Jméno a příjmení (čitelně): ______________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Hložek Jaroš Johanovská Konopka

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Průběžný test ZS 2021/22
Varianta B

V každé úloze všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte.

1. (2 body) Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1} + 3^n}{(2,5)^n - 2^{2n+1}}.$$

2. (2 body) Zderivujte funkci

$$\ln(2x^2 + 5x + 3) + \frac{2x - 1}{x^2 + 4x}$$

3. (6 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce

$$f(x) = x^2 + x - 20.$$

Určete rovnici tečny ke grafu funkce v bodě $x_0 = 3$. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou, u tečny určete a vyznačte její průsečíky s osami a bod dotyku s parabolou.

4. (10 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 8x - 12,$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami, limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy, obor hodnot, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce.

Varianta B

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+3^n}{(2,5)^n - 2^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{4^n}\left(4+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{\cancel{4^n}\left(\left(\frac{2,5}{4}\right)^n-2\right)} =$$

$$2^{2n+1} = 2^{2n}\cdot 2^1 = (2^2)^n\cdot 2 = 4^n\cdot 2$$

$$= \frac{4+0}{0-2} = \underline{\underline{-2}}$$

2. $$\left(\ln(2x^2+5x+3) + \frac{2x-1}{x^2+4x}\right)'$$

$$= \frac{4x+5}{2x^2+5x+3} + \frac{2(x^2+4x)-(2x-1)\cdot(2x+4)}{(x^2+4x)^2}$$

$$= \frac{4x+5}{2x^2+5x+3} + \frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+4x)^2}$$

3. $f(x) = x^2+x-20 \Big|_{x_0=3} = 9+3-20 = -8$

$f'(x) = 2x+1 \Big|_{x_0=3} = 7 = k$

tečna: $t: y = 7x + q$

$[3;-8] \in t: \ -8 = 7\cdot 3 + q \implies q = -29$

průsečíky paraboly s osami: $f(x)=0 \iff x^2+x-20=0$

$(x+5)(x-4)=0$

$\underline{x=4} \lor \underline{x=-5}$

$P_{x_1} = [4;0]$

$P_{x_2} = [-5;0]$

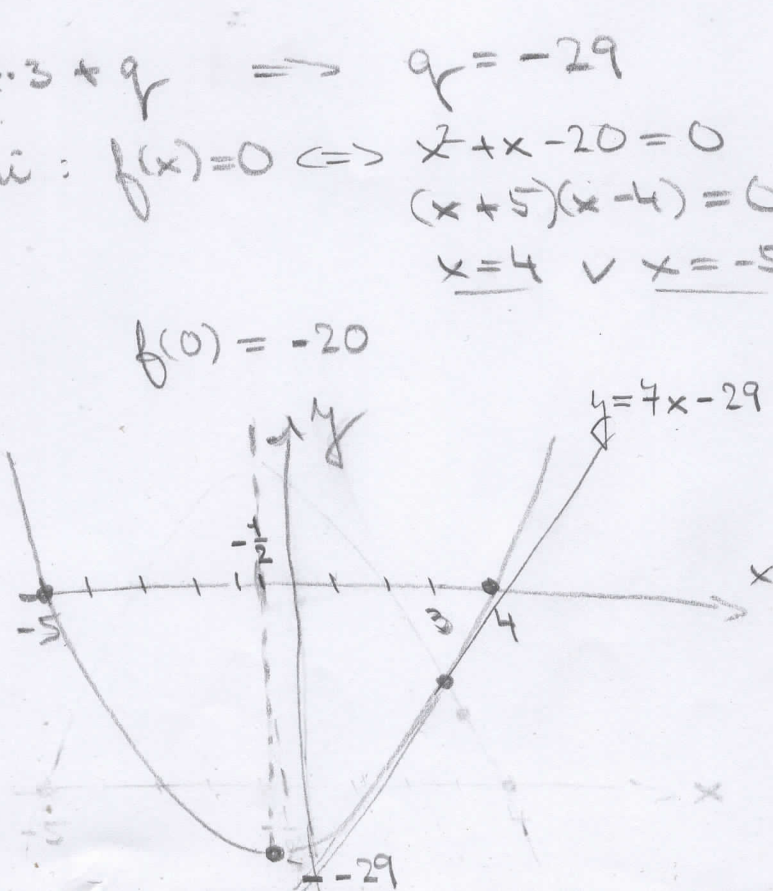
$P_y = [0;20]$

$f(0) = -20$

průsečíky tečny s osami:

$P_x = [\frac{29}{7};0]$

$P_y = [0;-29]$



Vrchol paraboly: $[-\frac{1}{2}; -\frac{81}{4}]$

④ $f(x) = x^3 + 5x^2 - 8x - 12$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$$f(-1) = (-1)^3 + 5\cdot(-1)^2 - 8\cdot(-1) - 12 = -1 + 5 + 8 - 12 = 0$$

$$(x^3 + 5x^2 - 8x - 12) : (x+1) = x^2 + 4x - 12$$
$$\underline{-(x^3 + x^2)}$$
$$4x^2 - 8x - 12$$
$$\underline{-(4x^2 + 4x)}$$
$$-12x - 12$$
$$\underline{-(-12x - 12)}$$
$$0$$

$$x^3 + 5x^2 - 8x - 12 = (x+1)(x^2 + 4x - 12) = (x+1)(x+6)(x-2)$$

průsečíky s osami

$f(x) = 0 \iff x = -1$
$\vee\ x = -6$
$\vee\ x = 2$

$P_{x_1} = [-1;0]$
$P_{x_2} = [6;0]$
$P_{x_3} = [2;0]$
$P_y = [0;-12]$

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 8 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100+96}}{6} = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -4 \end{cases}$$

$f' > 0 \quad -4 \quad f' < 0 \quad \frac{2}{3} \quad f' > 0$

$$f(-4) = (-4)^3 + 5\cdot(-4)^2 - 8\cdot(-4) - 12$$
$$= -64 + 80 + 32 - 12 = 36$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} + 5\cdot\frac{4}{9} - 8\cdot\frac{2}{3} - 12$$
$$= \frac{8 + 60 - 144 - 327}{27} = -\frac{403}{27}$$

lokální maximum: $[-4; 36]$

lokální minimum: $\left[\frac{2}{3}; -\frac{403}{27}\right]$

$$f''(x) = 6x + 10 = 0 \iff x = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$f'' < 0$ $\quad -\frac{5}{3} \quad$ $f'' > 0$

$$\forall x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right): \ f''(x) < 0 \implies \text{funkce je konkávní}$$

$$\forall x \in \left(-\frac{5}{3}, \infty\right): \ f''(x) > 0 \implies \text{funkce je konvexní}$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{125}{27} + \frac{125}{9} + \frac{40}{3} - 12 = \frac{-125 + 375 + 360 - 324}{27} = \frac{286}{27}$$

inflexní bod: $\left[-\frac{5}{3}; \frac{286}{27}\right]$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 + \frac{5}{x} - \frac{8}{x^2} - \frac{12}{x^3}\right) = \infty \cdot (1 + 0 - 0 - 0) = \underline{+\infty}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \underline{-\infty}$$