

Definice 3.39. $L(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

Věta 3.40

Pro každou Laurentovu řadu $L(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ existují právě jedno $r > 0$ a právě jedno $R > 0$, že $L(z)$ konverguje na $P(z_0, r, R)$ a $\forall z \in \mathbb{C} \setminus P(z_0, r, R)$ $L(z)$ nekonverguje.

Důk. Sestrojíme řadu $L(z)$ konverguje $\Leftrightarrow S_+(z)$ a $S_-(z)$ konverguje

$$S_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ konverguje v } z \Leftrightarrow |z-z_0| < R, \text{ kde } R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$S_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n} [(z-z_0)^{-1}]^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n} (w-z_0)^n, \text{ kde } w = (z-z_0)^{-1}. \text{ Také řada konverguje}$$

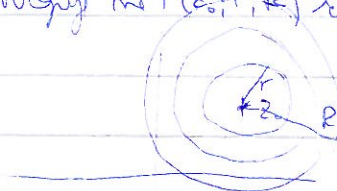
$$\text{tedy } |w-z_0| < r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \Leftrightarrow |z-z_0| > \frac{1}{r} = r$$

(unicita $R = r$) plyne z výše z samostatně

Věta 3.41

$f: P(z_0, r, R)$ je holomorfní fce na prstencovém okolí $P(z_0, r, R)$. Pak existují právě jedna Laurentova řada se středem v z_0 (a poloměrem r, R), již konverguje na $P(z_0, r, R)$ k f .

Důk. z modulu „Ideál“: obdobně jako Cauchyův řádek.



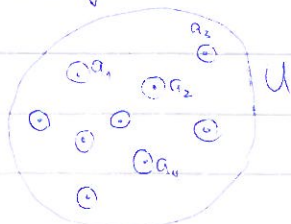
Definice 3.25 Residuum

$f: P(z_0, r, R) \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní fce. Pak a_{-1} v Laurentově řadě se středem v z_0 a poloměry r a R se nazývá residuum f v z_0 a označujeme jej $\text{res}_{z_0} f$.

Definice 3.26

$A \subseteq \mathbb{C}$ je izolované v U , pokud $\exists A \subseteq U$ a

$\exists \forall a \in A, \exists U_a \subseteq U, a \in U_a$ a $\forall a, b \in A, U_a \cap U_b = \emptyset, a \neq b$



Př $Q \subseteq \mathbb{C}, Q \subseteq R = U, Q$ není izolované v R

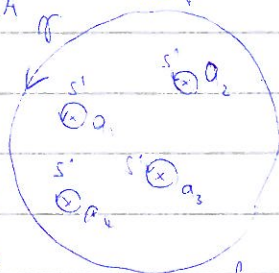
!! Věta 3.42 Residuová věta

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ buď funkce z uzavřené a omezené množiny (oblast) U s komplexními hodnotami. Nechť $A \subseteq \mathbb{C}$ je izolované v U a nechť $f|_{U \setminus A}: U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní. Pak

plati: $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in A} \text{res}_z f(z)$, kde $\gamma = \partial U$.

Dle De Cauchyovy věty $\int f(z) dz = 0$, neb $f|_{U \setminus U_0(z)}$ $U \setminus U_0(z) \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní.

Odtud plyne $\int_{\partial U} f(z) dz = \sum_{z \in A} \int_{\partial U(z)} f(z) dz = 0$



Ukni pro $z \in A$ je $f(z)$ holomorfní v $P(a, C, R)$

$z \in \mathbb{C}$ p'jme, že f má lokální Laurentovy řady se

středem a a poloměry r, R' . Tj. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^a (z-a)^n$ Odtud $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z \in A} \int_{\partial U(z)} f(z) dz =$

$$\sum_{z \in A} \int_{S^1(a, r)} f(z) dz = \sum_{z \in A} \int_{S^1(a, r)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^z (z-z)^n dz = \sum_{z \in A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{S^1(a, r)} C_n^z (z-z)^n dz = \text{(odúvodníme zlemm)} \\ = \sum_{z \in A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i \delta_{n,-1} C_n^z = \sum_{z \in A} 2\pi i C_{-1}^z =$$

je to maximum řádu a tam je důkaz $\rightarrow$ dává $\int a \sum_{n=-1}^{\infty} C_n^z (z-z)^n dz$ LS 1. věty 2.1

$$= \sum_{z \in A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i \delta_{n,-1} C_n^z = \left(\int_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^z (z-z)^n dz \right) = \sum_{z \in A} 2\pi i C_{-1}^z =$$

$$= 2\pi i \sum_{z \in A} \text{res}_z f$$

def

Pozn: formulní jen pro A konečnou



U otevřená a uzavřená neboli kompaktní + každé mělké množině v U má hromadný bod $\Rightarrow$ není izolovaná (pp. konečnosti tož do facts není třeba)

- v počáteční části přezkoumáme pouze budou tyto všechny integrály: $\int R(t) dt, \int R(t) \sin t dt, \int R(t) \cos t dt, \int R(e^t) e^{at} dt$

Definice 3.24

z_0 nazývá hromadný bod $U \subset \mathbb{C}$, pokud $(\forall \delta > 0) (P(z_0; \delta) \cap U \neq \emptyset)$

Pozn: $\exists (z_n), z_n \rightarrow z_0, z_n \in U \iff z_0$ je hromadný bod U p'j $U = \left\{ i + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ -i + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

i je hromadný bod U
-i je hromadný bod U

Př. $U = U(0, R)$ Hromadný bod

Bod $z \in U$ je hustý a $\bar{U} = S'$

Pozn:

hromadný + hromadný bod = der U

Definice 3.28

$a \in U$ se nazývá izolovaná singularita $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, pokud $\exists R > 0, f|_{P(a, 0, R)}: P(a, 0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfní $\xrightarrow{\text{P.2.2}}$ a má izolovanou pro f

a) a má pólový řád $k > 0 \iff a_k = 0 \ \forall l < -k$

b) a má kořen řádu $k > 0 \iff a_k = 0 \ \forall l < k$

c) a má podstatnou singularitu $\iff \forall m \exists m < n \ a_n \neq 0$

Př. $f(z) = -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + z^4$

singularita v bodě $z=0$ je pólový řád 2, 0 není kořen, 0 není podstatná singularita

$f(z) = e^{-1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n (-1)^n$

Lemma 3.43

Nechť $f: U \rightarrow \mathbb{C}, U \subseteq \mathbb{C}, N = \{z \in U \mid f(z) = 0\}, z_0 \in \text{der } N$ a $f|_{U(z_0)}: U(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ není holomorfní. Pak $f \equiv 0$ na $U(z_0)$.

Dk. Dle V.3.42 $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$, lebuší což je nulové neboť f je holomorfní na $U(z_0)$ pro $\delta: f(z) \neq 0$ na $U(z_0) \implies \exists a_p \neq 0$. Vezmi a_p nenulové s minimálním indexem.
 $f(z) = (z - z_0)^p \underbrace{\sum_{k=p}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-p}}_{=: g(z)}, g(z)$ je holomorfní a nenulové z_0 ($a_p \neq 0 \vee z_0$).

Jestliže $g(z)$ holomorfní $\implies$ je spojitá - nenulovost v $z_0 \implies$ nenulovost na nějakém okolí.

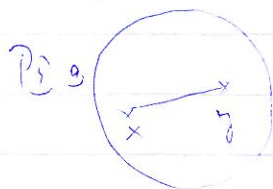
1. $\exists \delta > 0, g(z) \neq 0 \ \forall z \in U(z_0, \delta) \implies f(z) = \underbrace{(z - z_0)^p}_{=0} \underbrace{g(z)}_{\neq 0} \neq 0$ na $U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\} = P(z_0, \delta)$.

$N \cap P(z_0, \delta) = \emptyset, \exists \delta > 0 \ \frac{1}{2} + \delta$

□

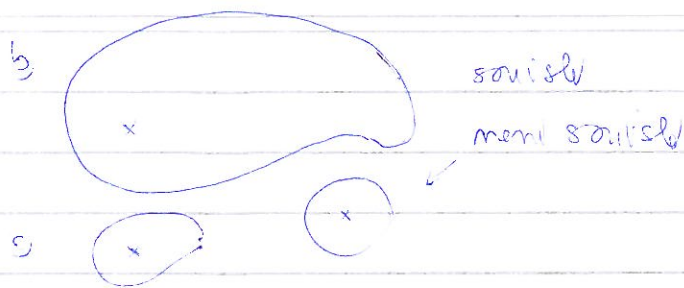
Definice 3.29

U se nazývá souvislá, pokud $\forall x, y \in U, \exists \gamma: [a, b] \rightarrow U, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y$.



$U = U(z_0, R), x, y \in U$ spojitě souvislá

$\gamma(t) = yt + (1-t)x, t \in [0, 1]$

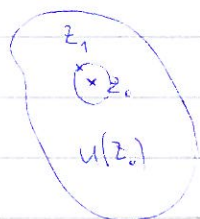


Věta 3.44 Věta o jednoznačnosti holomorfních fce

Nechť U je otevřená a souvislá množina v $\mathbb{C}$ a f holomorfní na U . Označme $N = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$.

Nechť N má hromadný bod v U . Pak $f \equiv 0$ na U .

Dk: $z_0 \in \text{der } N \cap U \xrightarrow{3.43} \exists U(z_0), \tilde{r} \ f|_{U(z_0)} \equiv 0, z \in \overline{U(z_0)} \setminus U(z_0) \xrightarrow{3.43} \exists U(z_1), \tilde{r} \ f|_{U(z_1)} \equiv 0$



Formulováno: Nechť $w_0 \in U$. Uhol souvislá $\Rightarrow \exists \gamma: [0,1] \rightarrow U$
 $\gamma(a) = z_0, \gamma(b) = w_0 \xrightarrow{\text{kompaktní } \gamma} \exists U_1, \dots, U_d, \tilde{r} \bigcup U_i \supseteq \gamma$
 každou podpolyji

Důsledek 3.45

Pokud $f_1, f_2: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfní fce, U je souvislá a $f_1 = f_2$ na N a N má hromadný bod v U .

Pak $f_1 \equiv f_2$ na U .

Dk: $f_1 - f_2 = 0$ na N . Dle 3.44 a $N = N$.

Důsledek 3.45 implikuje, že pokud má nějaká holomorfní fce f v $z_0 \in \mathbb{R}$ rozklad $\sin x$, $z = vx \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \sin x$ na $\mathbb{R}$, $\sin z = \sin x$ na $\mathbb{R}$.

D3.45 $\Rightarrow \sin z = f(z)$ na $\mathbb{R}$ má hromadný bod v $\mathbb{C}$.

Věta 3.46 Liouvilleova věta

Nechť $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ($D_f = \mathbb{C}$) je holomorfní fce a nechť je omezená. Pak $f(z) = \text{konst.}$

Dk:

z 3.42 o existenci Laurentovy řady $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \xrightarrow{\text{Cauchyho věta}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz$

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(z)|}{|z|^{k+1}} dz \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{M}{R^{k+1}} dz = \frac{2\pi \cdot 2M}{2\pi \cdot R^{k+1}} = \frac{M}{R^k}$$

$$|f(z)| \leq M$$

$$R \rightarrow +\infty, k \neq 0, k > 0$$

$$|a_0| \leq M, |a_k| \leq 0 \rightarrow f(z) = a_0$$



Věta 3.47 Zálební věta algebry

Každý polynom stupně alespoň 1 má alespoň jeden kořen.

Dk: $p(z)$ polynom $1 z$, $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a je holomorfní. $\frac{1}{p}$ také holomorfní, náb. pro $\frac{1}{p}$ je max. stup. kořen p .

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{p(z)} \right| = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow +\infty} |p(z)|} = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow \left| \frac{1}{p(z)} \right| < M$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus U(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$$

z def. m. $\in$

$\overline{U(0, R)}$ je komp.

$$f \text{ sp.} = \{f(z) \mid |f(z)| < M\}$$

$$M = \max(M, \varepsilon)$$

$$\text{Leauville} \Rightarrow \frac{1}{p(z)} = \text{konst.}$$

$$p(z) = \frac{1}{\text{konst.}} \quad \downarrow$$

