1. Ukažte z definice limity, že $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

2. Spočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. Zdůvodňujte kroky.

3. Spočtěte $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. Zdůvodňujte kroky.

4. Spočtěte $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-2x}-\frac{x}{x^2-4}\right)$. Zdůvodňujte kroky.
Dále nezmiňuji.

5. Spočtěte $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+\cancel{ab}+a^{n-2}b+b^{n-1})$$

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\dots\pm b^{n-1})$$
n liché

6. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2+2x}$

Ekviv. definice: f spojitá v a $\iff f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$
$(\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\;\; |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$

Věta: f, g spoj. v a $\Rightarrow$ f+g, fg, cf spoj. v a ($c\in\mathbb{R}$)
f, g spoj. v a $\wedge$ $g(a)\neq 0$ $\Rightarrow$ $\frac{f}{g}$ spoj. v a.

„Natvrdo": $\sqrt[n]{x}$ je spojitá v každém bodě svého def. oboru.

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^2}+1}{\sqrt{\frac{3}{x^4}-\frac{6}{x^2}+5}}$

Dále: $\lim_{x\to a^\pm} f(x)=A \iff \forall\varepsilon>0\,\exists\delta$
Def $\forall x\in$ $(a,a+\delta)$: $|f(x)-A|<\varepsilon$ (+)
$(a-\delta,a)$: $|f(x)-A|<\varepsilon$ (−)

8. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}{x}$

1. Ukažte z definice $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

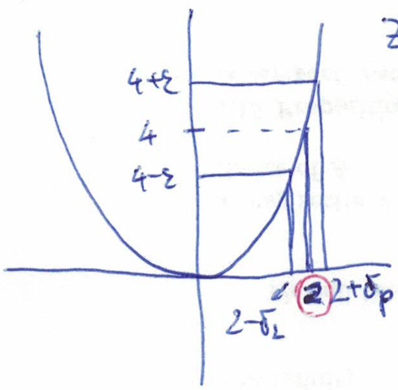
Máme dokázat: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in (2-\delta,2+\delta)\setminus\{2\}\ |x^2-4|<\varepsilon$.

! $|x-a|\le b \iff x\in\langle a-b, a+b\rangle\ \forall b\ge 0$

! $0<|x-a|<b \iff x\in(a-b,a+b)\setminus\{a\}$

Tj. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(2-\delta,2+\delta)\setminus\{2\}\ x^2\in(4-\varepsilon,4+\varepsilon)$.

! Důležitý postřeh/trik: Pokud $\forall \varepsilon\le\varepsilon_0$ jsme nalezli δ, tak pro $\varepsilon_1\ge\varepsilon_0$ můžeme použít toto δ: $x\in(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$ $|f(x)-A|<\varepsilon\le\varepsilon_0\le\varepsilon_1$.
„Pro větší ε je snažší najít δ.“



Z načrtku by mělo být patrné, že δ_L a δ_p jsou různá, $\delta_p<\delta_L$, neboť „čím dále od 0 parabola roste rychleji“!

Rozlišme tedy $2<x<2+\delta \wedge 2-\delta<x<2$.

a) $2<x<2+\delta \Rightarrow 4<x^2<4+4\delta+\delta^2$.
Pokud $4+4\delta+\delta^2<4+\varepsilon$, ověříme splníme $x^2<4+\varepsilon$.
Proto stačí $\delta^2+4\delta-\varepsilon<0$

$$\delta_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\varepsilon}}{2}=-2\pm\sqrt{4+\varepsilon}.$$ Uplatní se $+$, neb chceme $\delta>0$, tj. $\delta_p := -2+\sqrt{4+\varepsilon}$

b) $2-\delta<x<2$. Nyní předpokládejme $\delta<2$, aby násl. úprava byla vůbec důsledková ($-2<1$, ale $4\not<1$).
$2-\delta<x<2 \ /^2\ \ 4-4\delta+\delta^2<x^2<4$. Opět stačí $4-\varepsilon<4-4\delta+\delta^2$
$\delta^2-4\delta+\varepsilon>0$, tj. $\delta_{1,2}=2\pm\sqrt{4-\varepsilon}$. Opět δ menší $2-\sqrt{4-\varepsilon}$, aby $\delta<2$. $\delta_L=2-\sqrt{4-\varepsilon}$. Obtíž ale je $\varepsilon>4$. Na to použijeme Důležitý postřeh/trik, tj. pro $\varepsilon>4$ stačí vzít lib. δ_p pro $\varepsilon<4$.

c) Definice limity vyžaduje jedno δ. Zvol $\delta := \min\{\delta_L,\delta_p\}$, na $(2-\delta,2+\delta)\setminus\{2\}$ jsme vykrytí, neb je „menší“ než $(2-\delta_{L,p},2+\delta_{L,p})\setminus\{2\}$.
Formálně: $x\in(2-\delta,2+\delta)\setminus\{2\} \Rightarrow \cancel{x\in(2-\delta_L,2+\delta_L)\setminus\{2\}\ \wedge}$ $\cancel{x\in(2-\delta_p,2+\delta_p)\setminus\{2\}}$ („zdlouhavé“) $\Rightarrow x\in(2,2+\delta)$ nebo $x\in(2-\delta,2) \Rightarrow$ a) $x\in(2,2+\delta) \Rightarrow x\in(2,2+\delta_p)$ $(\delta_p>\delta)$,

tj. $2 < x < 2 + \delta_p$. Umocněním, což je důsledková úprava, dostanu

~~$4 < x^2 < 4 + (-2 + \sqrt{4+\varepsilon})^2 = 4 + 4 - 4\sqrt{4+\varepsilon} + 4 + \varepsilon$~~

$$4 < x^2 < 4 + 4\delta_p + \delta_p^2 = 4 + 4(-2 + \sqrt{4-\varepsilon}) + 4 - 4\sqrt{4+\varepsilon} + 4 + \varepsilon = 4 + \varepsilon.$$

Analogicky b) (dodělejte).

D.cv. Ukažte z def. limity $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Podle k VOAL a lemmatu.

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-x-1)} = \frac{0^2-1}{-1} = 1$$

$\ne 0$ (VOAL mohu použít)

3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} (2x^2-x-1) = 0$, tedy VOAL nemohu použít. Je ale i $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ (a $f(1) = 0$); $x=1$ je kořenem f i g, možnost vykrácení?). Zkusme $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} \overset{x\ne 1}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1+1}{2\cdot 1+1}.$$

Z def. limity $0 < |x-1| < \delta$ plyne, že $x \ne 1$, nás nezajímá"

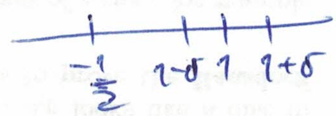
VOAL už lze

„Nezajímá" ≃ máme lemma $f = g$ na $P_\delta(a) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f = \lim\limits_{x\to a} g$

pokud aspoň jedna $\exists$, minule

Pozn.: Výraz není definován ani v $x = -\frac{1}{2}$, ale δ můžeme zvolit dost. malé, aby $-\frac{1}{2} \notin (1-\delta, 1+\delta)\setminus\{1\}$.

Přesněji: zvolím-li $\delta \ge \frac{3}{2}$, mohu vzít i $\delta < \frac{3}{2}$ a výraz $|f - A| < \varepsilon$ odhadnu přinejmenším stejně dobře



4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-2x}-\frac{x}{x^2-4}\right)$. Nelze použít ani VOAL pro lim součtu, přinejmenším proto, že limity sčítanců neumím spočíst (VOAL). (Dokonce později zjistím, že lim 1. neexistuje a 2. neexistuje jako „vlastní" → později.) Zkusme tedy lemma o rovnosti na „prstencovém okolí a „slepit".

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-2x}-\frac{x}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-x(x)}{(x-2)x(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(-\cancel{x+2})(x+1)}{(\cancel{x-2})x(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+1)}{x(x+2)}=-\frac{3}{8}$$

(opět) podmíněná rovnost, tj. $\underline{a}=\underline{b}$, pokud $\underline{b}$ existuje (z neexistence $\underline{b}$ $\not\Rightarrow$ neexistence $\underline{a}$!).

Tj. $\exists\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a}=\underline{b}$, tj. $\underline{a}\neq\underline{b} \Rightarrow \nexists\, b$

$\not\Rightarrow$ = neplyne.

Pokud prší ⇒ mokro; pokud neprší stále může být mokro (a pokud je mokro, nemusí pršet...)

5. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{(x-1)(x-4)}+\frac{x-4}{3(x-1)(x-2)}\right)$$

proč nejde VOAL už sám!

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+2)(x-2)+(x-4)(x-4)}{3(x-1)(x-4)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{4x^2-8x+4}^{=4(x-1)^2}}{3(x-1)(x-4)(x-2)}=$$

Lemma o rovnosti na prstencovém

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)}{3(x-4)(x-2)}\overset{\text{VOAL}}{=}0.$$

$3(0-4)(0-2)\neq 0$

6. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2+2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x^2-3x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{x(x-1)\cancel{(x-2)}}$$

$$\underset{\text{lemma}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+4)}{x(x-1)}=6.$$

Před 7 si přečtete 1-stranu s minimem o spojitosti a pozn. o sp. $\sqrt[n]{}$ a definici limit zleva a zprava.

rozšířím

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2}{x^2}+1}{\sqrt{\frac{3}{x^4}-\frac{6}{x^2}+5}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+x^2}{\sqrt{3-6x^2+5x^4}} = \dfrac{2+0}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

opět lemma ($x \neq 0$ „nezajímá") — spoj. $\sqrt{}$

8. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} - \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}{x} = \dfrac{|x|}{x}\,\dfrac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} - \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$ pro $x>0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^2-(1-x^2)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{+2x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} \overset{\text{LEMMA}}{=} \lim \frac{+2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{\overset{\text{VOAL}}{=} \frac{+2}{2} = +1}$$

Použili jsme: $|x|\sqrt{y} = \sqrt{x^2 y}$; $x\sqrt{y} = \sqrt{x^2 y}$ neplatí ($x<0 \wedge y \neq 0$).

Zmínili jsme: $x^n - 2x + 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x - 1)$

Věnujte pozornost ještě opakovacímu příkladu:

$|x-1| - |x+3| < 1,\ x \in \mathbb{R}$. Připomenu $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Nulové body: $1, -3$

	$\lvert x-1\rvert$	$\lvert x+3\rvert$
$(-\infty,-3\rangle$	$1-x$	$-x-3$
$(-3,1\rangle$	$1-x$	$x+3$
$(1,\infty)$	$x-1$	$x+3$

a) $x \in (-\infty,-3\rangle$
$1-x+x+3<1$
$4<1$ n.ř.

b) $x \in (-3,1\rangle$ $1-x-x-3<1$
$-2x<3$
$x>-\frac{3}{2}$
$(-\frac{3}{2},1\rangle$

c) $x \in (1,\infty)$: $x-1-x-3<1$
$x \in (1,\infty)$.

Celkem: $x \in (-\frac{3}{2},\infty)$ je řešení!