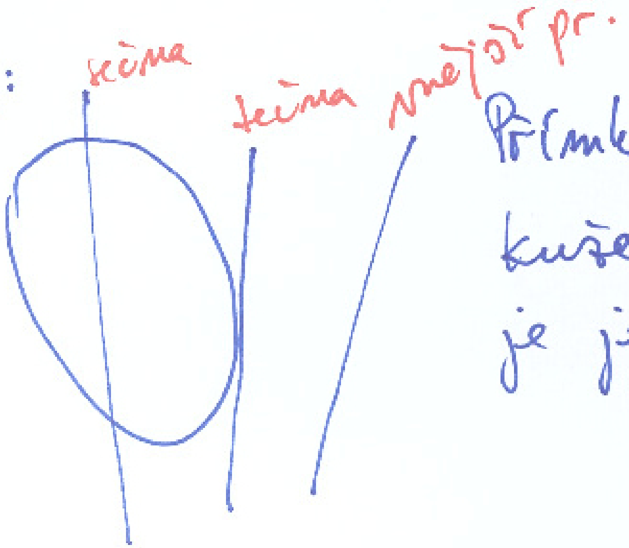
pak $H = m \cap m'$, $H' = m \cap m'$ $\Big\} \Rightarrow H, H' \in \mathcal{B}$

pro sing. dokonce celá $HH' \subset \mathcal{B}$

□

Dále uvažujeme jen regulární křivky.

Def.: Přímka v rovině kuželosečky je její:

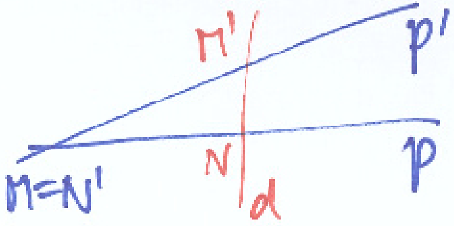


$\left.\begin{array}{l}\text{sečna}\\ \text{tečna}\\ \text{vnější př.}\end{array}\right\}$ pokud ji protíná ve $\left.\begin{array}{l}2\\ 1\\ 0\end{array}\right\}$ bodech.

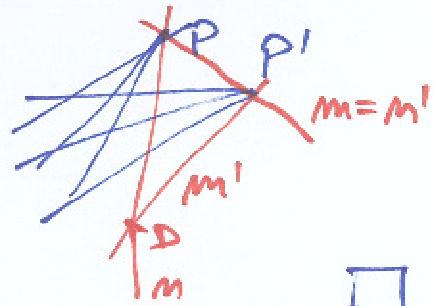
Věta: Bodem H (resp. H') prochází jediná tečna, a sice m resp. m' (kde $m' = m = HH'$). Průsečík $D = m' \cap m$ je direkčním bodem zadané projektivity.

Dk: $\forall$ přímka $x \in H(\ldots)$ protíná kčku $\mathcal{B}$ ve 2 bodech: H a $x \cap x'$. Pouze pro $x = m$ tyto 2 body splývají $\Rightarrow$ jde o tečnu. Podobně pro H', m'. Dále, $D = m \cap m'$ je dir. bodem – to už víme:

Pro bodové soust.:



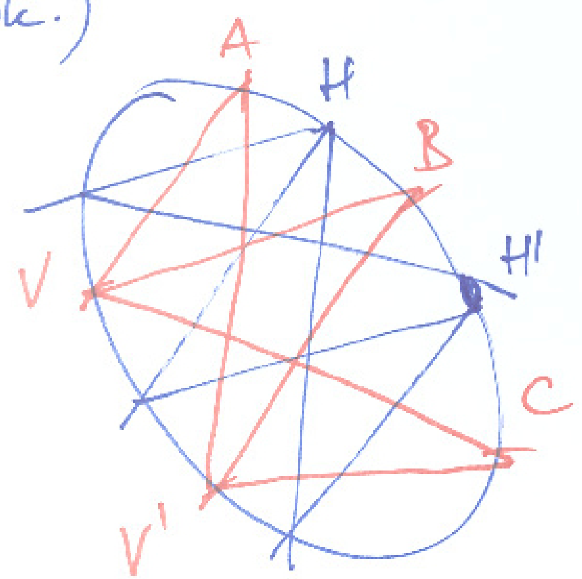
Pro přímkové:



$\square$

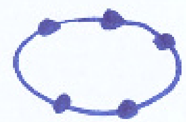
Věta: Je-li dána $\mathcal{B}$ pomocí projektivity $H(a,b,c) ::: H'(a',b',c')$, a zvolíme-li 5 libov. bodů $V, V', A, B, C \in \mathcal{B}$, označíme-li $a = VA$, $a' = V'A$ atd., pak proj. $V(a,b,c) ::: V'(a',b',c')$ zadává tutéž kčku $\mathcal{B}$.

(Bez Dk.)



Důsledky:

1) V def. kčky lze body H, H' zaměnit libov. jinou dvojicí bodů.
2) Každým bodem kčky prochází jediná tečna
3) Bodová kčka je jednoznačně určena <u>5 body</u>.



GeoGebra

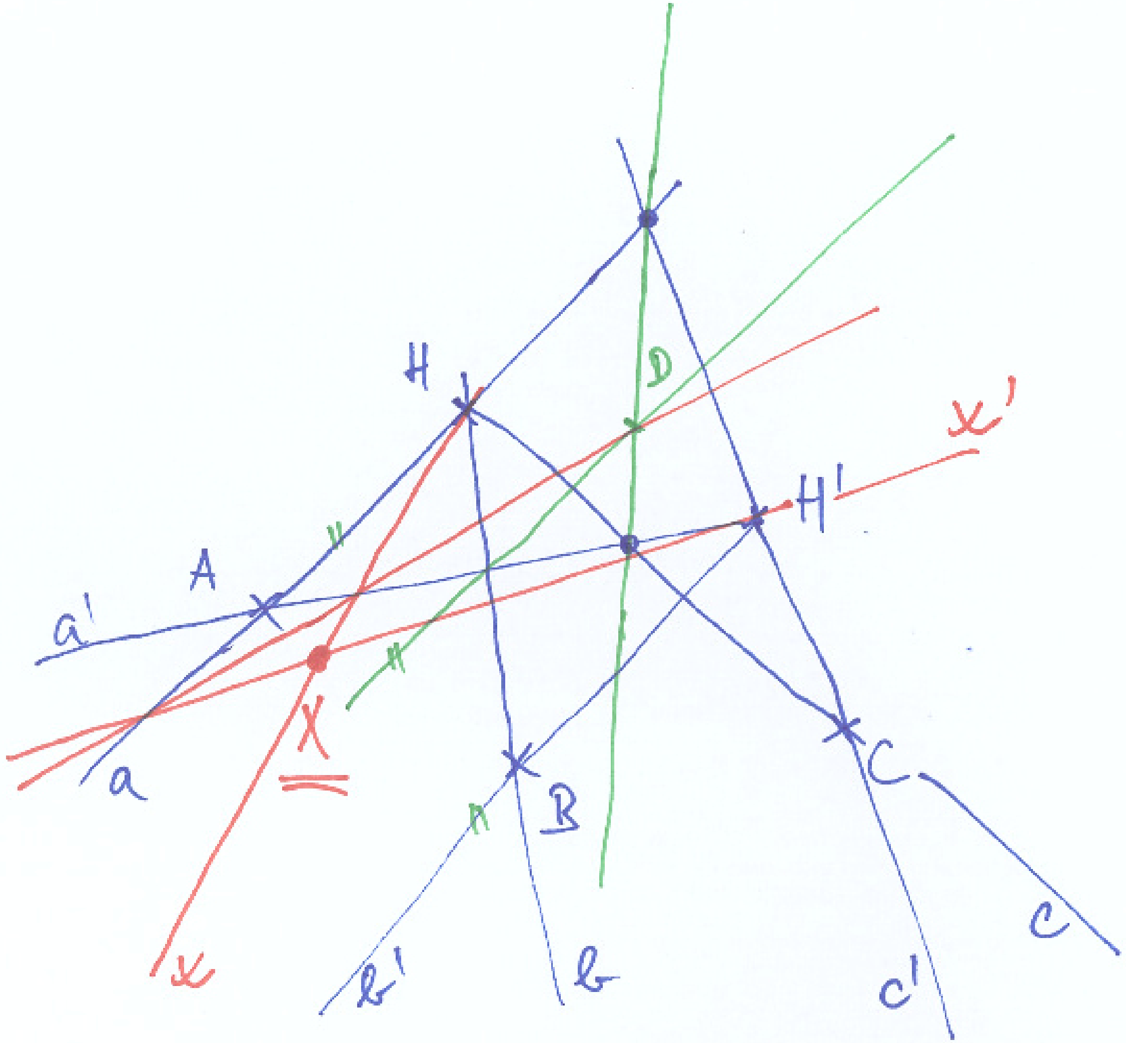
4) A žádné 3 z nich nejsou kolineární $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je regulární

H,H' $\quad$ A,B,C

$$\boxed{\begin{array}{c} 2+3=5 \\ \underbrace{2\cdot 3}_{a,b,c,a',b',c'} = 6 \end{array}}$$

<u>Konstrukce</u>: sestrojit kčku z 5 bodů: zvolit H, H', k nim najít dir. bod D a najít 1 další bod X kčky (je-li zadána přímka $x \in H(\ldots)$)

(Pak umíme libov. konečný počet bodů.)



<u>DÚ</u>: ručně nebo Geogebra: zadáno 5 bodů → najít dalších 15

Konstrukce: K.čka je dána 5 body, v jednom z nich mají tečnu.

Řešení: daný bod označíme H (a některý další H'), najdeme D, pak tečna = HD.

Věta: Tečna s bodem dotyku jsou 2 podmínky pro k.čku.

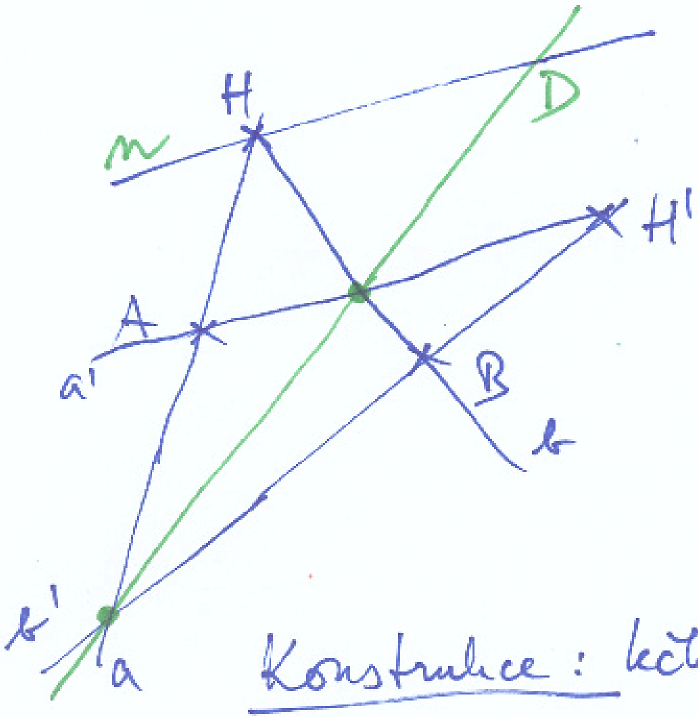
Tj. B je dána 5 podmínkami:

- 5 bodů
- 4 body + 1 tečna
- 3 body + 2 tečny

} tečna vždy prochází 1 ze zadaných bodů

5] **Dk**: Ozn.-li bod s tečnou H (H'), D leží na jeho tečně.

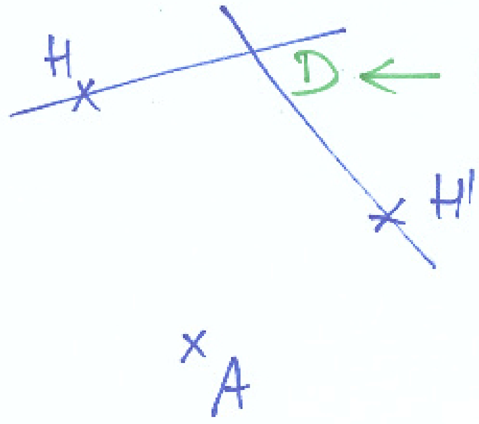
Konstrukce: k.čka ze 4 bodů + 1 tečny.



$D \in m \wedge$

$D \in$ spojnice $a \cap b'$, $a' \cap b$

Konstrukce: k.čka ze 3 bodů + 2 tečen

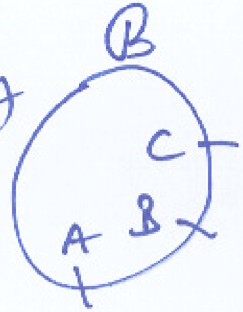


← rovnou máme !

Soustavy na bodové kče

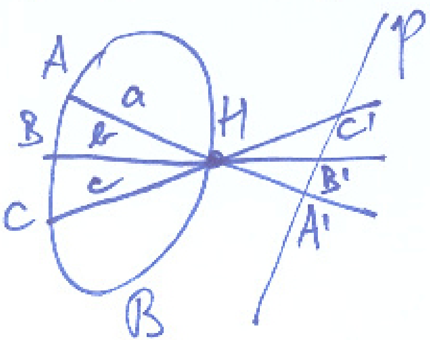
(= kvadratické soustavy)

- uvažujeme bodové soustavy na $\mathcal{B}$: $\mathcal{B}(A,B,C)$



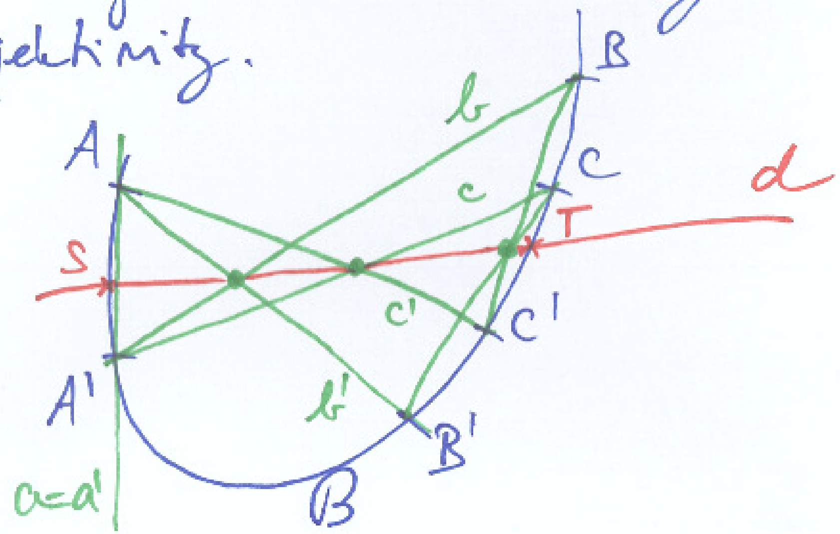
- soumístné / nesoumístné
- perspektivita s jinými typy soustav

$\mathcal{B}(A,B,C) ::$
$: H(a,b,c) :: p(A',B',C')$



- skládání persp. = projektivity
- bodům na $\mathcal{B}$ lze opět přiřadit souřadnice (homogenní)
- projektivity opět zachovávají dvojpoměr
- projektivita je dána 3 páry bodů
- u soumístných soustav má projektivita 2/1/0 reálné samodružné body

<u>Věta</u>: $\mathcal{B}(A,B,C) ::: \mathcal{B}(A',B',C')$, pak průsečíky „křížem" leží na direkční přímce d. Průsečíky d a $\mathcal{B}$ jsou samodružné body projektivity.



<u>Dk</u>: Ozn. přímky z bodů $A \neq A'$:

$$\left.\begin{aligned} &b = A'B,\ c = A'C,\ a = A'A \\ &b' = AB',\ c' = AC',\ a' = AA' \end{aligned}\right\} a = a'$$

Pak platí:

$$A(a',b',c') \;\overline{\wedge}\; \mathcal{B}(A',B',C') \;\overline{\wedge}\; \mathcal{B}(A,B,C) \;\overline{\wedge}\; A'(a,b,c)$$

a díky tomu, že $a = a'$ je samodr. přímka, je $A(a',b',c') \;\overline{\wedge}\; A'(a,b,c)$

$\Rightarrow \exists$ přímka (této) perspektivity $\dots d$,

na ní se protínají: $b = A'B$, $b' = AB'$;

$c = A'C$, $c' = AC'$.

Dále chceme, že i BC', $B'C$ se protínají na d a také tvrzení o samodr. bodech – tím začneme:

$\rightarrow$ Ozn. samodr. body S, T; automaticky $S, T \in \mathcal{B}$; zároveň $S = S' \in d$, protože na d se protínají přímky $s = A'S$, $s' = AS'$, přitom $A \neq A'$

$\Rightarrow$ průsečík $s \cap s'$ je právě bod $S = S'$

$\Rightarrow S \in d$. (Stejně pro bod T.)

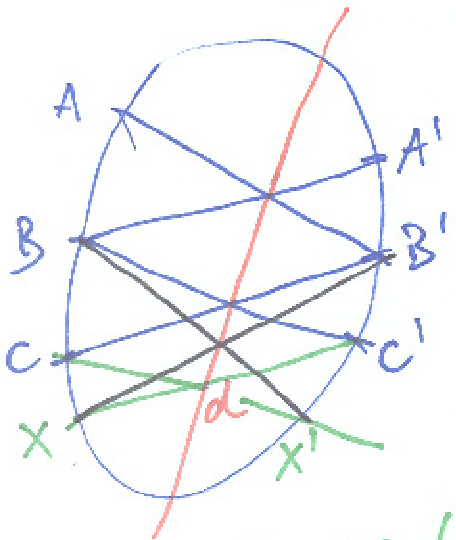
Ovšem poloha bodů S, T nezávisí na volbě bodů A, A'

$\Rightarrow$ lze je zaměnit např. za B, B'

$\Rightarrow$ na $d = ST$ leží i průsečík BC', $B'C$ (atd.) $\square$

<u>Pozn</u>:
$$\left.\begin{aligned} &d \text{ sečna} \Leftrightarrow 2 \\ &d \text{ tečna} \Leftrightarrow 1 \\ &d \text{ vnější} \Leftrightarrow 0 \end{aligned}\right\} \text{reálné sam. body}$$

Konstrukce: doplňování projektivity na kčce.



X' = průsečík přímky a $\mathcal{B}$ ...?!
$\mathcal{B}$ nemusí obecně celá nakreslená

Lépe: $\mathcal{B}$ je zadána 5 body; 6 bodů A, B, C, A', B', C' je zadáno jako průs. odpov. si přímek, taktéž bod X ⇒ stejně tak lze nalezení bod X' ... dalším křížením ($XB' \to X'B$)

8

Involuce na kčce

Def: projektivita na kčce je <u>involuce</u> ≡ ≡ ex. pár bodů A, A' takový, že $A \mapsto A'$, $A' \mapsto A$.

Pozn: 1) platí i ostatní ekviv. podmínky:

- pro ∀ pár platí: $A \mapsto A' \Rightarrow A' \mapsto A$
- $w = -1$ $\quad (w = (XX'ST),\ S, T = \text{sam. body})$

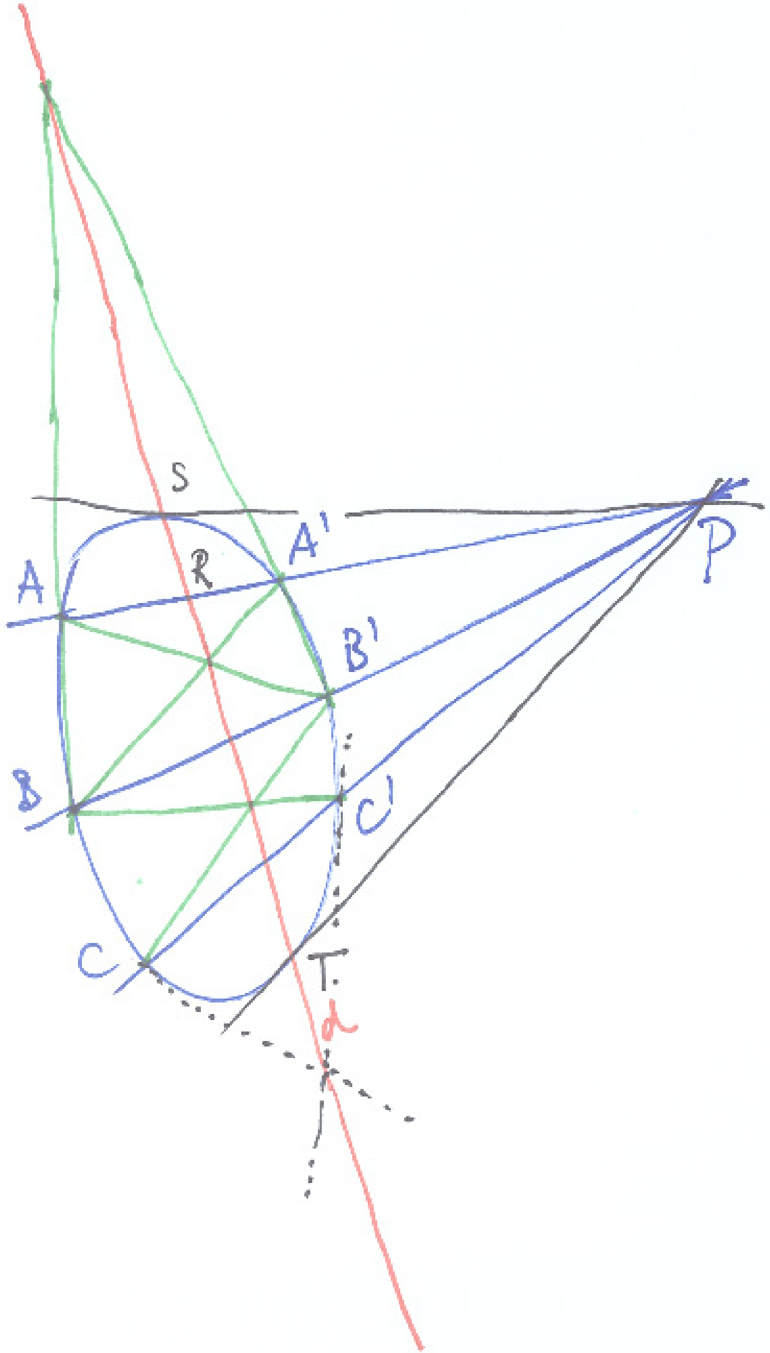
2) Involuce je dána 2 páry bodů.

Věta (o involuci na bodové kčce):

Nechť je na kčce $\mathcal{B}$ dána involuce 2 páry bodů A, A'; B, B'.

Pak platí:

%.



1. Na direkční přímce d leží nejen průsečíky AB', $A'B$ atd., ale i průsečíky AB, $A'B'$ atd.

   d se nazývá osa involuce

2. Spojnice AA', BB' atd. procházejí jedním bodem P = střed involuce

3. Průsečíky $d \cap \mathcal{B}$ jsou samodružné body S, T dané involuce. Přímky PS, PT jsou tečny k $\mathcal{B}$ z bodu P.

4. Tečny v bodech A, A' (atd.) se protínají také na d.

Dk: ① zřejmé – lze zaměňovat $A \Leftrightarrow A'$

② Body A, A', B, B' zadávají úplný čtyřroh, přímka d je jeho diag. stranou, bod P ($P = AA' \cap BB'$) je protější diag. vrchol k této straně; při změně bodů B, B' (třeba do C, C') je d také diag. stranou nového čtyřrohu A, A', C, C' (díky ①). Proto i bod $R = AA' \cap d$ je pevný (nemění se při změně bodů B, B'.) Přitom víme, že $(AA'RP) = -1$.
$\Rightarrow$ P je pevný (nezávislý na poloze B, B'). QED

③ $S, T = d \cap \mathcal{B}$ jsou samodr. body – víme. $S = S' \Rightarrow PS$ má s $\mathcal{B}$ jediný průsečík, tj. je to tečna. Stejně pro PT.

④ Tečny v A, A' = limitní případ sečen AB, $A'B'$ z bodu ①

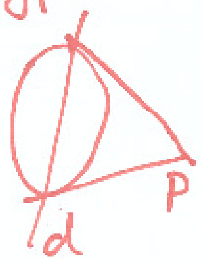
∎

Dále říkáme, že involuce na kce je indukována svým středem P.

Involuce	Reálné sam. body	Osa involuce	Střed involuce
hyperb.	2	sečna	vnější bod
eliptická	0	vnější	vnitřní bod

Definice

Hyp:



Elipt: