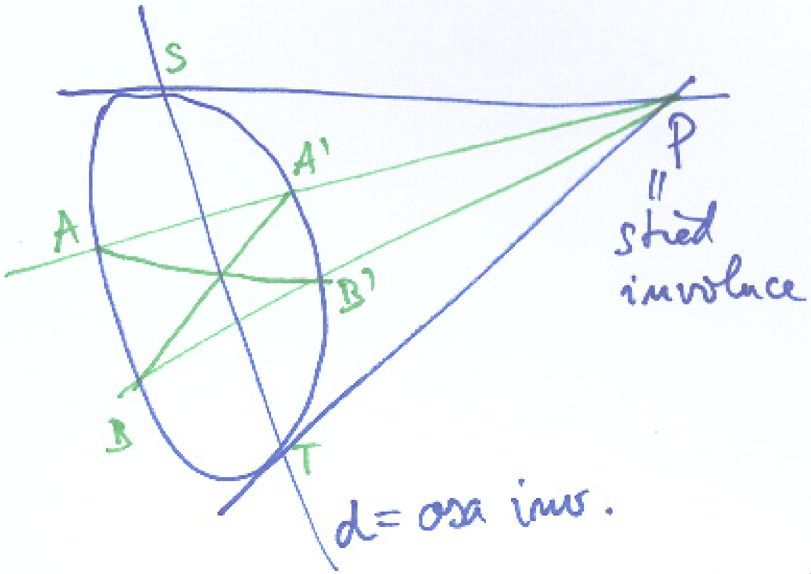
Proj. geom. 25. 11. 2020

Involuce na kčce (minule):

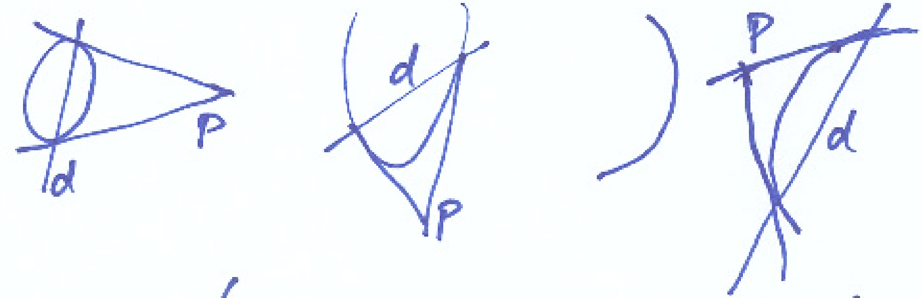


Říkáme, že involuce je indukována svým středem P.

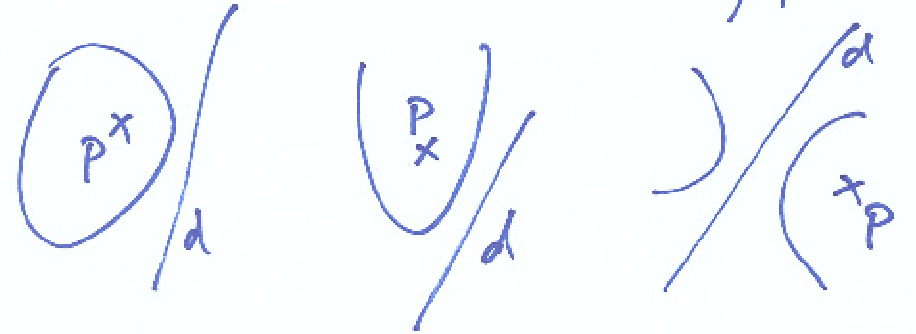
Involuce	Reálné sam. body	Osa involuce	Střed involuce
hyperb.	2	sečna	vnější bod kčky
eliptická	0	vn. přímka	vnitřní bod kčky

Def.

Hyp.



Elipt.

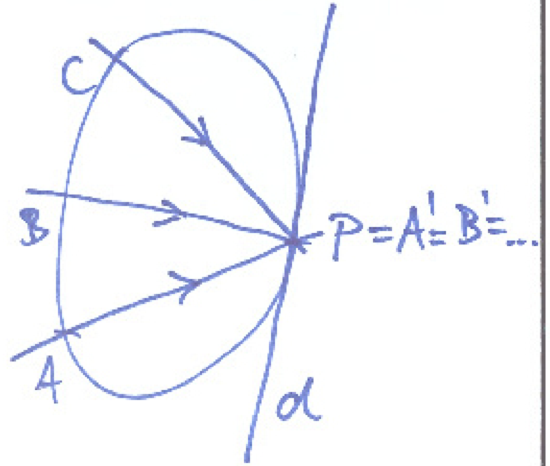


Pozn.: 1) Název involuce nesouvisí s typem kčky.

2) parabolická „involuce": 1 sam. bod, osa inv. = tečna, střed = její bod dotyku

$\forall$ bod $A, B, C \mapsto P$

$S = T = P$



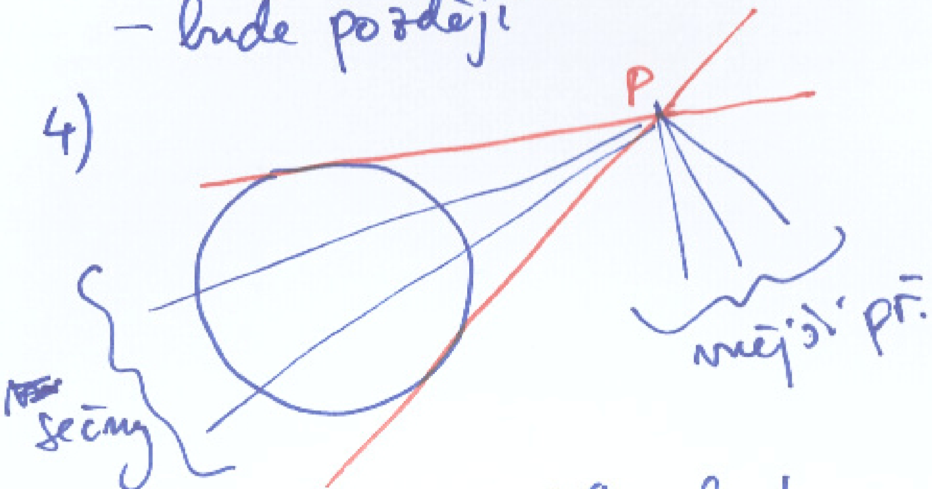
3) Za ~~...~~ situace z Věty nazýváme

P = pól přímky d (vzhledem k $\mathcal{B}$)

d = polára bodu P (—— " ——)

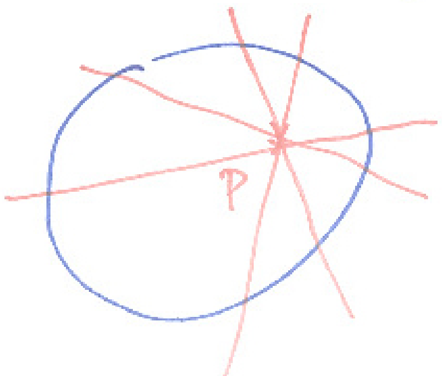
– bude později

4)



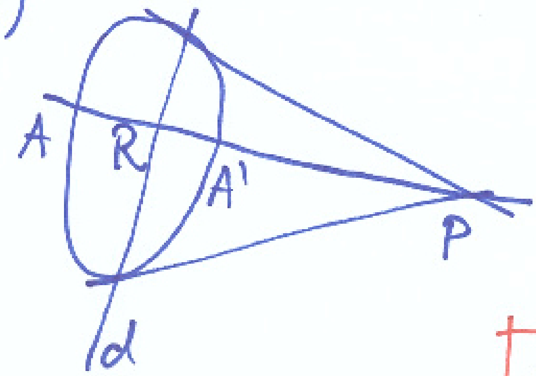
Tečny z vnějšího bodu oddělují sečny od n. přímek.

5)



Vnitřním bodem procházejí jen sečny.

6)



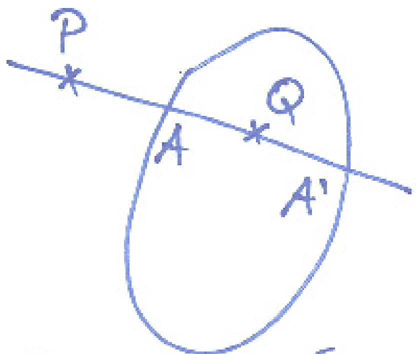
$R = d \cap AA'$

Z důkazu Věty o involuci plyne

$$\boxed{(AA'RP) = -1}$$

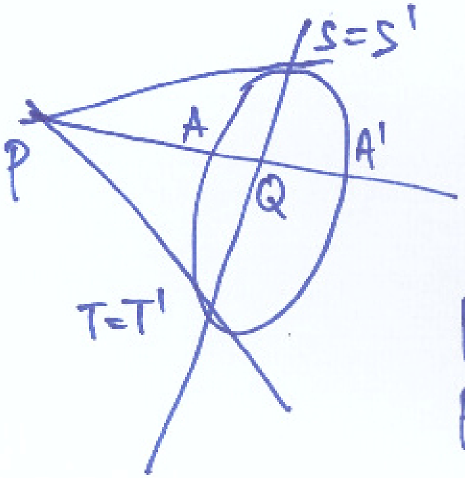
Čtyři malé věty

Věta A: Mějme 2 involuce na $\mathcal{B}$ indukované středy $P \neq Q$. Tyto involuce mají jediný pár společný, a sice pár průsečíků PQ s $\mathcal{B}$.



Navíc, je-li aspoň 1 z bodů P, Q vnitřní, jsou A, A' reálné.

Dk – zřejmé.



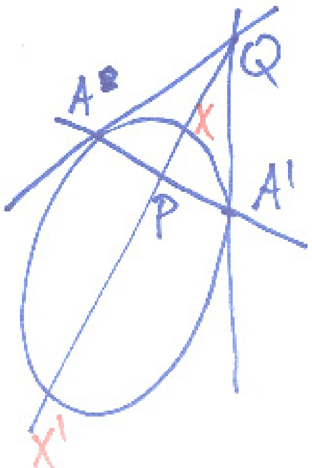
A, A' je pár pro obě involuce

ale:

pro inv(Q): pár S, T

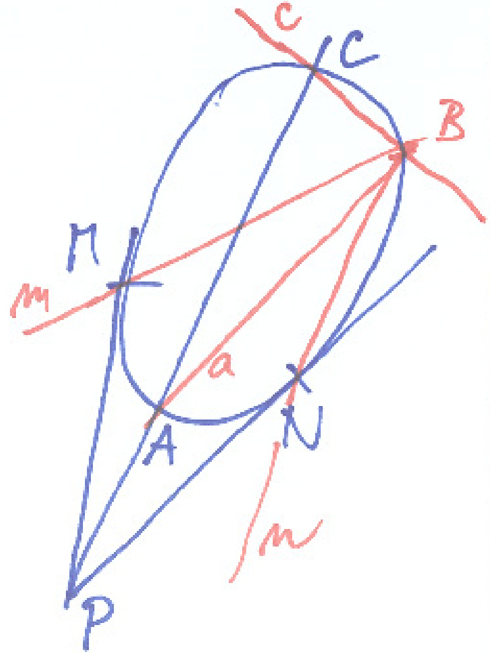
pro inv(P): pár S, S'; T, T'

Věta B: Buď A, A' pár involuce indukované bodem P; Q = průsečík tečen k $\mathcal{B}$ v A, A'. Pak pár průsečíků X, X' přímky PQ s $\mathcal{B}$ je jediný pár, který pár A, A' odděluje harmonicky tj: $(XX'AA') = -1$.



Dk: Pro involuci se středem Q je X, X' je pár involuce, A, A' jsou její samodr. body. A víme, že $(XX'AA') = -1$.

Věta C: P = lib. vnější bod $\mathcal{B}$; M, N = body dotyku tečen z P z $\mathcal{B}$; A, C = body $\mathcal{B}$ kolineární s P; B = libov. bod $\mathcal{B}$; $m = BM$, $n = BN$; $a = BA$, $c = BC$. Pak $(mnac) = -1$.



Dk: Ihned z Věty B: pro inv. se stř. P: M, N = sam. bod; A, C = pár $\Rightarrow (mnac) = (MNAC) = -1$.

Věta D:

P, M, N, A, C ... jako ve Větě C

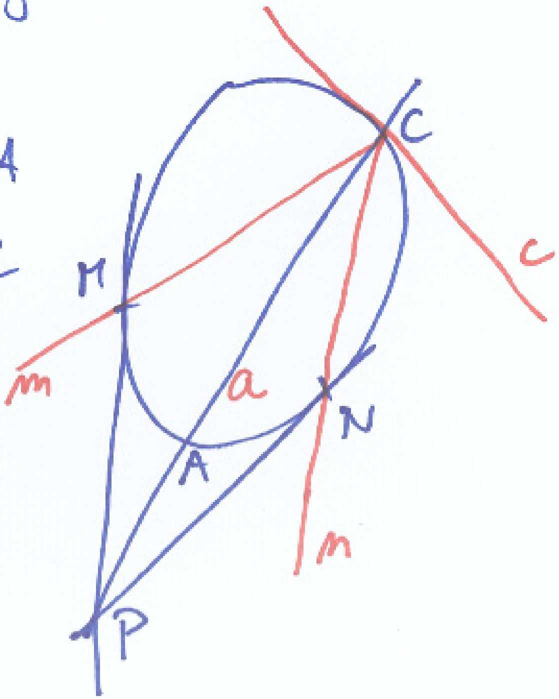
$B := C$

$m = CM$, $n = CN$, $a = CA$

c = tečna v bodě C

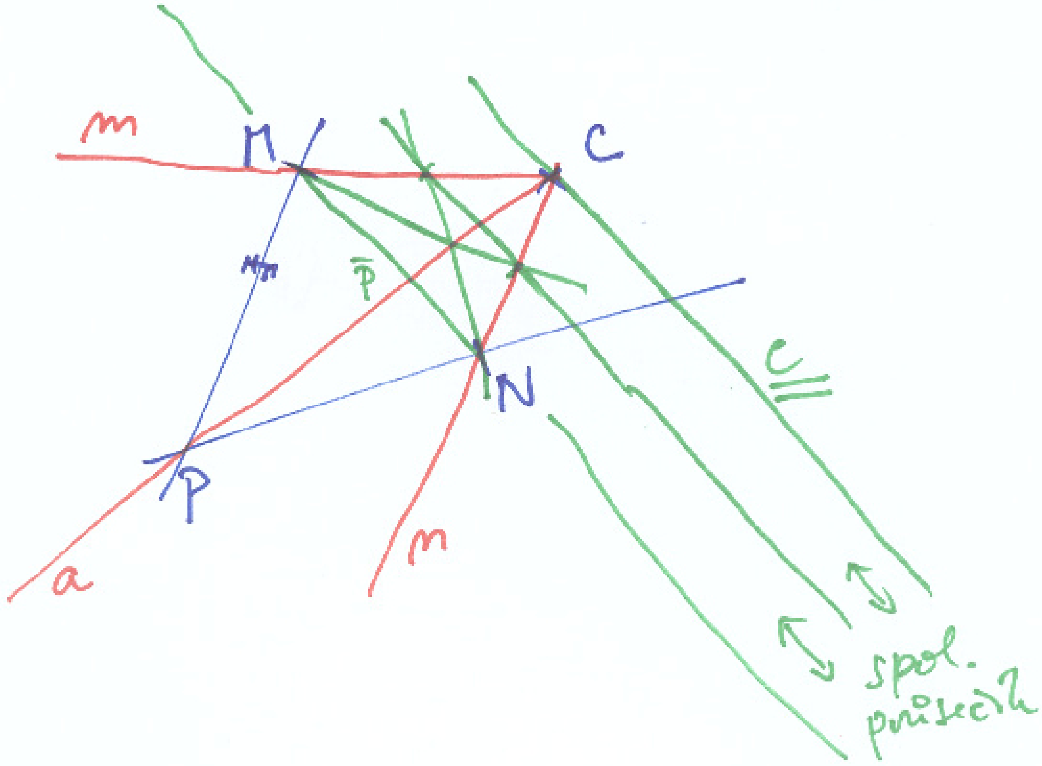
Pak platí

$$\boxed{(m\, n\, a\, c) = -1}$$



Dk: ihned z Věty C, B splyne s C.

Konstrukce: Kčka je dána 3 body a 2 tečnami. Určete tečnu ve 3. bodě.

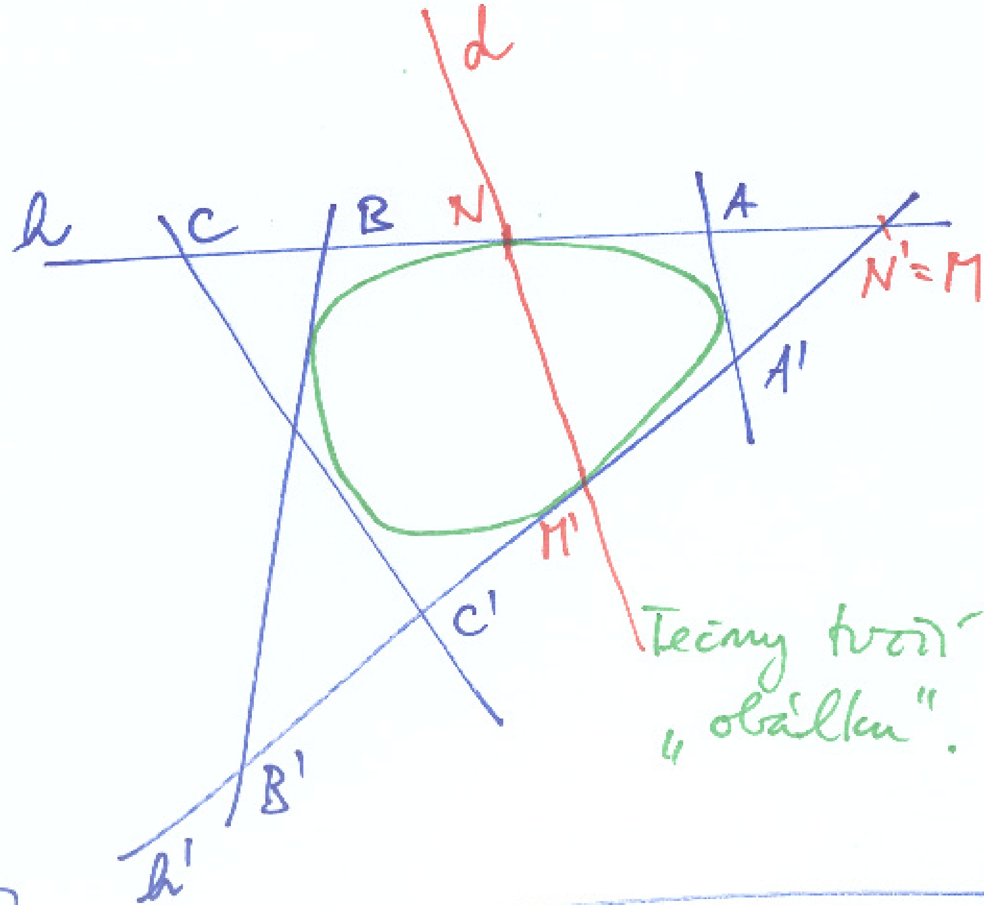


a) Nejprve označíme H, H' = 2 body na tečnách, pak D = průsečík tečen; doplníme 2 body kčky → máme 5. Přeznačíme: H = ten, v němž chceme tečnu, H' = lib. jiný → najdeme $\tilde{D}$ pro tuto volbu ⇒ $\underline{H\tilde{D}}$

b) Podle Věty D: najdeme c jako 4. harmonickou k m, n, a

rychlejší

Tečnové křivky – duální k bodovým



Def: Mějme projektivitu nesoumístných bodových soustav $h(A,B,C) ::: h'(A',B',C')$.

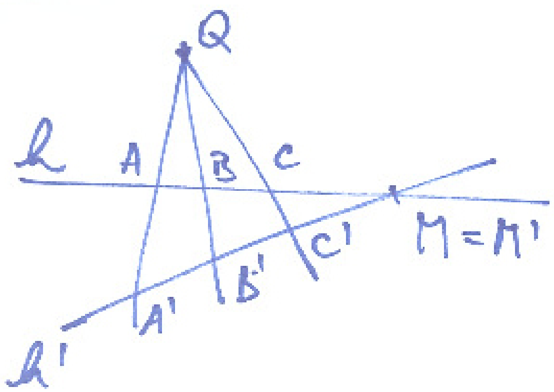
Tečnová křivka T je množina spojnic odpovídajících si bodů.

Tyto spojnice = tečny křivky.

Vše platí duálně.

Věta: $h(A,B,C) :: h'(A',B',C')$

$\Leftrightarrow$ T je složená ze 2 svazků přímek, jejichž středy jsou střed perspektivity Q a průsečík $h \cap h' = M = M'$. (← „spojnice" MM')



Def: $\mathcal{T}$ < singulární $\Leftrightarrow h :: h'$
regulární $\Leftrightarrow$ jinak

Dále uvažujeme jen regulární $\mathcal{T}$.

Def: Bod v rovině se nazývá

- vnější bod $\mathcal{T}$
- bod dotyku $\mathcal{T}$
- vnitřní bod $\mathcal{T}$

, pokud jím procházejí 2 / 1 / 0 (reálné) tečny.

Pozorování: $h, h' \in \mathcal{T}$.

Věta: Na h resp. h' leží jediný bod dotyku. Spojnice $d = NM'$ (kde $N' = M = h \cap h'$) je direkční přímkou zadané projektivity.

$N, M' \to$ bod dotyku

Věta:

1) Na volbě tečen h, h' nezáleží, lze místo nich brát libovol. jinou dvojici.

2) Na $\forall$ tečně leží $!1$ bod dotyku

3) $\mathcal{T}$ je zadána 5 tečnami.

(2+3 tečny $\to$ $2 \cdot 3 = 6$)

$\downarrow$ h, h' $\downarrow$ a, b, c

$A = h \cap a, \dots$

$A' = h' \cap a, \dots$

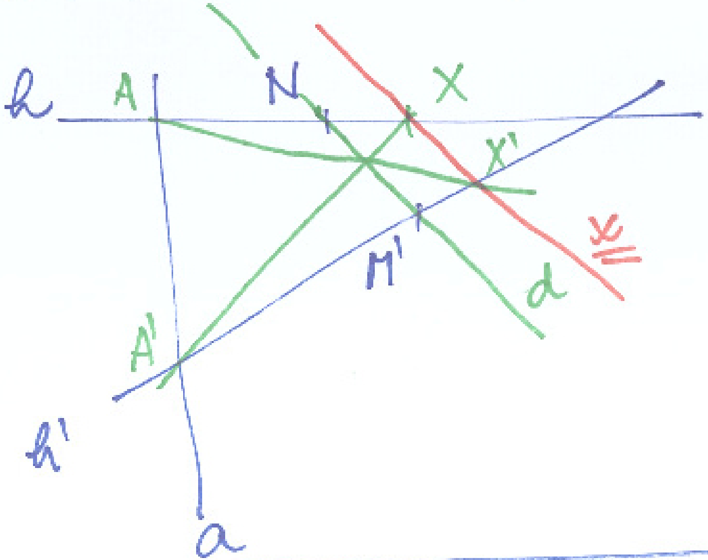
Obecněji: $\mathcal{T}$ je zadána 5 podmínkami:

- 5 tečen
- 4 tečny + 1 bod dotyku
- 3 tečny + 2 —"—

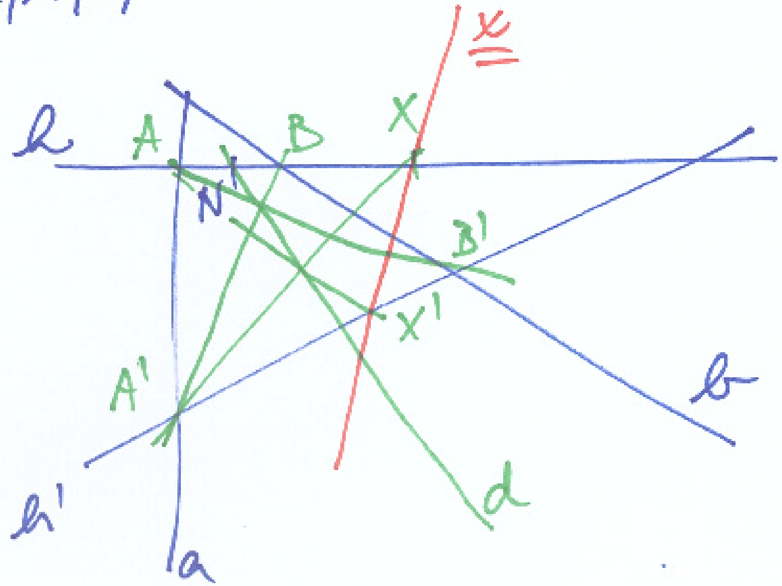
} body dotyku na tečnách

Konstrukce: sestrojit T z 5 podmínek, tzn. sestrojit vždy 1 další tečnu:

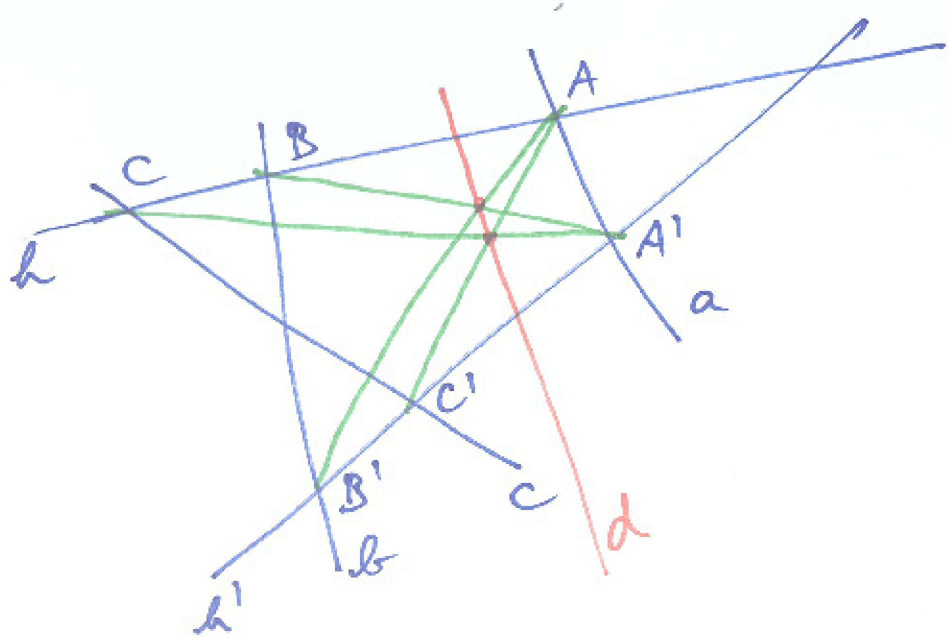
• 3 tečny + 2 body dotyku
(h, h', a) (N, M')



• 4 tečny + 1 bod dotyku
h, h', a, b N



• 5 tečen h, h', a, b, c



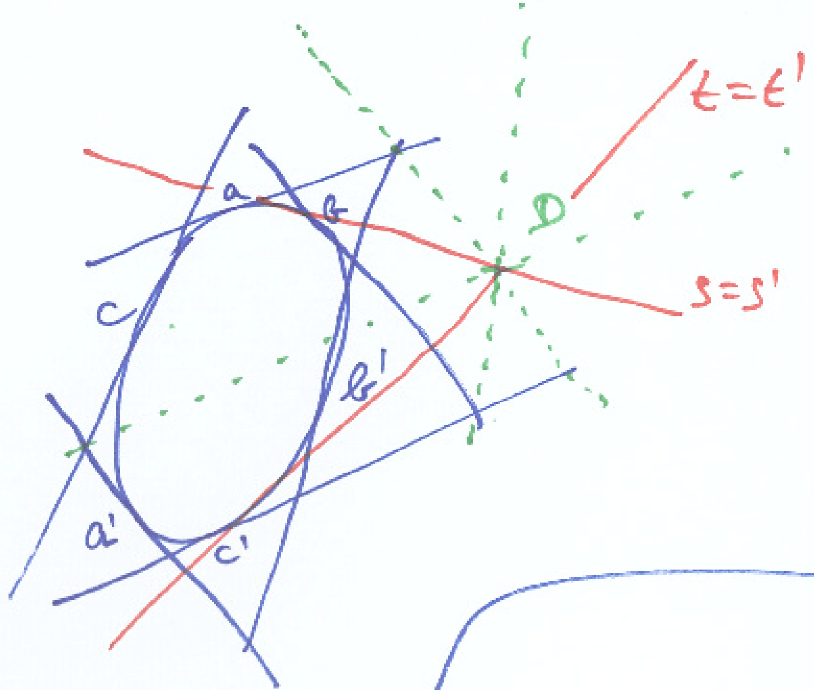
Konstrukce: T je zadána 5 tečnami, na 1 z nich najít bod dotyku.

Řešení: danou tečnu označíme h (nebo h'), pak bod dotyku je h∩d.

Důsledek těchto konstrukcí:

Množina tečen bodové křivky tvoří tečnovou křivku; množina bodů dotyku tečnové křivky tvoří bodovou křivku.

$\Rightarrow$ Od teď je budeme ztotožňovat a říkat jen křivka.



Další duální pojmy a tvrzení:

Mějme tečnové soustavy na T

Věta: $T(a,b,c) \,\bar{\wedge}\, T(a',b',c')$, pak spojnice průsečíků $a \cap b'$, $a' \cap b$ atd. procházejí direkčním bodem D projektivity. Tečny z D jsou samodr. přímky též projektivity.

<u>Věta o involuci na $\mathcal{T}$:</u>

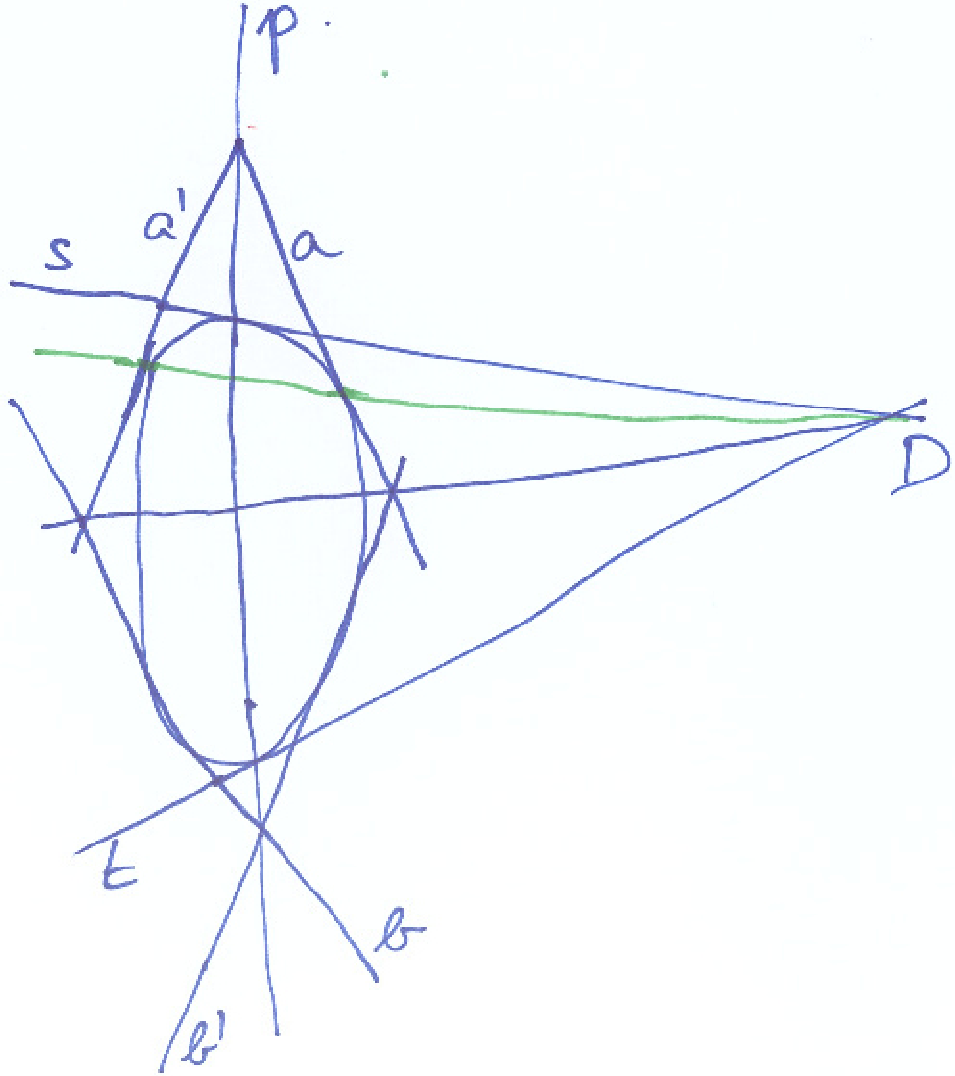
Je dána involuce tečen na $\mathcal{T}$ dvěma páry a, a'; b, b'. Pak:

(1) Dir. bodem D procházejí nejen spojnice průs. $a \cap b'$, $a' \cap b$, ale i $a \cap b$, $a' \cap b'$ ... <u>střed involuce</u>

(2) Průsečíky $a \cap a'$, $b \cap b'$ leží na 1 přímce p ... <u>osa involuce</u>

(3) Samodružné přímky s, t jsou tj. tečny z $\mathcal{T}$, které procházejí D; $p \cap s$, $p \cap t$ jsou body dotyku tečen z D (s, t).

(4) <u>Spojnice</u> bodů dotyku tečen a, a' prochází bodem D.



Říkáme, že involuce je indukovaná svojí <u>osou</u>.

Involuce	Reálné sam. přímky	Střed inv.	Osa inv.
hyp.	2	vnější	sečna
elip.	0	vnitřní	vnější př.

Def.

Pozor na dualitu:

vnější bod $\longleftrightarrow$ sečna !

vnitřní bod $\longleftrightarrow$ vnější př.

Konstrukce: Σ je dána 3 tečnami (m, n, c) s 2 body dotyku (na m, n). Najít bod dotyku na c.

Věta D^* $\Rightarrow$ $A = p \cap c$ (p = spojnice bodů dotyku),

C = 4. harmonický k M, N, A.

$\rightarrow$ Provést sami doma.

Věta D^*:

p = lib. sečna Σ

m, n = tečny v průsečících $p \cap \Sigma$

a, c = lib. tečny k Σ konkurentní s př. p $(p \cap a = p \cap c)$

C = bod dotyku tečny c

ozn. $M = c \cap m$, $N = c \cap n$, $A = c \cap a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{(MNAC) = -1}$