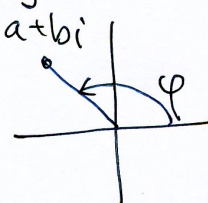


A) Komplexní čísla

1

- $a + bi$, a, b reálná čísla
- Součet $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- Součin $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2 = \left(\underline{i^2 = -1} \right) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i$
- $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ velikost komplex. čísla
(absolutní hodnota)
- \forall pro všechna
 \exists existuje
 $\exists!$ právě jedno
- $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists! r > 0 \exists! \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
 $r = |z|$, 
- $z = a + bi$, $a = \operatorname{Re}(z)$ reálná část
 $b = \operatorname{Im}(z)$ imaginární část
- $\bar{z} = a - bi = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$ kompl. sdružené
- Moirova věta: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow$
 $\Rightarrow z^m = r^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi)$
- Symboly: \mathbb{C} komplexní čísla
 \mathbb{R} reálná čísla

1. Reálná aritmetická $z = \frac{3}{2+3i} = \frac{3(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{6-9i}{13}$ 2

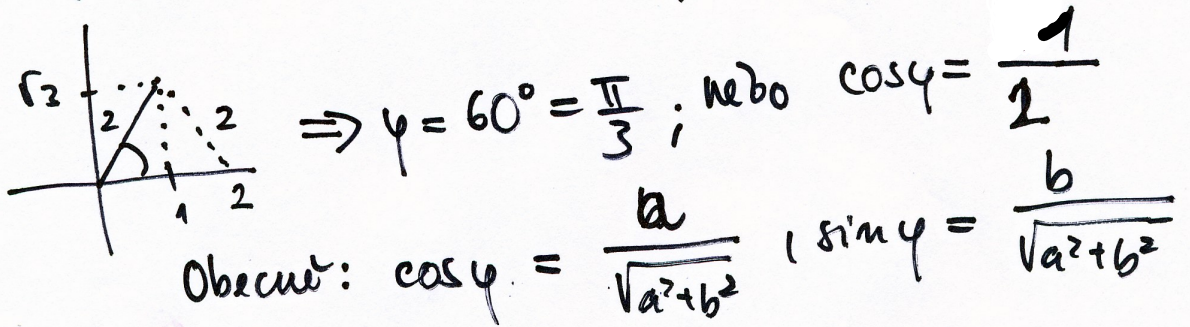
$z \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

$= \frac{6-9i}{13} = \frac{6}{13} - \frac{9}{13}i$

vyásob sdruženým (vozíř)

$Re z = \frac{6}{13}, Im z = -\frac{9}{13}$

2. $z = (1+i\sqrt{3})^3 = ?$ $|z| = \sqrt{1+3} = 2, \varphi = ?$



$(1+i\sqrt{3}i)^3 = [2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})]^3 = 8(\cos \pi + i \sin \pi) = -8$

Pr: $\frac{2}{1-3i}$ Re + Im

1a) 2b) 3a) 3e)

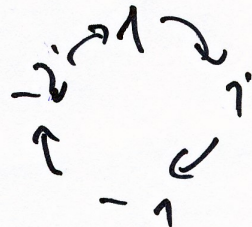
Řešení:

1a) $\frac{2}{1-3i} = \frac{2(1+3i)}{1+9} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

Re Im

2b) $1+i^{123} = 1+i^{120} \cdot i^3 = 1+i^{4 \cdot 30} (-i) = 1-i$

$i^0 = 1$
 $i^1 = i$
 $i^2 = -1$
 $i^3 = -i$



• Binomická rovnice : $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$, $z = ?$ 3

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad a = |a| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$z^n = a \Rightarrow |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |a| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

a) $|z| = \sqrt[n]{|a|}$

\Rightarrow b) $\cos n\varphi = \cos \alpha$ a $\sin n\varphi = \sin \alpha$

$$\Rightarrow n\varphi = \alpha + 2k\pi \text{ nebo } n\varphi = \pi - \alpha + 2k\pi$$

$$\Rightarrow z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

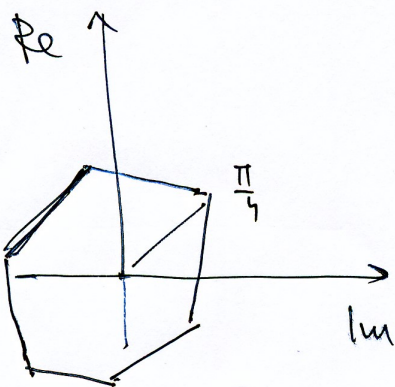
Pr.: $x^6 = -i = a$, $|a| = 1$, $\alpha = \frac{3}{2}\pi$

$$\cos \alpha = \frac{0}{1} \quad a = 0 - 1i \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ nebo } \frac{3}{2}\pi$$

$$\sin \alpha = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\pi \rightarrow \frac{3}{2}\pi \frac{1}{6} = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \sqrt[6]{1} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{6} \right) \right) =$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

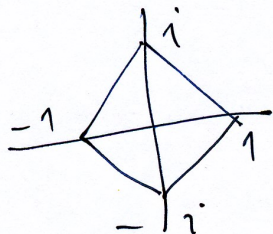


Pr.: $x^4 = 1$

$$x^4 = 1 \quad a = 1, |a| = 1, \varphi = 0$$

4.1

$$x = \sqrt[4]{|a|} \left(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4} \right) = \left(\cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2} \right), k=0,1,2,3$$



$$x_k = 1, i, -1, -i$$

Pr.:

Nerovnosti:

4.2

$$|x+1| + |x-1| \geq 2$$

$$-1, 1$$

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$ x+1 $	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$ x-1 $	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$

a) $-x-1 + (-x)+1 \geq 2$ na $(-\infty, -1)$

$$-2x \geq 2$$

$$\underline{-1 \geq x}$$

$$(-\infty, -1)$$

b) $x+1 - x+1 \geq 2$

$$2 \geq 2$$

na $(-1, 1)$

$$(-1, 1)$$

c) $x+1 + x-1 \geq 2$

$$2x \geq 2$$

$$x \geq 1$$

na $(1, \infty)$

Rěšení je \mathbb{R}

B) Výroky

A, B, C ... "atomický" výrok → složené

výroky : $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$

↑ neplatí A ↑ A a B ↑ A nebo B ↑ Když a, pak b ↓ A, právě

nikdy non A

tedy když B; Dale: (A) závorky.

negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence

Pravdivostní hodnoty: {0, 1}, 1 pravda, 0 nepravda

př.: $(A \Leftrightarrow B) \wedge C, A \wedge (\neg B),$ píšeme $A \wedge \neg B.$
 $(A \wedge B) \Rightarrow C \dots$

Def: $A \wedge B$ je pravdivý, právě tehdy když A je pravdivý i B je pravdivý. NEBO:

Tab.:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

 konjunkce

Def:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Tab.:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

 disjunkce

Def:

[Neúvylučovací nebo. Vylučovací nebo:]

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Implikace : \Rightarrow , když , pak ; pokud , pak ; jestliže , 6
pak . Slovo pak lze vynechat.

Def : $A \Rightarrow B$ je pravdivý' když a jen když , pokud
A je nepravdivý' nebo B je pravdivý'.

$$p(A) \leq p(B)$$

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Př : Pokud přší , je možno

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Pokud je možno , přší .

A	B	$B \Rightarrow A$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$$A \Rightarrow B \neq B \Rightarrow A$$

Ekvivalence : \Leftrightarrow právě když , když

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Def : Větrok je pravdivý' \Leftrightarrow pravdivostní hodnota = 1
pro všechny ohodnocení

Pr.: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$ 7

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$C \wedge D$	$A \Leftrightarrow B$	$E \Leftrightarrow F$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Pr.: 6g $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ pro presnost
dodavam zav.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

$A \Rightarrow B$ implikace

$\neg B \Rightarrow \neg A$ obrnena implikace

Negace implikace: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0

Plah? $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in (a, a + \varepsilon):$

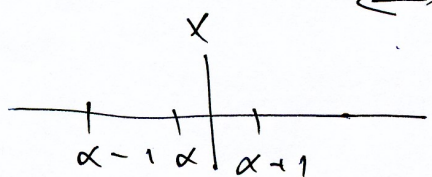
9

$$x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$$

$$x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow a < x < a + \varepsilon$$

$$|x - \alpha| < 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 < x < \alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow x \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$$



Zvolíme $\varepsilon = 1, \alpha = a$

$\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon = 1 \exists \alpha = a \forall x \in (a, a + 1):$

$$x \in (a, a + 1) \Leftrightarrow x \in (a - 1, a + 1) \text{ \textit{řekně.}}$$

D.c.v. $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists x \in (a, a + \varepsilon):$

$$x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$$

C) Množiny

$x \in A$ x je prvkem A

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \cap B = \{x, x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x, x \in A \vee x \in B\}$$

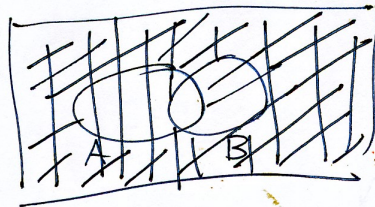
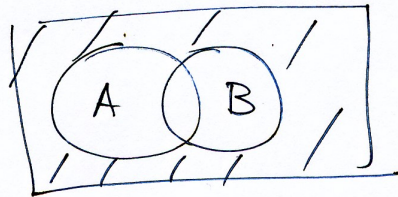
$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

• Pr.: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ Dokažte. 10

$$\begin{aligned} \text{Dk.} \therefore x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C). \quad \square \end{aligned}$$

Použili jsme: $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

Pr.: $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$



$$\begin{aligned} \text{Formálně: } x \in C \setminus (A \cup B) &\Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \\ &\underline{x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in C \setminus A \wedge x \in C \setminus B &\Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin A \wedge \\ &\wedge x \in C \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B. \end{aligned}$$