Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Diplomová práce

Karel Pazourek

Kontaktní geometrie typu $\mathbf{F}_4$

Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.

Studijní program: Matematika, matematické struktury

Děkuji především vedoucímu své diplomové práce, RNDr. Svatopluku Krýslovi Ph.D., za jeho obětavou a vytrvalou pomoc. Děkuji také své rodině za podporu při psaní této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 10. 8. 2007 Karel Pazourek

Obsah

Název práce: Kontaktní geometrie typu F_4
Autor: Karel Pazourek
Katedra (ústav): Matematický ústav UK
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
e–mail vedoucího: `krysl@karlin.mff.cuni.cz`
Abstrakt: Tato práce navazuje na problémy týkající se vztahu triality oktonionů a výjimečných Lieových grup. Oktoniony jsou zavedeny pomocí normovaných algeber a Cayleyho–Dicksonova procesu, je uveden jejich vztah k projektivním prostorům a projektivním rovinám, zvláště pak k Moufangové rovině. Pomocí realizace komplexních spin grup $Spin\,(8,\,\mathbb{C})$ a $Spin\,(9,\,\mathbb{C})$ jako grup jistých komplexifikovaných oktonionových matic je dokázáno, že na Moufangově rovině $\mathbb{OP}_0^2$ má komplexní výjimečná Lieova grupa F_4 tranzitivní akci. Protože je komplexní Moufangové rovina projektivní varieta ve smyslu algebraické geometrie, izotropní podgrupa této akce musí být parabolickou podgrupou grupy F_4. Pomocí tvrzení o existenci jediné ireducibilní 26-dimenzionální reprezentace grupy F_4, dokázané Weylovou dimenzionální formulí, je tato parabolická podgrupa určena jako podgrupa P_4 příslušející ke škrtnutému čtvrtému vrcholu v Dynkinově diagramu grupy F_4. Parabolická podalgebra $\mathfrak{p}_1$ asociovaná k prvnímu škrtnutému vrcholu v Dynkinově diagramu grupy F_4 zadává kontaktní gradaci Lieovy algebry $\mathfrak{f}_4$. K parabolickým podalgebrám $\mathfrak{p}_1$ a $\mathfrak{p}_4$ jsou pak spočítány Hasseho diagramy. V práci se nachází řada ilustrujících tvrzení a názorných příkladů, stejně tak přehled potřebné teorie.
Klíčová slova: F4, oktoniony, Moufangové rovina, kontaktní gradace

Title: Contact geometry of the type F_4
Author: Karel Pazourek
Department: Mathematical Institute of Charles University
Supervisor: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
Supervisor's e–mail address: `krysl@karlin.mff.cuni.cz`
Abstract: This diploma thesis continues in the recent discussion about the connections between the triality of the octonions exceptional Lie groups. The octonions are defined in the terms of normed algebras by the Cayley–Dickson process, then their relation to the projective spaces and the projective planes, especially to the Moufang plane, is presented. We proved that the complex exceptional Lie group F_4 acts transitively on the Moufang plane $\mathbb{OP}_0^2$ by realization of the complex spin groups $Spin\,(8,\,\mathbb{C})$ and $Spin\,(9,\,\mathbb{C})$ as groups of certain complexified octonion matrices. Because the complex Moufang plane is a projective manifold in the sense of algebraic geometry, the isotropic subgroup of this action is a parabolic subgroup of the group F_4. A proposition about the existence of the unique irreducible 26-dimensional representation of the group F_4 (proved by Weyl dimensional formula) is given. The corresponding parabolic subgroup coincides with the subgroup P_4 associated to the fourth crossed node of the Dynkin diagram of the group F_4. The parabolic subalgebra $\mathfrak{p}_1$ associated to the first crossed node of the Dinkin diagram of the group F_4 provides a contact grading of the Lie algebra $\mathfrak{f}_4$. The Hasse diagrams associated to the parabolic subalgebras $\mathfrak{p}_1$ and $\mathfrak{p}_4$ are enclosed. This thesis contains several ilustrating claims and examples, as well as a summary of a necessary theory.
Keywords: F4, octonions, Moufang plane, contact gradings

1. Úvod

Každá metoda je rytmus: Když jsme ztratili rytmus světa, ztratili jsme i svět. Každý člověk má svůj individuální rytmus. – Algebra je poezie. Rytmická mysl je génius.

Novalis

Pro takovou báseň
jíž smrt nedůvěřuje
je hodno zemřít.

Ewa Lipska

V nedávné době se začala v odborné časopisecké literatuře objevovat témata související s trialitou (význačné Jordanovy algebry, oktoniony, výjimečné jednoduché Lieovy grupy), se strunovou teorií bosonů na 26-dimenzionálních varietách a nakonec s tzv. parabolickými geometriemi, viz např. článek Landsberg, Manivel [17] nebo diplomovou práci Wienbergové [20], přehledový článek Baeze [2] a monografii Čap, Slovák [4].
Do popředí v souvislosti s trialitou (viz clanek Baeze [2]) vstoupila tzv. Moufangové projektivní rovina nazývaná také Cayleyho projektivní rovina, jejíž základní výzkum je předmětem této práce. Poznamenejme nejprve, že pod termínem Cayleyho nebo Moufangové rovina (v práci a dále jsme upřednostnili používat již jen výraz Moufangové) míníme tzv. komplexní Moufangové rovinu narozdíl od roviny reálné. (Komplexní) Moufangové rovina je definována jako projektivizace výjimečné Jordanovy algebry komplexifikovaných hermitovských oktonionových matic typu 3×3. Chceme-li totiž definovat projektivní prostory nad normovanou algebrou oktonionů $\mathbb{O}$, popř. nad její komplexifikací, nelze užít standardní přístup užívající přímkové prostory v příslušném vektorovém prostoru $\mathbb{O}^n$, neboť zmíněná algebra oktonionů není asociativní a příslušná relace není ekvivalence. Z těchto důvodů je nutné „projektivní rovinu nad oktoniony" definovat jinak. O Moufangové rovině, definované tak, jak je uvedeno výše, tj. pomocí Jordanovy algebry hermitovských komplexifikovaných oktonionových matic typu 3×3, lze dokázat, že její projektivní dimenze je skutečně dva (na rozdíl od dimenze této roviny jako reálné diferencovatelné variety, která je 30). Navíc z výsledků Moufangové (viz Wienbergová [20]) nutně plyne, že v této rovině neplatí Desarguesův axiom, neboť právě její souřadnicový okruh netvoří asociativní algebru.
V poslední době je také věnována systematická pozornost varietám s význačnou strukturou, jako jsou např. konformní, projektivní, kontaktní projektivní nebo Cauchy-Riemannovy struktury, které tvoří speciální příklad geometrií, jež ve dvacátých létech minulého století zavedl Elie Cartan pod jménem *espace generalise* a které dnes bývá zvykem označovat termínem Cartanovy geometrie. Stručně lze říci, že Cartanovy geometrie představují deformaci tzv. homogenních modelů, což jsou diferencovatelné variety typu G/H, kde G je Lieova grupa a H její uzavřená podgrupa, tak jako Riemannovy variety jsou v jistém smyslu deformovanou verzí homogenní Eukleidovy roviny $\mathbb{R}^n \simeq (O(n) \ltimes \mathbb{R}^n)/O(n)$. Homogenní modely (někdy též nazývané Kleinovými geometriemi) zavedl jako základní objekt výzkumu geometrie Felix Klein ve svém Erlan-

genském programu. Moufangové rovinu lze prezentovat jako homogenní model, a to speciálního typu, jak je v této práci ukázáno. Poznamenejme, že společný všem výše vyjmenovaným strukturám je fakt, že jsou Cartanovou geometrií, jejíž strukturní grupa je parabolickou podgrupou některé konkrétní jednoduché Lieovy grupy. Tyto geometrie bývá v současnosti zvykem označovat termínem parabolické geometrie.
V této práci je explicitně dokázána existence difeomorfizmu Moufangové roviny a homogenního prostoru F_4/P_4, kde P_4 je jistá parabolická podgrupa F_4, a eo ipso i fakt, že Moufangové rovina je homogenním modelem jisté parabolické geometrie. Zmíněný difeomorfizmus je expertům pracujícím v tomto poli výzkumu znám zrovna tak, jako je známo, že explicitní důkaz difeomorfnosti těchto prostorů v literatuře chybí [1]. Metody použité námi k odvození difeomorfnosti jsou založeny na užití reprezentační teorie jednoduchých komplexních Lieových algeber a základních faktů o komplexních Cliffordových algebrách pro nedegenerovanou bilineární formu, přičemž tranzitivita akce výjimečné Lieovy grupy F_4 (míníme komplexní Lieovu grupu F_4) je dokazována analogicky k důkazu tranzitivity reálné kompaktní formy F_4 na reálné Moufangové rovině, viz např. Harvey [9] a Wienbergová [20]. Výpočet izotropní podgrupy zmíněné akce je založen na faktu říkajícím, že (komplexní) Moufangové rovina je projektivní varieta ve smyslu algebraické geometrie, a proto musí být izotropní grupa parabolickou podgrupou grupy F_4. K jejímu explicitnímu určení je použita reprezentační teorie. Stěžejním tvrzením se stává věta, že existuje jediná ireducibilní 26-dimenzionální reprezentace F_4, kterou jsme dokázali pomocí Weylovy dimenzionální formule za užití počítačové výpočetní techniky.
Ukazuje se, že systematický výzkum variet s parabolickou strukturou vyžaduje také porozumnění kohomologiím Lieovy algebry příslušné parabolické grupy s hodnotami v ireducibilních reprezentacích (nejčastěji v adjungované), neboť jejich prvky jsou některé geometrické veličiny, jako např. křivost příslušné geometrie. Z těchto důvodů tvoří podstatnou část práce výpočet tzv. Hasseho diagramů, které zachycují strukturu kohomologií, jak plyne z tzv. Kostantovy verze Bottovy-Borelovy-Weilovy věty. V případě Moufangové roviny obsahuje Hasseho diagram v místě odpovídajícím druhé kohomologii jen jeden vrchol, a proto mají křivosti parabolických geometrií téhož typu, jako je Moufangové rovina, jen jednu ireducibilní komponentu.
Byť strunová teorie bosonů přinesla mnohé fyzikálně nepřípustné kvality, viz např. existenci tachyonů, zájem o ní motivoval k mnohým výsledkům v matematice, jako např. výpočet spektra Diracova operátoru na standardní spin struktuře nad reálnou Moufangové rovinou s tzv. Killingovou metrikou, viz diplomovou práci Wienbergové [20], která tak představuje aktuálně poslední případ výpočtu spektra Diracova operátoru. Jelikož Hasseho diagramy, tj. speciálně i ty, které jsou v práci spočteny, odpovídají na jedné straně homomorfizmům nepravých Vermových modulů, na druhé straně struktuře nesingulárních standardních diferenciálních operátorů na asociovaných vektorových bandlech k hlavnímu homogennímu bandlu, poskytují tak informace o možných rovnicích, jejichž splnění lze požadovat po fyzikálních polích šířících se na podkladové struktuře bosonové strunové teorie.
Kromě zmíněného důkazu tranzitivity, výpočtu Hasseho diagramů a důkazu toho, že Moufangové rovina je homogenní model parabolické geometrie, se v práci nacházejí také drobná ilustrující tvrzení (převážně o normovaných algebrách) a ilustrující příklady (ze-

[1] Soukromá korespondence s J. Landsbergem, viz [16].

jména v kapitole o kohomologii Lieových algeber). Jelikož teorie používané k odvození zmíně- ných výsledků nepatří mezi standardně vyučované během magistarského studia a abychom tak případnému čtenáři usnadnili studium této práce, tvoří značnou část textu shrnutí používaných výsledků, metod a vysvětlení pojmů, s kterými se pracuje. Na tuto práci lze navázat např. v následujících směrech: Jednak mohou být zkoumány Hasseho diagramy popisující nestandardní popř. singulární invariantní diferenciální operátory, jednak lze zkoumat popis invariantních složek křivosti příslušného deformovaného modelu.

Práce je rozdělena do deseti kapitol. První kapitolu této práce tvoří úvod. V druhé kapitole se zavádí oktoniony jako normovaná algebra pomocí Cayleyho–Dicksonova procesu. Jsou zde zmíněny Jordanovy algebry. Třetí kapitola shrnuje základní definice a pojmy teorie projektivních prostorů: projektivní prostor, projektivní rovina, projektivní dimenze. Jako význačné příklady projektivních prostorů jsou popsány projektivní prostory nad tělesy a Fanova rovina. Závěr kapitoly se zabývá Desarguesovým axiomem a alternativní definicí projektivních prostorů nad oktoniony. Čtvrtá kapitola obsahuje potřebné pojmy z teorie Lieových grup a algeber a reprezentací Lieových algeber. Dále jsou zde uvedeny Cliffordovy algebry a známé poznatky o spin grupách. Pátá kapitol v krátkosti seznamuje se základními pojmy teorie parabolických podalgeber a gradací Lieových algeber. Šestá kapitola se zabývá kohomologiemi Lieových algeber a Hasseho diagramy. Jako motivační příklad jsou zde spočítány kohomologie algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. V sedmé kapitole se dávají do vztahu grupa F_4 a Moufangové rovina: Pomocí realizace spin grup $Spin\,(8, \mathbb{C})$ a $Spin\,(9, \mathbb{C})$ jako grup jistých matic nad komplexifikovanými oktoniony je dokázána věta, že grupa F_4 má tranzitivní akci na Moufangové rovině $\mathbb{OP}^2_0$. Osmá kapitola o Lieově algebře $\mathfrak{f}_4$ sestává jednak z přehledu vlastností kořenového systému algebry $\mathfrak{f}_4$ a výpočtů Hasseho diagramů pro některé parabolické podalgebry, jednak z tvrzení o jednoznačnosti 26-dimenzionální reprezentace grupy $\mathfrak{f}_4$ dokázané prostředky teorie Lieových algeber. Devátá kapitola je označena jako Přílohy: Uvadí výpočty potřebné v důkazu Věty 8.5.3. K práci je připojen seznam použité literatury a literatury určené k dalšímu studiu problémů, kterých se tato práce týká.
Součástí práce je také 10 obrazků a 4 tabulky.

2. Oktoniony

Oktoniony představují další z „číselných oborů“: Po reálných a komplexních číslech byla objevena 16. října 1843 Williamem R. Hamiltonem nekomutativní algebra kvaternionů a následně v prosinci 1843 John T. Graves objevil neasociativní algebru oktonionů. Graves jim říkal „octaves“, oktávy. V literatuře se objevuje i název „Cayley numbers“, Cayleyho čísla.
V této kapitole je stručně pojednáno o reálných algebrách, podílových algebrách a Cayleyho-Dicksonově konstrukci, pomocí níž lze oktoniony zkonstruovat. Na závěr zmiňujeme Jordanovy algebry, zvláště pak oktonionovou výjimečnou reálnou Jordanovu algebru.
Více informací o oktonionech lze nalézt v často citovaném shrnujícím Baezově článku [2] nebo v práci Wienbergové [20].

2.1. Podílové algebry

Definice 2.1.1: *Reálná algebra* A je reálný vektorový prostor s jednotkou 1 a $\mathbb{R}$-bilineární formou $m : A \times A \to A$, zvanou *násobení*, splňující $m(1, a) = a = m(a, 1)$ pro každé $a \in A$. Dále budeme násobení $m(a, b)$ značit ab.

Definice 2.1.2: Reálná algebra A se nazývá *podílová algebra*, pokud pro každé dva její prvky a,b platí: Jestliže $ab = 0$, potom $a = 0$ nebo $b = 0$.

Definice 2.1.3: Buď $\mathbb{V}$ reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Normu* na $\mathbb{V}$ indukovanou $\langle \cdot , \cdot \rangle$ definujeme standardním předpisem

$$|v| := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \qquad v \in \mathbb{V}.$$

Dále budeme značit *kvadrát normy* příslušnou kvadratickou formu

$$\|v\| := \langle v, v\rangle, \qquad v \in \mathbb{V}.$$

Definice 2.1.4: Algebra A se nazývá *normovaná algebra*, pokud na A jako vektorovém prostoru je dána norma taková, že kvadrát normy $\| \ \|$ pro všechny $a, b \in A$ splňuje $\|ab\| = \|a\| \, \|b\|$.

Poznámka 2.1.5: Každá normovaná algebra A je podílovou algebrou: Vezměme $a, b \in A$ takové, že $ab = 0$. Pak $0 = \|ab\| = \|a\| \, \|b\|$. Ze skutečnosti, že reálná čísla jsou podílovou algebrou, plyne, že $\|a\| = 0$ nebo $\|b\| = 0$. Pozitivní definitnost skalárního součinu konečně dává $a = 0$ nebo $b = 0$.
Dále zřejmě díky rovnosti v definici 2.1.4platí $\|1\| = \|1 \cdot 1\| = \|1\| \, \|1\|$ a díky pozitivní definitnosti $\langle \cdot , \cdot \rangle$ je $\|1\| = 1$.

Definice 2.1.6: Buď A normovaná algebra. Pak značíme $\operatorname{Re} A$ vektorový podprostor A nad $\mathbb{R}$ generovaný jednotkou $1 \in A$. $\operatorname{Re} A$ se nazývá *reálná část* A. Ortogonální doplněk k $\operatorname{Re} A$ značíme $\operatorname{Im} A$ a nazýváme *imaginární část* A.

Poznámka 2.1.7:
1) Reálná část A je izomorfní $\mathbb{R}$, přičemž izomorfizmus $\mathbb{R} \to \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(1)$ je například dán předpisem $r \mapsto r1$, $r \in \mathbb{R}$.
2) Imaginární část A tvoří nadrovinu v A.
3) Každý prvek $a \in A$ lze jednoznačně rozložit na
$$a = a_R + a_I, \qquad \text{kde } a_R \in \mathrm{Re}\, A \text{ a } a_I \in \mathrm{Im}\, A.$$
Pak značíme $\mathrm{Re}\,(a) := a_R$ (tzv. *reálná část* a) a $\mathrm{Im}\,(a) := a_I$ (tzv. *imaginární část* a).

Definice 2.1.8: Buď A normovaná algebra. Pak zobrazení
$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : A &\to A \\ a = \mathrm{Re}\,(a) + \mathrm{Im}\,(a) &\mapsto \bar{a} := \mathrm{Re}\,(a) - \mathrm{Im}\,(a) \end{aligned}$$
se nazývá *konjugace* na A.

Poznámka 2.1.9:
1) Značíme $a\bar{b} := a(\bar{b})$, na rozdíl od $\overline{(ab)}$.
2) Zjevně platí vztahy $\mathrm{Re}\,(a) = \frac{1}{2}(a + \bar{a})$ a $\mathrm{Im}\,(a) = \frac{1}{2}(a - \bar{a})$.

Lemma 2.1.10: Buď A normovaná algebra s konjugací $\bar{\ }$ a kvadrátem normy $\|\cdot\|$. Pak platí:
1) $\overline{(\bar{a})} = a$, $a \in A$;
2) $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$, $a, b \in A$;
3) $a\bar{a} = \|a\|$, $a \in A$;

Důkaz: Je uveden v práci Wienbergové [20]. $\square$

Definice 2.1.11: Řekneme, že algebra A má *multiplikativní inverzní prvky*, jestliže ke každému nenulovému prvku $a \in A$ existuje prvek $a^{-1} \in A$ tak, že $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$. Prvek a^{-1} se nazývá *inverzní prvek* k prvku $a \in A$.

Tvrzení 2.1.12: Normovaná asociativní algebra A má multiplikativní inverzní prvky právě tehdy, když je podílovou algebrou.

Důkaz: Nechť A má multiplikativní inverzní prvky a pro některé $a, b \in A$ platí $ab = 0$. Pokud $a = 0$, je podmínka podílové algebry splněna. Nechť $a \neq 0$. Pak a má inverzní multiplikativní prvek a^{-1} a $b = 1b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$.
Nechť A je normovanou podílovou algebrou. Pak lze definovat multiplikativní inverzní prvek k $a \in A$ pomocí $a^{-1} := \frac{\bar{a}}{\|a\|}$. $\square$

Definice 2.1.13: Algebra A se nazývá *alternativní*, pokud pro každé dva prvky $a, b \in A$ platí $(aa)b = a(ab)$, $(ab)a = a(ba)$ a $b(aa) = (ba)a$.

Poznámka 2.1.14: Zřejmě alternativita je nutná podmínka asociativity a asociativita postačující podmínkou alternativity.

Příklad 2.1.15: Kvaterniony $\mathbb{H}$ tvoří asociativní algebru: Násobení na bázi kvaternionů je definováno následovně:

$\cdot$	1	$\imath$	$\jmath$	$\imath\jmath$
1	1	$\imath$	$\jmath$	$\imath\jmath$
$\imath$	$\imath$	-1	$\imath\jmath$	$-\jmath$
$\jmath$	$\jmath$	$-\imath\jmath$	-1	$\imath$
$\imath\jmath$	$\imath\jmath$	$\jmath$	$-\imath$	-1

Tabulka 1

Oktoniony $\mathbb{O}$ tvoří alternativní, nikoliv však asociativní algebru: Jejich násobení je definováno na prvcích báze $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ následovně:

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Tabulka 2

Z tabulky je patrné, že oktoniony nejsou ani asociativní (například $(e_1e_2)e_3 = -e_6$ a $e_1(e_2te_3) = e_6$) ani „antiasociativní" (tj. $(ab)c \neq -a(bc)$ pro nějaká $a, b, c \in \mathbb{O}$, například $(e_1e_2)e_4 = -1$ a $e_1(e_2e_4) = -1$). Alternativnost oktonionů dokážeme v souvislosti s Fanovou rovinou v Tvrzení 3.3.4. Alternativita tedy není postačující podmínkou asociativity.
Dále platí, že „násobení následníků se zachovává" v následujícím smyslu:

$$\forall i, j, k \in \mathbb{Z}_7 : e_ie_j = e_k \Rightarrow e_{i+1}e_{j+1} = e_{k+1}.$$

Rovněž při „zdvojování indexu" se násobení zachovává:

$$\forall i, j, k \in \mathbb{Z}_7 : e_ie_j = e_k \Rightarrow e_{2i}e_{2j} = e_{2k}.$$

2.2. Cayleyova-Dicksonova konstrukce

Věta 2.2.1: Buď A normovaná algebra. Položme $A' := A \oplus A$ (ve smyslu vektorového prostoru)[1]. Vektorový prostor A' s následujícími vlastnostmi a zobrazeními je normovaná algebra:

[1] Symbolem $A \oplus A$ míníme součet dvou různých izomorfních kopií A.

1) Pro a, b, c, $d \in A$ definujeme násobení na A' předpisem

$$(a,\, b)(c,\, d) := (ac - \bar{d}b,\, da + b\bar{c})$$

a jednotku $(1,\, 0) \in A'$.
2) Algebra A je přirozeným způsobem vložena do A', a to zobrazením $A \ni a \mapsto (a,\, 0)$.
3) Kvadrát normy $\| \; \|'$ na A' je dán předpisem

$$\|(a,\, b)\|' := \|a\| + \|b\|, \qquad a,\, b \in A.$$

Skalární součin $\langle \cdot\,, \cdot \rangle'$ na A' je dán skalárním součinem na A a podmínkou, že kopie A v A' jsou ortogonální v tomto skalárním součinu.
4) Konjugace $\bar{\ }'$ na A' je

$$\bar{\cdot}' : A' \to A', \quad (a, b) \mapsto (\bar{a}, -b), \qquad a,\, b \in A.$$

5) Reálná a imaginární část je pak definována stejně jako v A (viz Poznámku 2.1.9, bod 2).

Definice 2.2.2: Popsaná konstrukce normované algebry A' z normované algebry A se nazývá *Cayleyho–Dicksonova* nebo též *Cayleyho–Dicksonův proces*. Algebra A' se nazývá *Cayleyho iterace* algebry A.

Poznámka 2.2.3: Snadno ověříme, že

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}' \simeq \mathbb{C} \;\; \textit{komplexní čísla},\\
&\mathbb{C}' \simeq \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}'' \;\; \textit{kvaterniony},\\
&\mathbb{H}' \simeq \mathbb{O} \;\; \textit{oktoniony}.
\end{aligned}$$

Například ověřme, že $\mathbb{C}' = \mathbb{H}$:
Prvku $(a + b\imath, c + d\imath) \in \mathbb{C}'$ odpovídá kvaternion $a + b\imath + c\jmath + d\imath\jmath$. Vynásobením dvou kvaternionů $a + b\imath + c\jmath + d\imath\jmath$, $e + f\imath + g\jmath + h\imath\jmath$, $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$\begin{aligned}
(a + b\imath + c\imath\jmath + d\imath\jmath)(e + f\imath + g\jmath + h\imath\jmath) =&(ac - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)\imath +\\
&+(ag - bh + ce + df)\jmath + (ah + bg - cf + de)\imath\jmath,
\end{aligned}$$

vynásobením jim odpovídajícím prvkům v $\mathbb{C}'$ dostaneme

$$\begin{aligned}
(a + b\imath,\, c + d\imath)(e + f\imath,\, g + h\imath) =&((ac - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)\imath,\\
&(ag - bh + ce + df) + (ah + bg - cf + de)\imath),
\end{aligned}$$

tedy součiny si odpovídají. Vložení $\mathbb{C}$ do $\mathbb{H}$ je zřejmé, stejně tak kvadrát normy. Konjugovaný prvek k $(a+b\imath,\, c+d\imath) \in \mathbb{C}'$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, je $(\overline{a + b\imath},\, -c-d\imath) = (a-b\imath,\, -c-d\imath)$, což odpovídá $a - b\imath - c\jmath - d\imath\jmath \in \mathbb{H}$, konjugovanému prvku k $a + b\imath + c\jmath + d\imath\jmath \in \mathbb{H}$.

Následující věta ukazuje některé vlastnosti těchto normovaných algeber.

Věta 2.2.4: Buď A normovaná algebra a A' její Cayleyho iterace. Pak platí:
1) A' je komutativní právě tehdy, když $A = \mathbb{R}$.
2) A' je asociativní právě tehdy, když A je komutativní a asociativní.
3) A' je alternativní právě tehdy, když A je asociativní.
4) A' je normovaná právě tehdy, když A' je alternativní.

Důkaz: Všechna tvrzení plynou z přímých výpočtů, viz práci Wienbergové [20]. Dokažme například 1): Vezměme dva libovolné prvky $a = (a_1,\, a_2)$, $b = (b_1,\, b_2)$ algebry A', $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$. Pak

$$\begin{aligned} ab &= (a_1 b_1 - \bar{b}_2 a_2,\, b_2 a_1 + a_2 \bar{b}_1), \\ ba &= (b_1 a_1 - \bar{a}_2 b_2,\, a_2 b_1 + b_2 \bar{a}_1). \end{aligned}$$

Tedy $ab = ba,\ a, b \in A' \Leftrightarrow A$ je komutativní a zároveň pro každé $a \in A$ platí $\bar{a} = a \Leftrightarrow A = \mathbb{R}$. $\square$

Na závěr uveďme tři věty. První pochází z článku [11] A. Hurwitze z roku 1898, druhá se pak objevila v článku [22] M. Zorna z roku 1930. Třetí z následujících vět byla nezávisle dokázána M. Kervairem [13] a R. Bottem a J. Milnorem [3] v roce 1958.

Věta 2.2.5: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ a $\mathbb{O}$ jsou jediné normované podílové algebry.

Věta 2.2.6: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ a $\mathbb{O}$ jsou jediné alternativní podílové algebry.

Věta 2.2.7: Všechny podílové algebry mají dimenzi 1, 2, 4 nebo 8.

2.3. Výjimečná Jordanova algebra

Definice 2.3.1: *Jordanova algebra* je komutativní algebra $(J,\ \circ\ )$ nad tělesem $\mathbb{K}$, $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, na které platí tzv. *Jordanova identita* $a \circ (b \circ a^2) = a \circ (b \circ a^2)$ pro všechna $a,\, b \in J$.
Ideál Jordanovy algebry J je podprostor $B \subseteq J$ takový, že z $b \in B$ vyplývá $a \circ b \in B$ pro všechna $a \in J$.
Jordanova algebra J je *jednoduchá*, jestliže jejími jedinými ideály jsou $\{0\}$ a samotná algebra J.

Definice 2.3.2: *Formálně reálná Jordanova algebra* je komutativní algebra J asociativní pro mocniny (tj. pro $a \in J$ platí $a \cdot (a \cdot a) = (a \cdot a) \cdot a$) splňující

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0 \implies a_1 = \cdots = a_n = 0, \qquad a_1, \ldots a_n \in J,\ n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka 2.3.3: Zřejmě každá formálně reálná Jordanova algebra je Jordanovou algebrou.

Definice 2.3.4: Množinu čtvercových hermitovských matic $n \times n$ nad normovanou algebrou A s konjugací $^-$ budeme značit $\operatorname{Herm}(n,\, A)$, tj.

$$\operatorname{Herm}(n,\, A) = \{C \in M(n,\, A) \mid \bar{C}^T = C\},$$

kde $M(n,\ A)$ je algebra matic $n \times n$ s koeficienty v A.

Poznámka 2.3.5: V roce 1934 publikovali Jordan s von Neumannem a Wignerem článek [12], ve kterém klasifikovali jednoduché formálně reálné Jordanovy algebry:

1) Algebra na $\mathrm{Herm}(n,\ \mathbb{R})$ s násobením $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.
2) Algebra na $\mathrm{Herm}(n,\ \mathbb{C})$ s násobením $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.
3) Algebra na $\mathrm{Herm}(n,\ \mathbb{H})$ s násobením $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.
4) Algebra na $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ s násobením $(v, \alpha) \circ (w, \beta) = (\alpha w + \beta v, \langle v, w \rangle + \alpha\beta)$, kde $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ je kanonický skalární součin.
5) Algebra na $\mathrm{Herm}(3,\ \mathbb{O})$ s násobením $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$,

viz Baezův článek [2].

Algebra na $\mathrm{Herm}(3,\ \mathbb{O})$,

$$\mathrm{Herm}(3,\ \mathbb{O}) = \left\{ a = \begin{pmatrix} r_1 & \overline{x_3} & \overline{x_2} \\ x_3 & r_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & r_3 \end{pmatrix} \middle|\ r_i \in \mathbb{R},\ x_i \in \mathbb{O},\ i = 1,\ 2,\ 3 \right\},$$

spolu s komutativním násobením tvaru $a \circ b := \frac{1}{2}(ab + ba)$, kde ab značí maticové násobení, se nazývá *výjimečná Jordanova algebra* $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$.

Poznámka 2.3.6: Zřejmě platí $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{J}_{\mathbb{R}} = 27$.

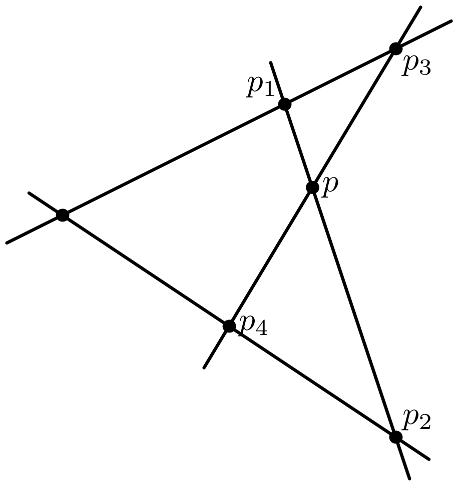
3. Projektivní prostory

V této kapitole jsou axiomaticky zavedeny projektivní prostory. Dále se zavádí pojem projektivního prostoru nad tělesem, což je dnes obvyklá představa projektivního prostoru. Dále je ukázána souvislost nejmenšího takového projektivního prostoru nad tělesem $\mathbb{Z}_2$, takzvané Fanovy roviny, s oktoniony.
Závěr kapitoly se věnuje Desarguesově axiomu a vztahu mezi endomorfizmy a projektivními prostory nad tělesy.
Další informace nalezne čtenář v práci Wienbergové [20] a v článku Baeze [2] a v nich uvedených odkazech.

3.1. Projektivní prostory a roviny

Definice 3.1.1: *Projektivní prostor* je trojice $(P,\ L,\ R)$, kde:
P, L jsou množiny (P se nazývá *množina bodů*, L pak *množina přímek*) a
R je relace, $R \subseteq P \times L$ (přičemž pokud $(p, l) \in R$, $p \in P$, $l \in L$, říkáme, že p *leží na* l nebo též l *prochází* p),
která splňuje:

1) Pro každé dva různé body p_1, p_2 existuje právě jedna přímka l, která oběma body p_1, p_2 prochází. (Takovou přímku pak značíme $l = \overline{p_1p_2}$.)
2) Na každé přímce leží alespoň tři body.
3) Mějme čtyři různé body p_1, p_2, p_3, p_4 a bod p, který leží jak na $\overline{p_1p_2}$, tak na $\overline{p_3p_4}$. Pak existuje bod, který leží na $\overline{p_1p_3}$ a zároveň na $\overline{p_2p_4}$ (viz Obrázek 1).



Obrázek 1

Definice 3.1.2: Buď $(P,\ L,\ R)$ projektivní prostor a $S \subseteq P$ podmnožina bodů. Definujme *span*(S) jako nejmenší podmnožinu T, že $S \subseteq T \subseteq P$, pro kterou platí:

$$\forall p_1, p_2, q \in P (p_1, p_2 \in T \ \&\ q \in \overline{p_1p_2}) \Rightarrow q \in T.$$

Pokud kardinalita nejmenší podmnožiny $M \subseteq P$ takové, že *span*$(M) = P$, je m, pak definujeme *(projektivní) dimenzi projektivního prostoru* $(P,\ L,\ R)$ pomocí

$$\dim(P,\ L,\ R) := m - 1.$$

Definice 3.1.3: Podmnožina P' množiny bodů P projektivního prostoru (P, L, R) se nazývá *kolineární*, jestliže existuje přímka $l \in L$, taková, že každý bod $p \in P'$ leží na l.

Definice 3.1.4: *Homomorfizmus projektivních prostorů* (P, L, R) a (P', L', R') je dvojice zobrazení $\phi = (\varphi_P, \varphi_L)$, $\varphi_P : P \to P'$, $\varphi_L : L \to L'$, taková, že

$$\forall p \in P\ \forall l \in L: \ (\varphi_P(p), \varphi_L(l)) \in R' \Leftrightarrow (p, l) \in R.$$

Poznámka 3.1.5:
1) Mono-, epi-, endo- a automorfizmy se definují obvyklým způsobem.
2) Zřejmě automorfizmus φ projektivního prostoru (P, L, R) je bijektivní zobrazení, které zobrazuje kolineární podmnožiny bodů v P na kolineární podmnožiny bodů v P. Takovému zobrazení se říká *kolineace*.

Tvrzení 3.1.6: Množina kolineací daného projektivního prostoru (P, L, R) spolu s operací skládání zobrazení tvoří grupu.

Důkaz: Jednotkový prvek grupy je identické zobrazení. Skládání kolineací zjevně zachovává kolineární množiny bodů a je asociativní, neboť skládání zobrazení je asociativní. Existence inverzních prvků grupy plyne z bijektivnosti kolineací. $\square$

Poznámka 3.1.7:
1) Množina $span(S)$ společně s množinou přímek $L_S := \{\overline{p_1p_2} \mid p_1, p_2 \in span(S)\}$ a relací R zúženou na $span(S) \times L_S$ tvoří projektivní prostor.
2) Krajními příklady projektivního prostoru jsou *prázdný projektivní prostor* $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ projektivní dimenze -1 a *triviální projektivní prostor* $(\{p\}, \emptyset, \emptyset)$ projektivní dimenze 0.
3) Standardními příklady projektivního prostoru jsou *reálný projektivní prostor* $\mathbb{RP}^n$ a *komplexní projektivní prostor* $\mathbb{CP}^n$, oba mají projektivní dimenzi rovnou n. Těmto projektivním prostorům bude věnováno místo v oddíle 3.2.

Definice 3.1.8: *Projektivní rovina* je trojice (P, L, R), kde:
P, L jsou množiny (P se nazývá *množina bodů*, L pak *množina přímek*) a
R je relace, $R \subseteq P \times L$ (přičemž pokud $(p, l) \in R$, $p \in P$, $l \in L$, říkáme, že p *leží na* l nebo též l *prochází* p),
která splňuje:
1) Pro každé dva různé body p_1, p_2 existuje právě jedna přímka l, která oběma body p_1, p_2 prochází. (Takovou přímku pak značíme $l = \overline{p_1p_2}$.)
2) Pro každé dvě různé přímky l_1, l_2 existuje právě jeden bod p, který leží na obou přímkách. (Takový bod značíme $p = l_1 \cap l_2$ a nazýváme *průsečík přímek* l_1, l_2.)
3) Existuje čtveřice bodů taková, že žádné tři z nich neleží na jedné přímce.
4) Existuje čtveřice přímek taková, že žádné tři z nich neprocházejí stejným bodem.

Poznámka 3.1.9:
1) Uvedené axiomy projektivní roviny ukazují na dualitu pojmů v projektivní rovině, a to v následujícím smyslu: Lze zaměňovat výrazy „bod“ s „přímka“ a „leží na“ s „prochází“.

2) Lze snadno ukázat (viz body 3) a 4) předchozí definice), že projektivní rovina obsahuje nejméně sedm bodů, resp. sedm přímek. Nejmenší projektivní rovinou je tzv. *Fanova rovina* se sedmi body a sedmi přímkami, popisující multiplikativní strukturu oktonionů, více viz oddíl 3.3.

Tvrzení 3.1.10: Projektivní rovina je projektivním prostorem projektivní dimenze 2.

Důkaz: Axiomy 1) a 3) projektivního prostoru jsou splněny z definice projektivní roviny. Dokažme, že na každé přímce l existují alespoň tři různé body:
Uvažme čtveřici různých bodů p_1, p_2, p_3, p_4 z bodu 3) Definice 3.1.8. Rozeberme jednotlivé případy.

a) Pokud na přímce l leží všechny čtyři body p_1, p_2, p_3, p_4 nebo alespoň tři z nich, je podmínka splněna.
b) Nechť právě dva z nich, například p_1, p_2, leží na l, tedy $l = \overline{p_1p_2}$. Pak přímka $\overline{p_3p_4}$ je různá od l a hledaný bod je $l \cap \overline{p_3p_4}$, jak plyne z bodu 2) Definice 3.1.8.
c) Nechť tři body neleží na l, například $p_1, p_2, p_3 \notin l$. Pak body $l \cap \overline{p_1p_2}$, $l \cap \overline{p_2p_3}$ a $l \cap \overline{p_1p_3}$ leží na l a jsou různé, neboť jinak by přímky $\overline{p_1p_2}$, $\overline{p_2p_3}$ a $\overline{p_1p_3}$ procházely jedním bodem, což je spor s předpokladem.

Z části 3) Definice 3.1.8 projektivní roviny plyne $\dim P \geq 2$, z části 2) stejné definice dostáváme $\dim P \leq 2$, tudíž $\dim P = 2$. $\square$

3.2. Projektivní prostory nad tělesy

Poznámka 3.2.1: Mějme těleso $\mathbb{K}$, tj. okruh s $0 \neq 1$ takový, že $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ je grupa. Všimněme si, že $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ je asociativní, ale nemusí být komutativní.
Přirozenou strukturu **pravého** $\mathbb{K}$-vektorového prostoru na $\mathbb{K}^{n+1}$ dává násobení skalárem:

$$x\lambda = (x_1, \ldots, x_{n+1})\lambda := (x_1\lambda, \ldots, x_{n+1}\lambda), \qquad x \in \mathbb{K}^{n+1}, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Definice 3.2.2: Buď $\mathbb{K}$ těleso a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Označme $P^n(\mathbb{K})$ množinu 1-dimenzionálních podprostorů v $\mathbb{K}^{n+1}$ a $L^n(\mathbb{K})$ množinu všech 2-dimenzionálních podprostorů v $\mathbb{K}^{n+1}$.
Pak trojice $\mathbb{KP}^n := (P^n(\mathbb{K}), L^n(\mathbb{K}), \subset)$ se nazývá *(kanonický) n-dimenzionální projektivní prostor nad tělesem* $\mathbb{K}$. Prvky $P^n(\mathbb{K})$ se jmenují *body z* $\mathbb{KP}^n$, prvkům $L^n(\mathbb{K})$ se říká *přímky z* $\mathbb{KP}^n$. Řekneme, že bod x z $\mathbb{KP}^n$ *leží na* přímce l z $\mathbb{KP}^n$ (nebo též přímka l z $\mathbb{KP}^n$ *prochází* bodem x z $\mathbb{KP}^n$), jestliže $x \subset l$, tj. x je podprostor l.

Poznámka 3.2.3: Prvky $P^n(\mathbb{K})$ a $L^n(\mathbb{K})$ jsou podprostory $\mathbb{K}^{n+1}$ ve smyslu vektorových podprostorů, tedy tyto prvky speciálně obsahují $0 = (0, \ldots 0)$.

Věta 3.2.4: Trojice $\mathbb{KP}^n$ je projektivní prostor projektivní dimenze n ve smyslu Definice 3.1.1.

Důkaz: Využijme kanonických souřadnic prostoru $\mathbb{K}^{n+1}$. Body z $\mathbb{K}^{n+1}$ budeme značit $x = (x^1, \ldots x^{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Dokažme platnost axiomů v Definici 3.1.1 projektivního prostoru:

1) Mějme dva různé body (tedy dva různé 1-dimenzionální podprostory) p_1, $p_2 \in P^n(\mathbb{K})$,

$$p_i = \{x_i\alpha_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\}, \qquad i = 1, 2,$$

pro nějaké $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Pak přímku $\overline{p_1p_2}$ definujeme jako $\overline{p_1p_2} := \{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$. Zjevně $p_1, p_2 \in \overline{p_1p_2}$. Pokud na přímce $l = \{y_1\beta_1 + y_2\beta_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}\}$ leží body p_1, p_2, pak existují prvky $\beta_1^1, \beta_2^1, \beta_1^2, \beta_2^2 \in \mathbb{K}$ tak, že

$$x_i = y_1\beta_1^i + y_2\beta_2^i, \qquad i = 1, 2.$$

Protože body p_1, p_2 jsou různé, je $\beta_1^1\beta_2^2 - \beta_2^1\beta_1^2 \neq 0$ a můžeme psát

$$y_1 = \frac{x_1\beta_2^2 - x_2\beta_2^1}{\beta_1^1\beta_2^2 - \beta_2^1\beta_1^2}, \qquad y_2 = \frac{-x_1\beta_1^2 + x_2\beta_1^1}{\beta_1^1\beta_2^2 - \beta_2^1\beta_1^2}.$$

Odtud pak libovolný bod $y = y_1\beta_1 + y_2\beta_2$ ležící na přímce l lze rozepsat

$$\begin{aligned} y_1\beta_1 + y_2\beta_2 &= \frac{x_1\beta_2^2 - x_2\beta_2^1}{\beta_1^1\beta_2^2 - \beta_2^1\beta_1^2}\beta_1 + \frac{-x_1\beta_1^2 + x_2\beta_1^1}{\beta_1^1\beta_2^2 - \beta_2^1\beta_1^2}\beta_2 = \\ &= x_1\frac{\beta_2^2\beta_1 - \beta_1^2\beta_2}{\beta_1^1\beta_2^2 - \beta_2^1\beta_1^2} + x_2\frac{\beta_1^1\beta_2 - \beta_2^1\beta_1}{\beta_1^1\beta_2^2 - \beta_2^1\beta_1^2}, \end{aligned}$$

tedy $y \in \overline{p_1p_2}$, proto přímka l je totožná s $\overline{p_1p_2}$.
2) Uvažme přímku $l \in L^n(\mathbb{K})$, $l = \{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 \mid \alpha_1\alpha_2 \in \mathbb{K}\}$, kde x_1 není $\mathbb{K}$-násobek x_2. Protože v tělese je $0 \neq 1$, můžeme dvojici (α_1, α_2) postupně volit jako $(0, 1)$, $(1, 0)$ a $(1, 1)$ a dostat tak tři různé body přímky l.
3) Nechť $p_i = \{x_i\alpha_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ jsou navzájem různé body, přímky $\overline{p_1p_2}$, $\overline{p_3p_4}$ jsou různé (jinak by bylo tvrzení zřejmé) a $p = \overline{p_1p_2} \cap \overline{p_3p_4} = \{x_0\alpha_0 \mid \alpha_0 \in \mathbb{K}\}$ pro nějaké $x_0 \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Protože p je průsečík přímek $\overline{p_1p_2}$ a $\overline{p_3p_4}$, existují $\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2', \alpha_0'', \alpha_3'', \alpha_4'' \in \mathbb{K}$, $\alpha_0', \alpha_0'' \neq 0$ [1], tak, že platí

$$\begin{aligned} x_0\alpha_0' &= x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2', \\ x_0\alpha_0'' &= x_3\alpha_3'' + x_4\alpha_4'', \end{aligned}$$

tedy $x_1\frac{\alpha_1'}{\alpha_0'} + x_2\frac{\alpha_2'}{\alpha_0'} = x_3\frac{\alpha_3''}{\alpha_0''} + x_4\frac{\alpha_4''}{\alpha_0''}$, odkud plyne

$$x_1\frac{\alpha_1'}{\alpha_0'} + x_3\frac{-\alpha_3''}{\alpha_0''} = x_2\frac{-\alpha_2'}{\alpha_0'} + x_4\frac{\alpha_4''}{\alpha_0''},$$

proto existuje průsečík přímek $\overline{p_1p_3}$ a $\overline{p_2p_4}$.
Určeme projektivní dimenzi projektivního prostoru $\mathbb{KP}^n$: Stačí uvážit množinu $M := \{(1, 0, \dots 0), (0, 1, 0, \dots 0), \dots (0, \dots 0, 1)\} \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$. Zřejmě $|M| = n + 1$ a menší množina M', která by splňovala $span(M') = \mathbb{KP}^n$, neexistuje, neboť M je lineárně nezávislá v $\mathbb{K}^{n+1}$. $\square$

[1] Kdyby $\alpha_0' = 0$ nebo $\alpha_0'' = 0$, pak by $p_1 = p_2$ nebo $p_3 = p_4$.

Poznámka 3.2.5:

1) Pokud nebude hrozit zmatení, budeme identifikovat $\mathbb{KP}^n$ s množinou bodů $P^n(\mathbb{K})$. Značka „$x \in \mathbb{KP}^n$“ bude pak znamenat, že x je bod z $\mathbb{KP}^n$.

2) Máme-li $(n+1)$-dimenzionální vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{K}$, pak lze analogicky definovat příslušný projektivní prostor $\mathbb{P}(V)$. Ten je zřejmě izomorfní prostoru $\mathbb{KP}^n$.

3) Pro $n = 0$ je množina přímek $L^0(\mathbb{K})$ prázdná a množina bodů $P^0(\mathbb{K})$ jednobodová, jedná se o triviální projektivní prostor dimenze 0.

4) Pro $n = 1$ dostáváme tzv. *projektivní přímku* $\mathbb{KP}^1$ nad tělesem $\mathbb{K}$.

5) Pro $n = 2$ je $\mathbb{KP}^2$ projektivní rovinou, která se jmenuje *projektivní rovina nad tělesem* $\mathbb{K}$.

6) Grupa $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ má tranzitivní akci na $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Orbity této akce jsou v bijektivní korespondenci s $\mathbb{KP}^n$, tedy

$$\mathbb{KP}^n \simeq \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}/_{\sim},$$

kde pro $x, y \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ je $x \sim y$ právě tehdy, když existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ takové, že $x = y\lambda$.

7) Pokud vezmeme místo tělesa podílovou algebru A, která **není** asociativní (například oktoniony), pak struktura A-modulu na A^{n+1} nestačí k tomu, aby kanonická operace

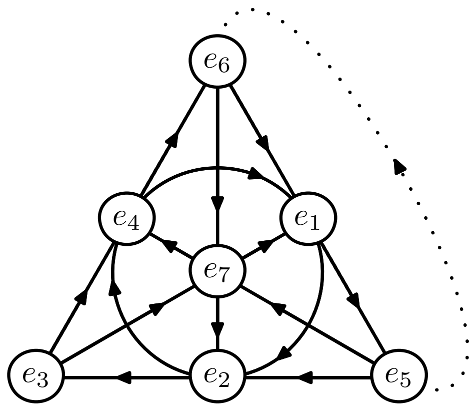
$$\begin{aligned} \rho :\ A \setminus \{0\} &\to \mathrm{Aut}(A^{n+1}), \\ \lambda &\mapsto \rho(\lambda),\ \rho(\lambda)x := x\lambda,\ x \in A^{n+1} \end{aligned}$$

byla využitelná pro definici projektivního prostoru: Zobrazení ρ nedává ekvivalenci na A^{n+1}, neboť neplatí tranzitivita. Uvažme například $A = \mathbb{O}$, $n = 1$ a vektory $x_1 = (e_5 - e_6, e_4)$, $x_2 = (e_2 + e_4, e_6)$ a $x_3 = (1 + e_1, e_7)$. Protože $x_2 e_3 = x_1$ a $x_3 e_2 = x_2$, platí $x_1 \sim x_2$, $x_2 \sim x_3$. Avšak $x_1 \not\sim x_3$: Rovnost $x_3\lambda = x_1$ rozepíšeme jako

$$\begin{array}{r} (1+e_1)\lambda = e_5 - e_6 \\ e_7\lambda = e_4 \end{array} \implies \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2}(e_5 - e_6)(1 - e_1) = e_5, \\ \lambda = -e_5 \end{array}.$$

3.3. Fanova rovina

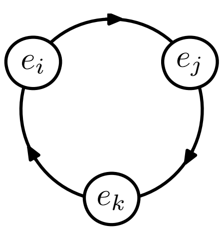
Definice 3.3.1: *Fanova rovina* je projektivní rovina se sedmi body a sedmi přímkami, jak je uvedeno na následujícím Obrázku 2:



Obrázek 2

Body jsou „vrcholy“, „středy stran“ a „těžiště“ „trojúhelníka“. Přímkami jsou „strany“, „těžnice“ a „kružnice“ procházející „středy stran“. Snadno se lze přesvědčit, že Fanova rovina splňuje Definici 3.1.8 projektivní roviny.
Orientace hran a tečkovaná šipka se samotnou definicí Fanovy roviny nesouvisejí. Důvod jejich zavedení je následující:

Poznámka 3.3.2: Fanova rovina na Obrázku 2 ukazuje multiplikativní strukturu oktonionů:
Všechny vrcholy $\{e_i \mid i = 1, \ldots, 7\}$ spolu s 1 tvoří $\mathbb{R}$-bázi oktonionů.
Na každé přímce je šipkou vyznačený směr. „Kružnice“, ale i „strany“ a „těžnice“ chápeme jako „uzavřené křivky“, například tečkovaná šipka ukazuje „uzavřenost“ pro přímku procházející body e_1, e_5 a e_6. Dostáváme tak pro libovolnou přímku procházející body e_i, e_j a e_k diagram na následujícím Obrázku 3:



Obrázek 3

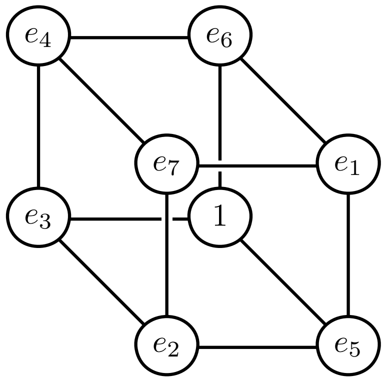
Všechny dvojice (různých) bodů $(e_i,\, e_j)$ leží na právě jedné přímce, která obsahuje právě jeden další bod e_k. Bod e_k pak odpovídá součinu e_i, e_j až na znaménko:

$$e_i \cdot e_j = \varepsilon e_k, \qquad \varepsilon \in \{+1,\, -1\},$$

přičemž $\varepsilon = +1$, pokud v diagramu e_i předchází e_j.
Přidáme-li vlastnosti
1) 1 je neutrální prvek násobení;
2) $\forall i \in \{1, \ldots 7\}: \quad e_i^2 = -1$,

pomocí Fanovy roviny popíšeme násobení na $\mathbb{R}$-bázi oktonionů, neboť v každém jednotlivém případě se lze přesvědčit, že takto definované násobení koresponduje s Tabulkou 2.

Poznámka 3.3.3: Fanova rovina je projektivní rovina nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. Body Fanovy roviny jsou přímky, které procházejí počátkem ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_2^3$ (přímka v $\mathbb{Z}_2^3$ kromě počátku prochází právě jedním dalším bodem), přímky Fanovy roviny jsou 2-roviny v $\mathbb{Z}_2^3$.
Rovina obsahující body e_1, e_2 a e_4 také prochází počátkem: Lze to chápat tak, že tato rovina ve smyslu prostoru $\mathbb{R}^3$ protíná přímku obsahující body 1 a e_6 v bodě vzdáleného dvě délky úsečky $1e_6$ od bodu 1. Protože jsme však v prostoru $\mathbb{Z}_2^3$, tato vzdálenost je nulová.
Pokud počátek v $\mathbb{Z}_2^3$ ztotožníme s $1 \in \mathbb{O}$, dostaneme následující popis oktonionů:



Obrázek 4

Roviny procházející počátkem tohoto 3-dimenzionálního vektorového prostoru odpovídají podalgebrám $\mathbb{O}$ izomorfním $\mathbb{H}$. Přímky procházející počátkem odpovídají podalgebrám $\mathbb{O}$ izomorfním $\mathbb{C}$. Samotný počátek, chápaný jako podalgebra $\mathbb{O}$, je izomorfní $\mathbb{R}$.

Tvrzení 3.3.4: Normovaná algebra $\mathbb{O}$ je alternativní.

Důkaz: Nechť $a, b \in \mathbb{O}$. Podle definice alternativnosti (viz Definici 2.1.13) stačí ukázat, že $(aa)b = a(ab)$, $(ab)a = a(ba)$ a $(ba)a = b(aa)$. Stačí uvažovat jen případ $a = e_i$ a $b = e_j$, neboť důkaz dokazované identity pro libovolné a, b pak plyne z distributivnosti násobení vůči sčítáni v normované algebře oktonionů $\mathbb{O}$. Pro přehlednost využijeme strukturu oktonionů implikovanou Fanovou rovinou. Vezměme nějakou přímku procházející body e_i, e_j a $e_k := e_ie_j$, která existuje, neboť Fanova rovina je rovinou nad tělesem (popř. viz Obrázek 4). Využitím multiplikativni struktury na algebře $\mathbb{O}$ dané Fanovou rovinou dostáváme:

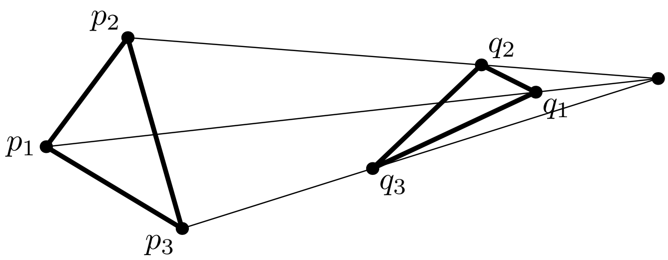
$$\begin{aligned}
(e_ie_i)e_j &= -e_j = e_ie_k = e_i(e_ie_j),\\
(e_ie_j)e_i &= e_ke_i = e_j = e_i(-e_k) = e_i(e_je_i),\\
(e_je_i)e_i &= (-e_k)e_i = -e_j = e_j(e_ie_i),
\end{aligned}$$

čímž je alternativnost algebry oktonionů $\mathbb{O}$ dokázána. $\square$

3.4. Desarguesův axiom

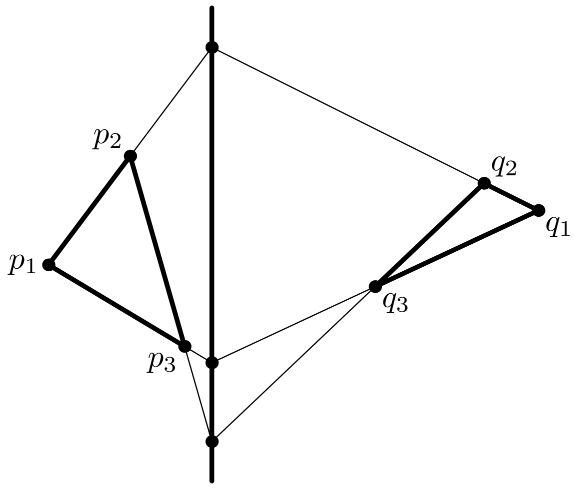
Poznámka 3.4.1: Obecně neplatí, že projektivní prostor (konečné dimenze n) je izomorfní nějakému projektivnímu prostoru $\mathbb{KP}^n$ nad tělesem $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Je však známa podmínka, která izomorfnost zajišťuje, tak zvaný Desarguesův axiom:

Definice 3.4.2: Projektivní prostor $(P,\, L,\, R)$ splňuje *Desarguesův axiom*, pokud platí: Jestliže existují po dvou různé body p_1, p_2, p_3 a q_1, q_2, q_3 takové, že přímky $\overline{p_1q_1}$, $\overline{p_2q_2}$ a $\overline{p_3q_3}$ se protínají právě v jednom bodě,



Obrázek 5

pak leží průsečíky $\overline{p_1p_2} \cap \overline{q_1q_2}$, $\overline{p_2p_3} \cap \overline{q_2q_3}$ a $\overline{p_1p_3} \cap \overline{q_1q_3}$ na jedné přímce.



Obrázek 6

Projektivní prostor, který splňuje Desarguesův axiom, se nazývá *desarguesovský*.

Poznámka 3.4.3: Lze ukázat, že projektivní prostory projektivní dimenze $n \geq 3$ jsou desarguesovské. Zajímavým případem jsou tak 2-dimenzionální projektivní prostory, tedy projektivní roviny.
Geometrickým zavedením souřadného systému lze na zvolené přímce projektivní roviny definovat algebraickou strukturu $(\mathbb{A},\, +,\, 0,\, \cdot\,,\, 1)$, kde 0 je aditivní neutrální prvek a 1 je multiplikativní neutrální prvek.
Dále platí, že $(\mathbb{A},\, +,\, 0,\, \cdot\,,\, 1)$ je asociativní podílová algebra (až na izomorfizmus nezávislá na volbě souřadného systému) právě tehdy, když je projektivní rovina $(P,\, L,\, R)$ desarguesovská.
R. Moufangová dokázala pomocí oktonionů zkostruovat příklad roviny, která není desarguesovská, tzv. reálnou Moufangové rovinu.

3.5. Přímkové prostory

Věta 3.5.1: Nechť $\mathbb{K}$ je asociativní normovaná algebra s konjugací $^-$, tedy mimo jiné těleso. Pak

$$\mathbb{KP}^{n-1} \simeq \mathcal{P} := \left\{A \in M(n, \mathbb{K}) \mid A^2 = A,\ \bar{A}^T = A,\ \operatorname{rank} A = 1\right\}.$$

Důkaz: Definujme Zobrazení $s : \mathbb{KP}^{n-1} \to \mathcal{P}$ předpisem

$$s([v]) := \frac{v\bar{v}^T}{\|v\|},$$

kde $v \in \mathbb{K}^n$ značí sloupcový vektor. Dokážeme že zobrazení s je dobře definováno:

a) Pro každé $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $[v] \in \mathbb{KP}^{n-1}$ platí rovnost $s([\lambda v]) = s([v])$, neboť

$$s([\lambda v]) = \frac{\lambda\bar{\lambda}v\bar{v}^T}{\|\lambda v\|} = \frac{v\bar{v}^T}{\|v\|} = s([v]),$$

viz Lemma 2.1.10.

b) Pro každé $[v] \in \mathbb{KP}^{n-1}$ platí rovnost $\overline{s([v])}^T = s([v])$, neboť

$$\overline{s([v])}^T = \overline{\left(\frac{v\bar{v}^T}{\|v\|}\right)}^T = \frac{\left(\bar{v}\overline{\bar{v}^T}\right)^T}{\|v\|} = \frac{v\bar{v}^T}{\|v\|} = s([v]).$$

c) Pro každé $[v] \in \mathbb{KP}^{n-1}$ platí rovnost $s([v])^2 = s([v])$, neboť

$$s([v])s([v]) = \frac{\left(v\bar{v}^T\right)\left(v\bar{v}^T\right)}{\|v\|^2} = \frac{v\|v\|\bar{v}^T}{\|v\|^2} = s([v]).$$

d) Vlastnost $\operatorname{rank} s([v]) = 1$ pro každé $[v] \in \mathbb{KP}^{n-1}$ je zřejmá.

e) Definujme zobrazezení $s' : \mathcal{P} \to \mathbb{KP}^{n-1}$ předpisem $s'(A) := [v]$, kde $A \in \mathcal{P}$ a $v \in \operatorname{Im} A$. Definice je zřejmě korektní, neboť $\operatorname{rank} A = 1$ a $[\lambda v] = [v]$ platí pro každé $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dokažme, že $s's = Id_{\mathbb{KP}^{n-1}}$ a $ss' = Id_{\mathcal{P}}$. Pro $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ dostáváme $s's([v]) = s(\frac{v\bar{v}^T}{\|v\|}) = [v]$, neboť zřejmě $\operatorname{Im}(v\bar{v}^T) = \mathbb{K}v$. Nyní dokažme, že $ss' = Id_{\mathcal{P}}$. Pro $A \in \mathcal{P}$ platí $ss'(A) = s([v]) =: B$ pro nějaké $v \in \operatorname{Im} A$. Jelikož z korektnosti definice s plyne mj., že $B^2 = B$, $\bar{B}^T = B$, a definice B implikuje, že $\operatorname{Im} B = \mathbb{K}v$, stačí ukázat, že existuje jediné takové B splňující tři předchozí rovnosti, odkud by již plynulo, že $A = B$, neboť A je zjevně splňuje. Nechť σ je nadrovina kolmá na v vůči uvažované normě. Zřejmě $\mathbb{K}^n = \sigma \oplus \mathbb{K}v$ a $B(v', w) = Bv' + Bw$ pro $v' \in \mathbb{K}v$ a $w \in \sigma$. Dokažme, že $Bw = 0$. Pišme $\langle v, Bw\rangle = \langle \bar{B}^T v, w\rangle = \langle Bv, w\rangle = \langle \mu v, w\rangle = 0$ (pro nějaké $\mu \in \mathbb{K}$), neboť $\operatorname{Im} B = \mathbb{K}v$ a $v \perp w$. Pro $w' \in \sigma$ pišme $\langle w', Bw\rangle = \langle w', \mu' v\rangle = 0$ (pro nějaké $\mu' \in \mathbb{K}$), neboť $\operatorname{Im} B = \mathbb{K}v$ a $w' \perp v$. Celkem tedy dostáváme, že $\langle v', Bw\rangle = 0$ pro každé $v' \in \mathbb{K}^n$, odkud z nedegenerovanosti skalárního součinu $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ dostáváme, že $Bw = 0$, tj. $B_{|\sigma} = 0$, odkud plyne existence $b \in \mathbb{K}$ $B(v', w) = bv'$. Jelikož B splňuje $B^2 = B$, dostáváme, že $b = 0$ nebo $b = 1$, přičemž první případ je nutné vyloučit vzhledem k tomu, že $\operatorname{Im} B = \mathbb{K}v$, $v \neq 0$, a proto zmíněnými podmínkami výše dostáváme unicitu B, a tak $B = A$, odkud plyne, že $ss'(A) = A$, což bylo dokázat.

$\square$

Poznámka 3.5.2: Předchozí věta nám dává návod, jak zkonstruovat projektivní rovinu nad oktoniony, i když ty netvoří asociativní algebru. Přímočará definice projektivní oktonionové roviny pomocí přímkového prostoru nad oktoniony by vedla k již popsaným obtížím (relace ekvivalence by nebyla tranzitivní), viz Poznámka 3.2.5. Pravá strana izomorfizmu v předchozím trvzení však smysl má, i když povolíme $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, a proto se reálná Moufangové rovina definovává právě jako pravá strana zmíněného izmorfizmu, kde klademe $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ a $n = 3$. Komplexní Moufangové rovina se definuje obdobně (též pomocí Hermitovských matic), jak uvedeme později.

4. Lieovy grupy a algebry

V této kapitole uvedeme základní pojmy a definice teorie Lieových grup a algeber a jejich reprezentací.
Závěrečný oddíl v krátkosti uvádí Cliffordovy algebry a spin grupy.
Tato kapitola pouze shrnuje nejnutnější definice, pro další podrobnosti viz Drápalova skripta [5] a monografie Friedrich [6], Fulton, Harris [7], Goodman, Wallach [8], Harvey [9], Humphreys [10] nebo Knapp [14].

4.1. Lieovy grupy a algebry

Definice 4.1.1: Nechť G je grupa. *Akce grupy G* na množině M je libovolný grupový homomorfismus $\varphi : G \to S(M)$, kde $S(M)$ je symetrická grupa, tj. grupa všech bijektivních zobrazení z M do M.
Řekneme že akce φ grupy G na množině M je *tranzitivní*, jestliže pro každé $x, y \in M$ existuje $g \in G$ tak, že $\varphi(g)x = y$.

Definice 4.1.2:
1) *Centrum $Z(G)$ grupy G* je definováno $Z(G) = \{g \in G \mid ag = ga, \quad \forall a \in G\}$.
2) *Normalizátor $N_G(M)$* množiny $M \subseteq G$ je $N_G(M) := \{g \in G \mid gMg^{-1} = M\}$.
3) *Stabilizátor* nebo *izotropní podgrupa* prvku $x \in M$ akce φ grupy G na množině M je podgrupa
$$Isot_x(G) := \{g \in G \mid \varphi(g)x = x\}.$$

Definice 4.1.3: Řekneme, že G je *Lieova grupa*, pokud G je současně grupa a hladká varieta a splňuje následující podmínku:

$$\text{Zobrazení } (g, h) \in G \times G \mapsto g \cdot h^{-1} \in G \text{ je hladké.}$$

G je *komplexní Lieova grupa*, pokud je současně grupa a komplexní varieta a zobrazení v podmínce je holomorfní.

Definice 4.1.4: Komplexní vektorový prostor L nazveme *(komplexní) Lieovou algebrou*[1], pokud je na ní dána bilineární operace, zvaná *Lieova závorka*, $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : L \times L \to L$, která splňuje:
(1) $\forall X, Y \in L : [X, Y] = -[Y, X]$;
(2) $\forall X, Y, Z \in L : [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.
Lieova algebra L je *jednoduchá*, pokud $\dim L > 1$ a neobsahuje netriviální vlastní ideály. Lieova algebra je *polojednoduchá*, jestliže je izomorfní konečné direktní sumě jednoduchých Lieových algeber.

Poznámka 4.1.5: Lieovu algebru Lieovy grupy (např. G) budeme značit gotickým písmenem (např. $\mathfrak{g}$).

[1] Pokud není řečeno jinak, považujeme v dalším textu Lieovu algebru vždy za komplexní Lieovu algebru.

Definice 4.1.6: *Cartanova podalgebra* $\mathfrak{h}$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je její maximální komutativní podalgebra.

Poznámka 4.1.7: Jestliže $\mathfrak{g}$ je polojednoduchá Lieova algebra, pak vždy existuje její Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$. Viz Knappova monografie [14].

Definice 4.1.8: Buďte $\mathfrak{g}$ jednoduchá komplexní Lieova algebra, $\mathfrak{h}$ její Cartanova podalgebra, $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \neq 0$. Lineární prostory

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \ [H, X] = \alpha(H)X,\, H \in \mathfrak{h}\}$$

takové, že $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ nazýváme *kořenové podprostory* $\mathfrak{g}$, příslušná α pak *kořeny*. Množinu všech kořenů budeme značit Φ. Pro každé $\alpha \in \Phi$ platí $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, viz Knappovu monografii [14]. Označme navíc $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R} := \mathrm{span}_\mathbb{R}(\Phi)$.

Poznámka 4.1.9: Platí, že $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, pokud $\alpha,\, \beta \in \Phi \cup \{0\}$ a pokud $\alpha + \beta \neq 0$. Dále $[X_\alpha,\, X_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, pro každé $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

Poznámka 4.1.10: Jednoduchou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ lze jako vektorový prostor rozložit následovně:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

Důkaz lze najít v monografii Fultona a Harrise [7].

Definice 4.1.11: Buď $\mathfrak{g}$ jednoduchá Lieova algebra. Zvolme pevně reálný lineární funkcionál l na $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ tak, že $l(\alpha) \neq 0$ pro každý kořen α. Pak lze množinu kořenů rozložit jako $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$, kde $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid l(\alpha) > 0\}$ se nazývá *systém pozitivních kořenů*, $\Phi^- = \{\alpha \in \Phi \mid l(\alpha) < 0\}$ *systém negativních kořenů*. Kořen z Φ^+ resp. z Φ^- se nazývá *pozitivní* resp. *negativní* kořen.
Kořen $\alpha \in \Phi^+$ nazveme *jednoduchý*, pokud ho nelze napsat jako součet dvou kladných kořenů. Množinu jednoduchých kořenů (která je výběrem Φ^+ určena jednoznačně) značíme Δ.

Poznámka 4.1.12: Platí $|\Delta| = \dim \mathfrak{h}$, viz Knappovu monografii [14].

Definice 4.1.13: Buď $\mathfrak{g}$ konečně dimenzionální komplexní polojednoduchá Lieova algebra. Definujme zobrazení $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\, \mathfrak{g}$ předpisem

$$\mathrm{ad}(X)(Y) := [X,\, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Zobrazení ad se nazývá *adjungovaná reprezentace* Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. *Killingova forma* κ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je definována předpisem

$$\kappa(X,\, Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}X \circ \mathrm{ad}Y), \qquad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Poznámka 4.1.14: Killingova forma κ je symetrická bilineární forma. Navíc je nedegenerovaná na $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, pokud $\mathfrak{g}$ je polojednoduchá.

Definice 4.1.15: Buď $\mathfrak{g}$ konečně dimenzionální komplexní polojednoduchá Lieova algebra s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{h}$. Definujme ke každému kořenu $\alpha \in \Phi$ prvek $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ předpisem

$$\alpha(H) = \kappa(H,\, H_\alpha), \qquad H \in \mathfrak{h}.$$

Potom definujeme bilineární formu na $\mathfrak{h}^*$ předpisem

$$\langle \varphi,\, \psi \rangle_\kappa := \kappa(H_\varphi,\, H_\psi), \qquad \varphi, \psi \in \mathfrak{h}^*.$$

Poznámka 4.1.16: Zřejmě $\langle \varphi,\, \psi \rangle_\kappa$ je symetrická a platí $\langle \varphi,\, \psi \rangle_\kappa = \varphi(H_\psi) = \psi(H_\varphi)$.

Poznámka 4.1.17: Dvě jednoduché Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ jsou izomorfní právě tehdy, když jejich kořenové systémy Φ, Φ' jsou izomorfní (tj. pokud existuje izomorfizmus $\phi : \Phi \to \Phi'$ takový, že pro libovolné dva kořeny $\alpha, \beta \in \Phi$ platí $\langle \phi(\alpha),\, \phi(\beta) \rangle_\kappa = \langle \alpha,\, \beta \rangle_\kappa$). Důkaz je uveden například v monografii Fultona a Harrise [7].

Definice 4.1.18: *Abstraktní kořenový systém* na vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ konečné dimenze vybaveném skalárním součinem $\langle , \rangle$ je konečná množina $R \subseteq \mathbb{V}$, která splňuje:
1) lineární obal R je $\mathbb{V}$;
2) R je uzavřená na reflexe podle nadrovin kolmých k prvkům R;
3) $\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ je celé číslo pro každé $\alpha, \beta \in R$ a konečně $\alpha \in R$ implikuje $2\alpha \notin R$.
Abstraktní kořenový systém R nazveme *ireducibilní*, pokud neexistuje disjunktní sjednocení $R = R_1 \cup R_2$, kde R_1 a R_2 navzájem ortogonální množiny.
Dva abstraktní kořenové systémy R_1 a R_2 na vektorových prostorech $\mathbb{V}_1$ a $\mathbb{V}_2$ nazveme *izomorfní*, pokud existuje izomorfizmus příslušných vektorových prostorů $\phi : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ takový, že $\phi(R_1) = R_2$ a pro všechna $\alpha, \beta \in R_1$ platí

$$\frac{2\langle \phi(\beta),\, \phi(\alpha) \rangle}{\langle \phi(\alpha),\, \phi(\alpha) \rangle} = \frac{2\langle \beta,\, \alpha \rangle}{\langle \alpha,\, \alpha \rangle}.$$

Věta 4.1.19: Jestliže $\mathfrak{g}$ je komplexní jednoduchá Lieova algebra, pak kořenový systém Φ algebry $\mathfrak{g}$ vůči nějakému výběru Cartanovy podalgebry je ireducibilní abstraktní kořenový systém. Nechť R je nějaký ireducibilní abstraktní kořenový systém, pak existuje až na izomorfizmus právě jedna komplexní jednoduchá Lieova algebra $\mathfrak{g}$, jejíž kořenový systém (vůči nějakému výběru Cartanovy podalgebry) je izomorfní R.

Důkaz: Viz Knappovu monografii [14]. □

Definice 4.1.20: Pro $\alpha_i \in \Delta$ definujeme *fundamentální váhu* ϖ_i předpisem

$$\frac{2\langle \varpi_i,\, \alpha_j \rangle_\kappa}{\langle \alpha_j,\, \alpha_j \rangle_\kappa} = \delta_{ij}, \qquad \alpha_j \in \Delta,\ i, j = 1, \ldots, \dim \mathfrak{h}.$$

Definice 4.1.21: Vyjádříme-li fundamentální váhy jako $\varpi_i = \sum_j A_{ji}\alpha_j$, pak definujeme *Cartanovu matici* $C = (C_{ij})$ jako matici inverzní k $(A_{ij})^T$,

$$C_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i,\, \alpha_j \rangle_\kappa}{\langle \alpha_i,\, \alpha_i \rangle_\kappa}.$$

Definice 4.1.22: Buď $\mathfrak{g}$ komplexní polojednoduchá Lieova algebra a Φ^+ systém pozitivních kořenů $\mathfrak{g}$. Pak *nejnižší forma* δ je definována jako

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha.$$

4.2. Reprezentace Lieových grup a algeber

Definice 4.2.1: *Reprezentací komplexní Lieovy grupy G* na vektorovém prostoru $\mathbb{W}$ je zobrazení $\varrho : G \to GL(\mathbb{W})$ (grupa invertibilních lineárních zobrazení z $\mathbb{W}$ do sebe), které je spojitý (holomorfní) homomorfizmus grup.

Definice 4.2.2: Nechť L, L' jsou dvě Lieovy algebry. Potom lineární zobrazení $\varphi : (L, [\,,\,]) \to (L', [\,,\,]')$ splňující

$$\forall X, Y \in L : \quad \varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]'$$

se nazývá *homomorfizmus Lieových algeber L, L'*. Homomorfismus Lieovy algebry L do $\mathfrak{gl}(\mathbb{W})$ (Lieova algebra všech lineárních zobrazení z $\mathbb{W}$) se nazývá *reprezentace Lieovy algebry L na $\mathbb{W}$*.

Poznámka 4.2.3: Někdy se reprezentace $\varrho : L \to \mathfrak{gl}(\mathbb{W})$ Lieovy algebry L značí $(\varrho, \mathbb{W})$ nebo pouze $\mathbb{W}$.

Definice 4.2.4: Nechť ϱ je reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{W}$. Řekneme, že podprostor $\mathbb{W}' \subseteq \mathbb{W}$ je *invariantní podprostor* $\mathbb{W}$, jestliže pro každé $X \in \mathfrak{g}$ je $\varrho(X)(\mathbb{W}') \subseteq \mathbb{W}'$. Dále řekneme, že reprezentace ϱ na $\mathbb{W}$ je *ireducibilní*, jestliže $\mathbb{W}$ nemá žádné vlastní netriviální invariantní podprostory.

Platí následující věta:

Věta 4.2.5: Každá konečně dimenzionální reprezentace jednoduché Lieovy algebry je direktní sumou ireducibilních reprezentací.

Důkaz: Viz Knappovu monografii [14]. $\square$

Poznámka 4.2.6: Předchozí věta platí i pro konečně dimenzionální reprezentace jednoduché Lieovy grupy.

Poznámka 4.2.7: Nechť $\varrho : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{W})$ je reprezentace Lieovy grupy G na komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{W}$ konečné dimenze. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra Lieovy grupy G, viz např. Knappovu monografii [14]. Pro $v \in \mathbb{W}$ a X definujme předpisem

$$\dot{\varrho}(X)v := \frac{d}{dt}_{|t=0}\varrho(e^{tX})v$$

zobrazení $\dot{\varrho} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\,\mathbb{W}$. Snadno lze ukázat, že takto definované zobrazení $\dot{\varrho}$ je reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Pro definici exponenciály e^Y pro $Y \in \mathfrak{g}$ viz například Knappovu monografii [14].

Nechť ϱ je ireducibilní reprezentace polojednoduché komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{W}$ konečné dimenze. Pak $\mathbb{W}$ lze rozložit na direktní sumu

$$\mathbb{W} = \bigoplus_{\lambda \in \Pi} \mathbb{W}_\lambda,$$

kde Π je konečná podmnožina $\mathfrak{h}^*$, kde

$$\varrho(H)v = \lambda(H)v.$$

pro libovolné $H \in \mathfrak{h}$, $\lambda \in \Pi$ a libovolné $v \in \mathbb{W}_\lambda$.

Definice 4.2.8: Pokud $\mathbb{W}_\lambda \neq 0$, prvek $\lambda \in \Pi$ se nazývá *váha reprezentace* ϱ na $\mathbb{W}$, množiny $\mathbb{W}_\lambda$ pak *váhové podprostory*. Dimenze $\mathbb{W}_\lambda$ se označuje jako *multiplicita (násobnost) váhy* λ na $\mathbb{W}$.

Poznámka 4.2.9: Kořeny jsou váhy adjungované reprezentace.

Definice 4.2.10: Mějme ϱ reprezentaci $\mathfrak{g}$ na $\mathbb{W}$. Pak $v \in \mathbb{W}$ se nazývá *vektor nejvyšší váhy*, jestliže
1) $v \neq 0$;
2) existuje váha λ taková, že $v \in \mathbb{W}_\lambda$, tj. $\varrho(H)(v) = \lambda(H)v$ pro každé $H \in \mathfrak{h}$;
3) $\varrho(X_\alpha)(v) = 0$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi^+$.
Váha λ odpovídající vektoru nejvyšší váhy se pak nazývá *nejvyšší váha*.

Poznámka 4.2.11: Každá ireducibilní komplexní reprezentace jednoduché komplexní Lieovy algebry má právě jednu nejvyšší váhu. Izomorfní ireducibilní reprezentace mají stejnou nejvyšší váhu, neizomorfní ireducibilní reprezentace mají nejvyšší váhu různou.

Věta 4.2.12: (Weylova dimenzionální formule)
Buď $\mathbb{W}$ ireducibilní konečně rozměrná komplexní reprezentace komplexní jednoduché Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ s nejvyšší váhou λ. Nechť $\mathfrak{g}$ má systém pozitivních kořenů Φ^+ a $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ je nejnižší forma. Pak

$$\dim \mathbb{W} = \frac{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \lambda + \delta,\, \alpha \rangle_\kappa}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \delta,\, \alpha \rangle_\kappa}.$$

Důkaz: Viz Knappova monografie [14], str. 267.

4.3. Cliffordovy algebry

Definice 4.3.1: Buď $\mathbb{W}$ komplexní vektorový prostor s $\mathbb{C}$-bilineární formou $(\cdot, \cdot)$. Pak *Cliffordova algebra* $C\ell(\mathbb{W})$ je prostor $T(\mathbb{W})/I(\mathbb{W})$, kde $I(\mathbb{W})$ je oboustranný ideál v tenzorové algebře $T(\mathbb{W}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{W} \oplus (\mathbb{W} \otimes \mathbb{W}) \oplus \ldots$ generovaný prvky tvaru

$$x \otimes x + (x, x), \qquad x \in \mathbb{W}.$$

Pokud $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{W} = n$, značíme $Cl(\mathbb{W})$ jako $Cl(n, \mathbb{C})$. Násobení na $C\ell(\mathbb{W})$ se definuje pomocí násobení v $T(\mathbb{W})$ přirozeným způsobem.

Lemma 4.3.2: (Fundamentální lemma o Cliffordových algebrách)
Buď $\mathbb{W}$ komplexní vektorový prostor s nedegenerovanou $\mathbb{C}$-bilineární formou $(\, , \,)$. Dále mějme komplexní asociativní algebru A s jednotkou a homomorfizums $\phi : \mathbb{W} \to A$ s vlastností $\phi(x)\phi(x) = -(x, x)$, $x \in \mathbb{W}$.
Pak existuje právě jeden homomorfizmus (asociativních algeber s jednotkou) $\tilde{\phi} : C\ell(\mathbb{W}) \to A$ takový, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{W} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\iota"'] & A \\ & C\ell(\mathbb{W}) \arrow[u, "\tilde{\phi}"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

kde zobrazení ι je kanonické vnoření $\mathbb{W}$ do $C\ell(\mathbb{W}) = T(\mathbb{W})/I(\mathbb{W})$.

Důkaz: Viz Harveyho monografii [9], popřípadě monografii Goodman, Wallach [8]. $\square$

Poznámka 4.3.3: Pomocí bilineární formy na $\mathbb{W}$ lze definovat zobrazení $\| \cdot \| : \mathbb{W} \to \mathbb{C}$ předpisem $\|v\| := (v, v)$, $v \in \mathbb{W}$.

Poznámka 4.3.4: Bilineární forma $(\cdot , \cdot)$ na $\mathbb{W}$ je invariantní vůči zobrazení $x \mapsto -x$, $x \in \mathbb{W}$, a proto ji lze rozšířit podle Lemmatu 4.3.2 na automorfizmus $x \mapsto \tilde{x}$, $x \in C\ell(\mathbb{W})$, na $C\ell(\mathbb{W})$, který se nazývá *kanonický automorfizmus na* $C\ell(\mathbb{W})$, více viz Harvey [9].

Definice 4.3.5: Definujme *sudou část* $C\ell(\mathbb{W})$ jako

$$C\ell(\mathbb{W})^{even} := \{x \in C\ell(\mathbb{W}) | \; \tilde{x} = x\}$$

a *lichou část* $C\ell(\mathbb{W})$ jako

$$C\ell(\mathbb{W})^{odd} := \{x \in C\ell(\mathbb{W}) | \; \tilde{x} = -x\}.$$

Dále označme multiplikativní grupu Cliffordovy algebry $C\ell(\mathbb{W})$, tj. grupu všech invertibilních prvků v $C\ell(\mathbb{W})$, pomocí $C\ell^*(\mathbb{W})$.

Definice 4.3.6: *Pin grupa* $Pin\,(\mathbb{W})$ se nazývá podgrupa grupy $C\ell^*(\mathbb{W})$ generovaná jednotkovými vektory (prvky normy 1) ve $\mathbb{W}$, tedy

$$Pin\,(\mathbb{W}) := \{a \in C\ell(\mathbb{W}) | \; a = u_1 \cdot \ldots \cdot u_r, \; u_j \in \mathbb{W}, \; (u_j, u_j) = 1, \; j = 1, \ldots r, \; r \in \mathbb{N}\}$$

Definice 4.3.7: *Spin grupa* $Spin\,(\mathbb{W})$ je definována jako $Spin\,(\mathbb{W}) := Pin\,(\mathbb{W}) \cap C\ell^{even}(\mathbb{W})$, tedy

$$Spin\,(\mathbb{W}) := \{a \in C\ell(\mathbb{W}) |\ a = u_1 \cdot \ldots \cdot u_{2r},\ u_j \in \mathbb{W},$$
$$(u_j,\, u_j) = (u_{r+j},\, u_{r+j}) = 1,\ j = 1, \ldots r,\ r \in \mathbb{N}\}$$

Poznámka 4.3.8: Pokud $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{W} = n$, potom $Pin\,(\mathbb{W})$ resp. $Spin\,(\mathbb{W})$ označíme $Pin\,(n,\, \mathbb{C})$ resp. $Spin\,(n,\, \mathbb{C})$.

Definice 4.3.9: Definujme antiinvoluci $\gamma : C\ell(\mathbb{W}) \to \widehat{C\ell(\mathbb{W})}$ jako rozšíření identického zobrazení na $\mathbb{W}$, kde $\widehat{C\ell(\mathbb{W})}$ je *opačná Cliffordova algebra* k $C\ell(\mathbb{W})$, tj. Cliffordova algebra s násobením $*$ definovaným předpisem $x * y = y \cdot x$, $x, y \in C\ell(\mathbb{W})$.

Poznámka 4.3.10: Toto rozšíření je díky Fundamentálnímu lemmatu 4.3.2 o Cliffordových algebrách určeno jednoznačně.

Definice 4.3.11: Definujme zobrazení $\lambda : Spin\,(\mathbb{W}) \to GL(\mathbb{W})$ předpisem

$$\lambda(x)y = x \cdot y \cdot \gamma(x), \quad y \in \mathbb{W},\ x \in Spin\,(\mathbb{W}).$$

Poznámka 4.3.12: Zobrazení λ je grupový homomorfizmus, neboť platí $\lambda(x_1x_2)y = x_1x_2y\gamma(x_1x_2) = x_1x_2y\gamma(x_2)\gamma(x_1) = \lambda(x_1)\lambda(x_2)$.

Věta 4.3.13: Pro homomorfizmus $\lambda : Spin\,(n,\, \mathbb{C}) \to GL(n,\, \mathbb{C})$ platí:
1) λ je surjektivní na $SO(n,\, \mathbb{C})$;
2) $\lambda^{-1}(SO(n,\, \mathbb{C})) = Spin\,(n,\, \mathbb{C})$;
3) $\operatorname{Ker} \lambda = \{1,\, -1\} \simeq \mathbb{Z}_2$;
4) pro $n \geq 2$ je grupa $Spin\,(n,\, \mathbb{C})$ souvislá;
5) pro $n \geq 3$ je grupa $Spin\,(n,\, \mathbb{C})$ jednoduše souvislá a $\lambda : Spin\,(n,\, \mathbb{C}) \to SO(n,\, \mathbb{C})$ je univerzální (dvoulisté) nakrytí grupy $SO(n,\, \mathbb{C})$.

Důkaz: Viz Friedrichova monografie [6].

Poznámka 4.3.14: Ke každé grupě $Spin\,(n,\, \mathbb{C})$ lze přiřadit jistou komplexní reprezentaci (tzv. *spinorovou*) Σ_n, pro kterou platí:
1) Pokud $n = 2k + 1$, pak reprezentace Σ_{2k+1} je ireducibilní.
2) Pokud $n = 2k$, pak reprezentace Σ_{2k} se rozkládá na direktní součet $\Sigma_{2k} = \Sigma^+_{2k} \oplus \Sigma^-_{2k}$, kde Σ^+_{2k} a Σ^-_{2k} jsou ireducibilní reprezentace.

Více viz Friedrichova monografie [6].

5. Parabolické podalgebry

Parabolické algebry jsou nezřídka užívaným nástrojem výzkumu hladkých variet opatřenými další geometrickou strukturou, například konformní, projektivní nebo Cauchy–Riemannovou strukturou, popřípadě obecněji kontaktní strukturou.
První oddíl uvádí definice standardní Borelovy a standardní parabolické podalgebry. V druhém oddíle této kapitoly se budeme věnovat $|k|$-gradovaným algebrám Lieovým algebrám, zvláště pak asociované parabolické podalgebře $\mathfrak{p}$ ke $|k|$-gradované algebře $\mathfrak{g}$. Podrobnější a ucelenější pojednání o parabolických podalgebrách lze najít v připravované monografii Čap, Slovák [4].

5.1. Standardní parabolická podalgebra

Nechť $\mathfrak{g}$ je komplexní jednoduchá Lieova algebra. Zvolme pevně některou její Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$. Cartanově podalgebře $\mathfrak{h}$ odpovídá kořenový systém Φ. Dále vybereme systém Φ^+ pozitivních kořenů. Této volbě jednoznačně odpovídá množina Δ jednoduchých kořenů, viz Humphreysova monografie [10].

Definice 5.1.1: Nechť $\mathfrak{g}$ je jednoduchá komplexní Lieova algebra. Pak *standardní Borelova podalgebra* vzhledem ke $(\mathfrak{h}, \Phi^+)$, kde $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra algebry $\mathfrak{g}$ a Φ^+ systém pozitivních kořenů, je definována předpisem

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+,$$

kde $\mathfrak{n}_+ := \oplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$.

Definice 5.1.2: Nechť $\mathfrak{g}$ je jednoduchá komplexní Lieova algebra s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{h}$ a systémem jednoduchých kořenů Φ^+. Pak *standardní parabolická podalgebra* vzhledem ke $(\mathfrak{h}, \Phi^+)$ je podalgebra $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ taková, že $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, kde $\mathfrak{b}$ je standardní Borelova podalgebra vzhledem ke $(\mathfrak{h}, \Phi^+)$.

Poznámka 5.1.3: Nechť je dána standardní parabolická podalgebra $\mathfrak{p}$. Pak ji lze napsat ve tvaru $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Psi} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, kde $\Psi \subseteq \Phi^+$ je jednoznačně určena.
Definujme množinu $\Sigma \subseteq \Delta$, $\Sigma := \{\alpha \in \Delta | \ \mathfrak{g}_{-\alpha} \nsubseteq \mathfrak{p}\} = \{\alpha \in \Delta | \ \alpha \notin \Psi\}$. Dostáváme tak jednoznačnou korespondenci mezi Σ a Ψ a mezi Ψ a $\mathfrak{p}$. Tedy množiny $\{\Sigma \subseteq \Delta\}$ a $\{\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}\}$, kde $\mathfrak{p}$ je parabolická podalgebra obsahující standardní Borelovu podalgebru $\mathfrak{b}$, si jednoznačně odpovídají pro dané pevně zvolené $(\mathfrak{h}, \Phi^+)$. Více viz monografii Čap, Slovák [4].

5.2. Gradovaná Lieova algebra

Definice 5.2.1: Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pak $|k|$-*gradovaná Lieova algebra* je komplexní nebo reálná Lieova algebra, na které existuje rozklad $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ (jako vektorového prostoru) takový, že:

1) $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$ pro $i, j \in \{-k, \dots k\}$, $|i+j| \leq k$; pokud $|i+j| > k$, pak chápeme $\mathfrak{g}_{i+j}$ jako $\{0\}$;
2) $\mathfrak{g}_{-1}$ generuje $\mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ jako Lieovu algebru.

Takový rozklad se nazývá $|k|$-*gradace*.

Definice 5.2.2: Dále definujme:
1) *negativní část* $\mathfrak{g}_- := \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ (generovanou $\mathfrak{g}_{-1}$ jako Lieova algebra);
2) *pozitivní část* $\mathfrak{g}_+ := \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$;
3) *asociovanou parabolickou podalgebru* $\mathfrak{p}$ ke $|k|$-gradované algebře $\mathfrak{g}$ předpisem $\mathfrak{p} := \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$. Někdy pak $\mathfrak{g}_+$ nazýváme pozitivní částí $\mathfrak{p}$.

Poznámka 5.2.3: Je známo, že $\mathfrak{g}_0$ je reduktivní algebra, existuje proto rozklad $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_0^{ss}$, kde $\mathfrak{z}$ je centrum $\mathfrak{g}_0$ a $\mathfrak{g}_0^{ss} := [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ je polojednoduchá část $\mathfrak{g}_0$. Detaily jsou uvedeny v monografii Čap, Slovák [4].

Definice 5.2.4: Pro $|k|$-gradovanou algebru $\mathfrak{g}$ definujme množinu $\Phi_j^+ \subseteq \Phi^+$ tvaru

$$\Phi_j^+ := \left\{ \alpha = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{h}} n_i \alpha_i \,\middle|\, \sum_{\alpha_i \in \Sigma} n_i = j, n_i \in \mathbb{N} \right\}, \qquad j = -k, \dots, k.$$

Definice 5.2.5: Definujme gradaci algebry $\mathfrak{g}$ asociovanou k množině $\Sigma \subset \Delta$ následovně:

$$\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_0^+} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha});$$
$$\mathfrak{g}_j := \bigoplus_{\alpha \in \Phi_j^+} \mathfrak{g}_\alpha, \quad j > 0;$$
$$\mathfrak{g}_j := \bigoplus_{\alpha \in \Phi_{-j}^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}, \quad j < 0.$$

Poznámka 5.2.6: Lze ukázat, že $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$, viz monografii Čap, Slovák [4].

Poznámka 5.2.7: Dostáváme tak, že existuje jednoznačná korespondence mezi množinami $\{\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathfrak{p} \text{ parabolická}\}$, množinami $\{\Sigma \subseteq \Delta\}$ a k-gradacemi Lieovy algebry $\mathfrak{g}$.

Poznamenejme, že platí následující věta:

Věta 5.2.8: Nechť G je komplexní algebraická grupa a P její nějaká podgrupa. Potom platí, že pokud G/P je projektivní varieta, pak je P parabolická podgrupa G.

Důkaz: Viz monografii Goodmana a Wallacha [8], s. 506. □

Definice 5.2.9: Řekneme, že Lieova algebra $\mathfrak{g}$ má *kontaktní gradaci*, jestliže
1) $\mathfrak{g}$ je 2-gradovaná, tj. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$;

2) $\dim \mathfrak{g}_{\pm 2} = 1$;
3) závorka $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-2}$ je nedegenerované zobrazení, tj. jestliže pro libovolné $Z \in \mathfrak{g}_{-1}$ platí $[Z, X] = 0$ pro každé $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, pak $Z = 0$.

Poznámka 5.2.10: Klasifikace kontaktních gradací viz Yamaguchiho článek [21]. Je známo, že pro každou komplexní jednoduchou Lieovu algebru existuje právě jedna kontaktní gradace, jejich popis lze najít v citovaném Yamaguchiho článku.

6. Kohomologie Lieových algeber

Kohomologie Lieových algeber umožňují popsat vlastnosti Lieových algeber a dávají je do souvislosti s některými geometrickými pojmy, jako například křivost tzv. Cartanovy geometrie.
V této kapitole je krátký přehled potřebných pojmů (další informace a důkazy lze najít v monografiích Goodman, Wallach [8] a Čap, Slovák [4]). Následuje ilustrující výpočet kohomologie algebry $\mathfrak{sl}(2,\,\mathbb{C})$.
Třetí a čtvrtý oddíl je věnován konstrukci Hasseho diagramů pomocí reflexí kořenů, Weylovy grupy a saturovaných množin.
Závěr kapitoly je věnován Kostantově verzi Bottovy–Borelovy–Weilovy věty, ukazující spojitost kohomologií Lieových algeber a Hasseho diagramů.

6.1. Kořetězce, kohraniční operátor

Definice 6.1.1: Buď $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra, $(\rho,\,\mathbb{W})$ její reprezentace. Označme $C^p(\mathfrak{g},\,\mathbb{W})$ prostor všech alternujících zobrazení

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{g}\times\cdots\times\mathfrak{g}}_{p\text{–krát}} \to \mathbb{W}, \qquad p\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Tato zobrazení se nazývají *p–kořetězce*.

Poznámka 6.1.2: Prostor $C^0(\mathfrak{g},\,\mathbb{W})$ tvoří konstantní zobrazení do $\mathbb{W}$. Platí vztah $C^p(\mathfrak{g},\,\mathbb{W}) \simeq \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^p\mathfrak{g},\,\mathbb{W}\right) \simeq \bigwedge^p\mathfrak{g}^*\otimes\mathbb{W}$.

Definice 6.1.3: *Kohranice kořetězce* $\omega\in C^p(\mathfrak{g},\,\mathbb{W})$ je kořetězec $d\omega\in C^{p+1}(\mathfrak{g},\,\mathbb{W})$ definovaný

$$d\omega(X_1,\dots X_{p+1}) = \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{j+1}\rho(X_j)\,\omega\Big(X_1,\dots\widehat{X_j},\,\dots X_{p+1}\Big) +$$
$$+\sum_{1\le r<s\le p+1}(-1)^{r+s}\omega\Big([X_r,\,X_s],\,X_1,\dots\widehat{X_r},\dots\widehat{X_s},\dots X_{p+1}\Big),\ X_i\in\mathfrak{g},\ i=1,\dots,p+1.$$

Kohraniční operátor

$$d_p : C^p(\mathfrak{g},\,\mathbb{W}) \to C^{p+1}(\mathfrak{g},\,\mathbb{W})$$
$$\omega \mapsto d\omega$$

pak splňuje $d_{p+1}\circ d_p = 0$, $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Důkaz viz v monografii Goodman, Wallach [8].

Definice 6.1.4: *p–tá kohomologie Lieovy algebry* $\mathfrak{g}$ s koeficienty ve $\mathbb{W}$ je definována jako kvocient

$$H^p(\mathfrak{g},\,\mathbb{W}) := {Z^p(\mathfrak{g},\,\mathbb{W})}\big/{B^p(\mathfrak{g},\,\mathbb{W})}, \qquad p\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

kde $Z^p(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) := \operatorname{Ker}\big(d_p : C^p(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) \to C^{p+1}(\mathfrak{g}, \mathbb{W})\big)$ je *prostor p-kocyklů* a $B^p(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) := d_{p-1}\big(C^{p-1}(\mathfrak{g}, \mathbb{W})\big)$ je *prostor p–kohranic*. Klademe $B^0(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) = \{0\}$. Pro $p = 0$ platí $H^0(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) = \mathbb{W}^{\mathfrak{g}}$, kde $\mathbb{W}^{\mathfrak{g}}$ je podprostor $\mathfrak{g}$-invariantních vektorů ve $\mathbb{W}$, tj. všech vektorů $v \in \mathbb{W}$, které splňují $\varrho(X)v = 0$ pro každé $X \in \mathfrak{g}$.

6.2. Kohomologie algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Jako ilustrující příklad spočítejme dimenzi $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{W})$, kde $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}l(2, \mathbb{C})$ a $\mathbb{W}$ je definující reprezentace, tj. $\mathbb{W} = \mathbb{C}^2$.

Označení 6.2.1: Zvolme bázi $\mathbb{W}$ jako

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

bázi $\mathfrak{g}$ jako

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Za bázi prostoru $C^1(\mathfrak{g}^*, \mathbb{W}) \simeq \mathfrak{g} \otimes \mathbb{W}$ vezměme prvky tvaru

$$\begin{aligned} D_1 &= H^* \otimes e_1, \quad & D_2 &= X^* \otimes e_1, \quad & D_3 &= Y^* \otimes e_1, \\ D_1' &= H^* \otimes e_2, \quad & D_2' &= X^* \otimes e_2, \quad & D_3' &= Y^* \otimes e_2, \end{aligned}$$

kde $\{H^*, X^*, Y^*\}$ je duální báze k $\{H, X, Y\}$, tedy splňuje

$$A^*(A) = 1, \qquad A^*(B) = 0 \text{ pro } B \neq A, \qquad A, B \in \{H, X, Y\}.$$

Dále zvolíme bázi prostoru $C^2(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) = \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$ jako

$$\begin{aligned} E_1 &= (H^* \wedge X^*) \otimes e_1, \qquad & E_2 &= (H^* \wedge Y^*) \otimes e_1, \qquad & E_3 &= (X^* \wedge Y^*) \otimes e_1, \\ E_1' &= (H^* \wedge X^*) \otimes e_2, \qquad & E_2' &= (H^* \wedge Y^*) \otimes e_2, \qquad & E_3' &= (X^* \wedge Y^*) \otimes e_2 \end{aligned}$$

a bázi prostoru $\bigwedge^3 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$ jako

$$F = H^* \wedge X^* \wedge Y^* \otimes e_1, \qquad F' = H^* \wedge X^* \wedge Y^* \otimes e_2.$$

Poznámka 6.2.2: Snadno se spočítá, že platí vztahy

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y \quad \text{a} \quad [X, Y] = H.$$

Připomeňme, že pro $X_1 \wedge \ldots X_p \otimes v \in C^p(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) \simeq \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$ platí

$$\begin{aligned} &(X_1^* \wedge X_2^* \wedge \ldots \wedge X_p^* \otimes v)(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p) = \\ &\qquad = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S(\{1, \ldots p\})} \operatorname{sgn}(\sigma) X_1^*(Y_{\sigma(1)}) X_2^*(Y_{\sigma(2)}) \ldots X_p^*(Y_{\sigma(p)}) \otimes v, \end{aligned}$$

kde $S(\{1,\dots p\})$ je symetrická grupa na množině $\{1,\dots p\}$.

Kohraniční operátor d_0

Spočtěme matici kohraničního operátoru $d_0 : \bigwedge^0 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W} \simeq \mathbb{W} \to \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$ v bázích prostorů $\mathbb{W}$ a $\mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$ popsaných výše.

Protože

$$\begin{aligned}
d_0 e_1(H) &= \varrho(H)e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, \\
d_0 e_1(X) &= \varrho(X)e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\
d_0 e_1(Y) &= \varrho(Y)e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2,
\end{aligned}$$

je $d_1 e_1 = H^* \otimes e_1 + Y^* \otimes e_2$. Podobně ze vztahů

$$\begin{aligned}
d_0 e_2(H) &= \varrho(H)e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -e_2, \\
d_0 e_1(X) &= \varrho(X)e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1, \\
d_0 e_1(Y) &= \varrho(Y)e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,
\end{aligned}$$

plyne, že $d_1 e_2 = X^* \otimes e_1 - H^* \otimes e_2$.
Matice kohraničního operátoru $d_0 : \mathbb{W} \to \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$ má tak tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

odkud plyne $\dim \operatorname{Ker} d_0 = 4$ a $\dim \operatorname{Im} d_0 = 2$.

Kohraniční operátor d_1

Spočteme matici kohraničního operátoru $d_1 : \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W} \to \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$ ve zvolených bázích $\mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$ a $\bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$. Protože $d_1 D_i$ jsou alternující zobrazení do $\mathbb{W}$, budeme se zabývat hodnotami $d_1 D_i$ pouze pro (H, X), (H, Y) a (X, Y). Nejdříve vyjádříme $d_1 D_1$ v bázi

$\bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$:

$$\begin{aligned}
d_1 D_1(H, X) &= \rho(H)D_1(X) - \rho(X)D_1(H) - D_1([H, X]) = \\
&= H \cdot D_1(X) - X \cdot D_1(H) - D_1(2X) = \\
&= H \cdot (H^* \otimes e_1)(X) - X \cdot (H^* \otimes e_1)(H) - (H^* \otimes e_1)(2X) = \\
&= H \cdot (H^*(X) \otimes e_1) - X \cdot (H^*(H) \otimes e_1) - 2(H^*(X) \otimes e_1) = \\
&= H \cdot 0 - X \cdot e_1 - 2 \cdot 0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0; \\
d_1 D_1(H, Y) &= \rho(H)D_1(Y) - \rho(Y)D_1(H) - D_1([H, Y]) = \\
&= H \cdot (H^*(Y) \otimes e_1) - Y \cdot (H^*(H) \otimes e_1) - (H^*(-2Y) \otimes e_1) = \\
&= H \cdot 0 - Y \cdot e_1 - 0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_2; \\
d_1 D_1(X, Y) &= \rho(X)D_1(Y) - \rho(Y)D_1(X) - D_1([X, Y]) = \\
&= X \cdot (H^*(Y) \otimes e_1) - Y \cdot (H^*(X) \otimes e_1) - (H^*(H) \otimes e_1) = \\
&= X \cdot 0 - Y \cdot 0 - e_1 = -e_1.
\end{aligned}$$

Tedy $d_1 D_1 = -2 \cdot (X^* \wedge Y^*) \otimes e_1 - 2 \cdot (H^* \wedge Y^*) \otimes e_2 = -2E_3 - 2E_2'$, neboť

$$\begin{aligned}
&(-2 \cdot (X^* \wedge Y^*) \otimes e_1 - 2 \cdot (H^* \wedge Y^*) \otimes e_2)(H, X) = 0; \\
&(-2 \cdot (X^* \wedge Y^*) \otimes e_1 - 2 \cdot (H^* \wedge Y^*) \otimes e_2)(H, Y) = \\
&\qquad = -2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2}((H^*(H) \wedge Y^*(Y)) \otimes e_2 - (H^*(Y) \wedge Y^*(H)) \otimes e_2) = -e_2; \\
&(-2 \cdot (X^* \wedge Y^*) \otimes e_1 - 2 \cdot (H^* \wedge Y^*) \otimes e_2)(X, Y) = \\
&\qquad = -2 \cdot \frac{1}{2}((X^*(X) \wedge Y^*(Y)) \otimes e_1 - (X^*(Y) \wedge Y^*(X)) \otimes e_1) - 2 \cdot 0 = -e_1.
\end{aligned}$$

Stejným způsobem lze spočítat

$$\begin{aligned}
d_1 D_2 &= -2 \cdot (H^* \wedge X^*) \otimes e_1 - 2 \cdot (X^* \wedge Y^*) \otimes e_2 = -2E_1 - 2E_3'; \\
d_1 D_3 &= 6(H^* \wedge Y^*) \otimes e_1 = 6E_2; \\
d_1 D_1' &= -2(H^* \wedge X^*) \otimes e_1 - 2 \cdot (X^* \wedge Y^*) \otimes e_2 = -2E_1 - 2E_3'; \\
d_1 D_2' &= -6(H^* \wedge X^*) \otimes e_2 = -6E_2'; \\
d_1 D_3' &= 2 \cdot (X^* \wedge Y^*) \otimes e_1 + 2 \cdot (H^* \wedge Y^*) \otimes e_2 = 2E_3 + 2E_2'.
\end{aligned}$$

Matice zobrazení $d_1 : \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W} \to \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$ má tvar

$$\begin{pmatrix}
0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0
\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

proto $\dim \operatorname{Ker} d_1 = 2$ a $\dim \operatorname{Im} d_1 = 4$.

Kohraniční operátor d_2

Nyní spočítáme matici kohraničního operátoru $d_2 : \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W} \to \bigwedge^3 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$. Podobně jako výše stačí díky alternativitě kořetězců spočítat $d_2 E_i$ a $d_2 E'_i$ pro trojici (H, X, Y), $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} d_2 E_1(H, X, Y) &= \rho(H) E_1(X, Y) - \rho(X) E_1(H, Y) + \rho(Y) E_1(H, X) - \\ &\qquad - E_1([H, X], Y) + E_1([H, Y], X) - E_1([X, Y], H) = \\ &= H \cdot E_1(X, Y) - x \cdot E_1(H, Y) + Y \cdot E_1(H, X) - \\ &\qquad - 2E_1(X, Y) - 2E_1(Y, X) - E_1(H, H) = \\ &= H \cdot 0 - X \cdot 0 + Y \cdot e_1 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-0) - 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2. \end{aligned}$$

Tedy $d_2 E_1 = 6(H^* \wedge X^* \wedge Y^*) \otimes e_2 = 6F'$, protože

$$\begin{aligned} &6((H^* \wedge X^* \wedge Y^*) \otimes e_2)(H, X, Y) = \\ &\quad = 6 \cdot \frac{1}{6}((H^*(H) \wedge X^*(X) \wedge Y^*(Y)) \otimes e_2 - (H^*(H) \wedge X^*(Y) \wedge Y^*(X)) \otimes e_2 - \\ &\quad - (H^*(Y) \wedge X^*(X) \wedge Y^*(H)) \otimes e_2 - (H^*(X) \wedge X^*(H) \wedge Y^*(Y)) \otimes e_2 + \\ &\quad + (H^*(X) \wedge X^*(Y) \wedge Y^*(H)) \otimes e_2 + (H^*(Y) \wedge X^*(H) \wedge Y^*(X)) \otimes e_2) = e_2. \end{aligned}$$

Podobně lze spočítat, že

$$\begin{aligned} d_2 E_2(H, X, Y) &= 0, \\ d_2 E_3(H, X, Y) &= e_1, \\ d_2 E'_1(H, X, Y) &= 0, \\ d_2 E'_2(H, X, Y) &= -e_1, \\ d_2 E'_3(H, X, Y) &= -e_2 \end{aligned}$$

a stejně jako výše se snadno ověří, že

$$\begin{aligned} d_2 E_2 &= 0, \\ d_2 E_3 &= 6(H^* \wedge X^* \wedge Y^*) \otimes e_1 = 6F, \\ d_2 E'_1 &= 0, \\ d_2 E'_2 &= -6(H^* \wedge X^* \wedge Y^*) \otimes e_1 = -6F, \\ d_2 E'_3 &= -6(H^* \wedge X^* \wedge Y^*) \otimes e_2 = -6F'. \end{aligned}$$

Tudíž matice kohraničního operátoru $d_2 : \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W} \to \bigwedge^3 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$ je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

z čehož plyne, že $\dim \operatorname{Ker} d_2 = 4$ a $\dim \operatorname{Im} d_2 = 2$.

Kohraniční operátor d_3

Kohraniční operátor $d_3 : \bigwedge^3 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W} \to \bigwedge^4 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$, je triviální, neboť $\bigwedge^4 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W} \simeq 0$. Proto $\dim \operatorname{Ker} d_3 = 2$ a $\dim \operatorname{Im} d_3 = 0$.

Obecně pro $p \geq 3$ je $\bigwedge^{p+1} \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W} \simeq 0$, proto kohraniční operátory $d_p : \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W} \to \bigwedge^{p+1} \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W}$ jsou triviální.

Dimenze kohomologií $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Z Definice 6.1.4 kohomologií Lieovy algebry plyne, že

$$\dim H^p(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) = \dim \operatorname{Ker} d_p - \dim \operatorname{Im} d_{p-1}, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Dostáváme tak

$$\begin{aligned}
&\dim H^0(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) = 1,\\
&\dim H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) = \dim \operatorname{Ker} d_1 - \dim \operatorname{Im} d_0 = 2 - 2 = 0,\\
&\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) = \dim \operatorname{Ker} d_2 - \dim \operatorname{Im} d_1 = 4 - 4 = 0,\\
&\dim H^3(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) = \dim \operatorname{Ker} d_3 - \dim \operatorname{Im} d_2 = 2 - 2 = 0,\\
&\dim H^p(\mathfrak{g}, \mathbb{W}) = \dim \operatorname{Ker} d_p - \dim \operatorname{Im} d_{p-1} = 0 - 0 = 0, \quad p > 3,\ p \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

6.3. Reflexe podle kořenů. Weylova grupa

Buď $\mathfrak{g}$ polojednoduchá komplexní Lieova algebra, $\mathfrak{h}$ její Cartanova podalgebra dimenze l, Φ^+ systém pozitivních kořenů, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ množina jednoduchých kořenů.
Dále nechť $\mathfrak{p}$ je některá standardní parabolická algebra vzhledem k $(\mathfrak{h}, \Phi^+)$ a $\mathfrak{g}_+$ její pozitivní část. Symbol $\Phi^+(\mathfrak{g}_+)$ označuje množinu pozitivních kořenů, jejichž kořenové podprostory leží v $\mathfrak{g}_+$.
Připomeňme, že $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_\kappa$ je bilineární forma na $\mathfrak{h}^*$ určená Killingovou formou κ.

Definice 6.3.1: Pro každý kořen α označme

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle_\kappa}{\langle \alpha, \alpha \rangle_\kappa}\alpha, \qquad \beta \in \mathfrak{h}^*$$

reflexi podle roviny kolmé ke kořenu α.

Definice 6.3.2: *Weylova grupa* W je grupa generovaná všemi reflexemi s_α, $\alpha \in \Phi$.

Poznámka 6.3.3: Reflexi podle roviny kolmé k jednoduchému kořenu $\alpha_i \in \Delta$ budeme psát zkráceně s_i.
Reflexe mají následující vlastnosti (důkazy lze nalézt například v monografii Goodman, Wallach [8]):
1) $W \cdot \Delta = \Delta$ a $W \cdot \Phi = \Phi$;
2) množina $\{s_1, \ldots, s_l\}$ generuje W;
3) $s_i \alpha_i = -\alpha_i$ a s_i permutuje prvky množiny $\Phi^+ \setminus \{\alpha_i\}$, $i = 1, \ldots \dim \mathfrak{h}$;
4) pro každé $w \in W$ existují indexy $i_1, \ldots, i_k$ tak, že $w = s_{i_1} \ldots s_{i_k}$.

Definice 6.3.4: Definujme *délku* $w \in W$ jako

$$l(w) = \min \{\, k \mid w = s_{i_1} \ldots s_{i_k} \}.$$

Je-li $l(w) = k$ a $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$, pak $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ se nazývá *redukovaný výraz* prvku w. Redukovaný výraz obecně není určen jednoznačně.

Definice 6.3.5: Definujme pro každé $w \in W$ množinu

$$\Phi_w = \{\alpha \in \Phi^+ | \; w\alpha \in -\Phi^+\}.$$

Poznamenejme, že pro $1 \in W$ je $\Phi_1 = \emptyset$, pro $w = s_i$ je $\Phi_{s_i} = \{\alpha_i\}$.

Tvrzení 6.3.6: Buď $Q \subset \Phi^+(\mathfrak{g}_+)$. Pak $Q = \Phi_w$ pro nějaké $w \in W$ právě tehdy, když Q splňuje následující dvě podmínky:

(T1) Jestliže $\alpha, \beta \in Q$ a $\alpha + \beta \in \Phi$, potom $\alpha + \beta \in Q$.

(T2) Jestliže $\alpha \in Q$ a lze jej napsat jako $\alpha = \gamma + \delta$, kde $\gamma, \delta \in \Phi^+$, potom také $\gamma \in Q$ nebo $\delta \in Q$.

Důkaz: Viz monografii Goodman, Wallach [8].

Definice 6.3.7: Množina $Q \subset \Phi^+(\mathfrak{g}_+)$ splňující podmínky (T1) a (T2) předchozího tvrzení se nazývá *saturovaná množina pro* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$.

6.4. Hassův diagram $W^{\mathfrak{p}}$ pro pár $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$

Definice 6.4.1: *Hassův diagram* $W^{\mathfrak{p}}$ *pro pár* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ je graf s ohodnocenými hranami. Jeho vrcholy jsou saturované množiny pro $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$. Orientovaná ohodnocená hrana $\Phi_w \xrightarrow{\alpha} \Phi_{w'}$, $w, w' \in W$, existuje tehdy a jen tehdy, když $l(w') = l(w) + 1$ a $w' = s_\alpha w$. Ohodnocení hrany je právě $\alpha \in \Phi^+$.

Zatímco pro určení vrcholů Hassova diagramu stačí používat předchozí Tvrzení 6.3.6, následující věta pak poslouží k nalezení všech hran diagramu.

Věta 6.4.2: V Hassově diagramu pro parabolickou podalgebru $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ je mezi vrcholy odpovídající saturovaným množinám Φ_w a $\Phi_{w'}$ hrana $\Phi_w \xrightarrow{\alpha} \Phi_{w'}$ právě tehdy, když $l(w') = l(w) + 1$ a existuje kladné celé číslo k takové, že

$$\sum_{\beta \in \Phi_{w'}} \beta - \sum_{\gamma \in \Phi_w} \gamma = k\alpha, \qquad \alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}_+).$$

Důkaz: Viz monografii Čap, Slovák [4] nebo článek Krump, Souček [15]. □

6.5. Kostantova verze Bottovy-Borelovy-Weilovy věty

Kostantova verze Bottovy-Borelovy-Weilovy věty umožňuje efektivně počítat speciální kohomologie Lieových algeber. Další informace lze nalézt v monografii Čap, Slovák [4].

Poznámka 6.5.1: Mějme komplexní polojednoduchou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ s pevně zvolenou dvojicí $(\mathfrak{h}, \Phi^+)$, nějakou její standardní parabolickou podalgebru $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ a nějaký ireducibilní $\mathfrak{g}$-modul. Uvažme kohomologii Lieových algeber $H^*(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})$ podalgebry $\mathfrak{g}_+$ s koeficienty ve $\mathbb{W}$. Všechny prostory $C^k(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})$ ve standardním komplexu jsou $\mathfrak{g}_0$ moduly a diferenciály jsou $\mathfrak{g}_0$-homomorfismy, jednotlivé kohomologie $H^k(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})$ jsou tak přirozeně $\mathfrak{g}_0$-moduly.
Poznamenejme ještě, že $C^*(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W}) \simeq \wedge^* \mathfrak{g}_- \otimes \mathbb{W}$ jako $\mathfrak{g}_0$-modul.

Definice 6.5.2: Nechť $\nu \in \mathfrak{h}^*$ a $\mathbb{W}$ je nějaká komplexní ireducibilní reprezentace komplexní polojednoduché Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Buď $W_0^\nu \subseteq C^*(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})$ podprostor vektorů nejvyšší váhy příslušející váze ν.
Izotypická komponenta $W^\nu \subseteq C^*(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})$ nejvyšší váhy ν je definována jako $\mathfrak{g}_0$-podmodul $\mathfrak{g}_0$-generovaný W_0^ν.

Poznámka 6.5.3: $C^*(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})$ je direktní sumou nenulových izotypických komponent. Izotypická komponenta W^ν je direktní sumou kopií ireducibilních reprezentací Γ^ν s nejvyšší váhou ν.
Počet kopií Γ^ν ve W^ν se standardně nazývá *multiplicita* Γ^ν.

Věta 6.5.4: (Kostantova verze Bottovy–Borelovy–Weilovy věty)
Buď $\mathfrak{g}$ polojednoduchá komplexní Lieova algebra, $(\mathfrak{h}, \Phi^+)$ pevně zvolená Caratanova podalgebra a systém pozitivních kořenů, $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ standardní parabolická podalgebra vzhledem k $(\mathfrak{h}, \Phi^+)$, W Weylova grupa algebry $\mathfrak{g}$, $W^\mathfrak{p}$ Hasseho diagram pro pár $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ a δ nejnižší forma $\mathfrak{g}$. Dále buď $\mathbb{W}$ konečně dimenzionální komplexní ireducibilní reprezentace algebry $\mathfrak{g}$ s nejvyšší vahou λ. Uvažme kohomologii Lieových algeber $H^*(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})$ a pro $\mathfrak{g}_0$-dominantní váhu ν buď $H^*(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})^\nu$ izotypická komponenta s nejvyšší vahou ν pro přirozenou $\mathfrak{g}_0$-reprezentaci na této kohomologii.
Potom platí:

1) $H^*(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})^\nu \neq \{0\}$ právě tehdy, když existuje vrchol w Hassova diagramu $W^\mathfrak{p}$ takový, že $\nu = \nu_w := w(\lambda + \delta) - \delta$.
2) Pro libovolné $w \in W^\mathfrak{p}$ je izotypická komponenta $H^*(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})^{\nu_w}$ ireducibilní, navíc násobnost ν_w jako váhy $C^*(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})$ je jedna. Speciálně množina ireducibilních komponent kohomologie $H^*(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})$ jednoznačně odpovídá vrcholům Hassova diagramu $W^\mathfrak{p}$.
3) Pro dané $w \in W^\mathfrak{p}$ je izotypická komponenta $H^*(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})^{\nu_w}$ obsažena v $H^{l(w)}(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})$, kde $l(w)$ značí délku w.

Důkaz: Je uveden v monografii Čap, Slovák [4]. □

Příklad 6.5.5: Spočítejme dimenze kohomologií $H^p(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W})$ algebry $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ pro Borelovu podalgebru a definující reprezentaci $\mathbb{W}$ podle definice a podle Kostantovy verze Bottovy–Borelovy–Weilovy věty. Označme jediný jednoduchý kořen algebry $\mathfrak{g}$ symbolem α_1.

Nejprve proveďme výpočet z definice:
Zvolme báze prostoru $\mathbb{W}$ jako $\{e_1 := (1, 0)^T, e_2 := (0, 1)^T\}$ a podalgebry $\mathfrak{g}_-$ jako $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Kohraniční operátor $d_0 : \bigwedge^0 \mathfrak{g}_- \otimes \mathbb{W} \simeq \mathbb{W} \to \mathfrak{g}_- \otimes \mathbb{W}$ působí na prvcích báze následovně:

$$
\begin{aligned}
d_0 e_1(Y) &= Y e_1 = e_2, \\
d_0 e_2(Y) &= Y e_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Proto $d_0 = Y^* \otimes e_2$ a $\dim \operatorname{Ker} d_0 = 1$ a $\dim \operatorname{Im} d_0 = 1$. Pro $p > 0$ je kohraniční operátor $d_p : \bigwedge^p \mathfrak{g}_- \otimes \mathbb{W} \to \bigwedge^{p+1} \mathfrak{g}_- \otimes \mathbb{W}$ triviální, protože $\bigwedge^{p+1} \mathfrak{g}_- \otimes \mathbb{W} \simeq 0$. Navíc zjevně $\dim \operatorname{Ker} d_1 = 1$.
Dostáváme tak

$$
\begin{aligned}
&\dim H^0(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W}) = 1, \\
&\dim H^1(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W}) = \dim \operatorname{Ker} d_1 - \dim \operatorname{Im} d_0 = 1 - 1 = 0, \\
&\dim H^p(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W}) = \dim \operatorname{Ker} d_p - \dim \operatorname{Im} d_{p-1} = 0 - 0 = 0, \qquad p > 1.
\end{aligned}
$$

Spočítejme příslušný Hasseho diagram: Borelova podalgebra odpovídá množině $\Sigma = \{\alpha_1\}$. Tedy Hasseho diagram tvoří jediný vrchol odpovídající prázdné množině. Z Kostantovy verze Bottovy–Borelovy–Weilovy věty dostáváme tak

$$
\begin{aligned}
&\dim H^0(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W}) = 1, \\
&\dim H^p(\mathfrak{g}_+, \mathbb{W}) = 0, \qquad p > 0.
\end{aligned}
$$

Z tohoto výpočtu lze soudit, že výpočet kohomologií parabolických podalgeber je snazší za užití Kostantovy verze Bottovy–Borelovy–Weilovy věty než výpočet z definice.

7. Grupa F_4 a Moufangové rovina

7.1. Komplexifikace oktonionů

Poznámka 7.1.1: Násobení na $\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ je definováno standardním předpisem

$$(u_1 \otimes z_1) \cdot (u_2 \otimes z_2) := u_1 u_2 \otimes z_1 z_2, \qquad u_1,\, u_2 \in \mathbb{O},\ z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Násobení prvku $u_1 \otimes z_1 \in \mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ komplexním číslem z chápeme jako násobení prvkem $1 \otimes z$, tedy $z(u_1 \otimes z_1) = u_1 \otimes (z z_1)$. Podobně násobení oktonionem u je definováno jako $u(u_1 \otimes z_1) = (u u_1) \otimes z_1$, $u_1 \otimes z_1 \in \mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Poznámka 7.1.2: Násobení komplexním číslem nebo oktonionem nebudeme značit tečkou.

Lemma 7.1.3: Konjugace na $\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ je definována pomocí $\overline{u \otimes z} := \overline{u} \otimes z$, kde $\bar{u}$ je konjugace na $\mathbb{O}$ ve smyslu konjugace definované v oddílu 2.2.

Důkaz: Přímo z definice dostáváme

$$\overline{\overline{u \otimes z}} = \overline{\overline{u} \otimes z} = \overline{\overline{u}} \otimes z = u \otimes z.$$

Definované zobrazení je $\mathbb{C}$-bilineární: Pro libovolné $w \in \mathbb{C}$, $u \otimes z \in \mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ platí

$$\overline{w(u \otimes z)} = \overline{u \otimes wz} = \overline{u} \otimes wz = w(\overline{u} \otimes z) = w\overline{(u \otimes z)}.$$

Tedy zobrazení definované v tvrzení lemmatu je komplexní konjugace. $\square$

Poznámka 7.1.4: Levé resp. pravé násobení prvkem $u \otimes z \in \mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ budeme značit $L_{u\otimes z}$ resp. $R_{u \otimes z}$. Protože pro $r \in \operatorname{Re} \mathbb{O} \simeq \mathbb{R}$ leží $r \otimes z$ v centru $\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a $L_{r\otimes z} = R_{r \otimes z}$, budeme násobení prvkem $r \otimes_{\mathbb{R}} z$ značit pouze jako r.
Pro jednoduchost, pokud nebude třeba rozlišovat, budeme psát $r \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ resp. $u \in \mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ místo $r \otimes z \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ resp. $u \otimes z \in \mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Definice 7.1.5: Definujme zobrazení $\| \cdot \| : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{O}) \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$\|(r, u) \otimes z\| := (r^2 + u\bar{u}) zz.$$

Toto zobrazení budeme nazývat *normou* na $(\mathbb{R} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Definice 7.1.6:

1) *Komplexifikovaná výjimečná Jordanova algebra* $\mathcal{J}$ je algebra na $\operatorname{Herm}(3, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ se symetrickým součinem $A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA)$, $A, B \in \operatorname{Herm}(3, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Pro $\operatorname{Herm}(3, \mathbb{O})$ viz oddíl 2.3.
2) *Komplexní Lieova grupa* F_4 je grupa automorfizmů komplexifikované výjimečné Jordanovy algebry $\mathcal{J}$, tj. $F_4 = \operatorname{Aut}, \mathcal{J}$. Dále budeme slovo komplexní v označení grupy F_4 vynechávat.

Definice 7.1.7: *Moufangové rovina* $\mathbb{OP}^2_0$ je definována předpisem

$$\mathbb{OP}^2_0 := \left\{ A \in \mathrm{Herm}(3,\, \mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) |\; A^2 = 0,\ \mathrm{tr} A = 0,\ \mathrm{rank}\, A = 1 \right\}.$$

Definice 7.1.8: *Stopu* tr na $\mathrm{Herm}(n,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ zavedeme následovně: Pro prvek $A \in \mathrm{Herm}(n,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ tvaru

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & \bar{x}_3 & \bar{x}_2 \\ x_3 & r_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & r_3 \end{pmatrix} \otimes z, \qquad r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R},\ x_1, x_1, x_3 \in \mathbb{O},\ z \in \mathbb{C},$$

definujeme $\mathrm{tr}(A) := (r_1 + \ldots + r_n) z$ a dále multilineárně.

Poznámka 7.1.9: Zápisem prvku A v uvedené definici míníme obecně

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \otimes z_1 & \bar{x}_3 \otimes z_6 & \bar{x}_2 \otimes z_5 \\ x_3 \otimes z_6 & r_2 \otimes z_2 & x_1 \otimes z_4 \\ x_2 \otimes z_5 & \bar{x}_1 \otimes z_4 & r_3 \otimes z_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R},\ x_1, x_1, x_3 \in \mathbb{O}, \\ z_i \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots 6. \end{matrix}$$

Poznámka 7.1.10: Platí $\dim_{\mathbb{C}} F_4 = 52$, viz Knappovu monografii [14].

7.2. Realizace grupy Spin$(8,\, \mathbb{C})$

Definice 7.2.1: Definujme $\mathbb{C}$-podprostor $\mathbb{U}(8) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ předpisem

$$\mathbb{U}(8) := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & R_u \\ -R_{\bar{u}} & 0 \end{pmatrix} \otimes z \;\middle|\; u \in \mathbb{O},\ z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Sčítání na $\mathbb{U}(8)$ definujeme jako sčítání v tenzorovém součinu, násobení komplexním číslem w pak vzorcem

$$w \left(\begin{pmatrix} 0 & R_u \\ -R_{\bar{u}} & 0 \end{pmatrix} \otimes z \right) := \begin{pmatrix} 0 & R_u \\ -R_{\bar{u}} & 0 \end{pmatrix} \otimes wz.$$

„Norma“ na $\mathbb{U}(8)$ je definována vzorcem

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & R_u \\ -R_{\bar{u}} & 0 \end{pmatrix} \otimes z \right\| := u\bar{u}zz.$$

Poznámka 7.2.2: Při násobení v $\mathrm{Herm}(2,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \supset \mathbb{U}(8)$ dvou prvků z $\mathbb{U}(8)$ platí

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & R_u \\ -R_{\bar{u}} & 0 \end{pmatrix} \otimes z \right) \left(\begin{pmatrix} 0 & R_v \\ -R_{\bar{v}} & 0 \end{pmatrix} \otimes w \right) = \begin{pmatrix} -R_{u\bar{v}} & 0 \\ 0 & -R_{\bar{u}v} \end{pmatrix} \otimes zw.$$

Speciálně při násobení dvou stejných prvků dostáváme

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & R_u \\ -R_{\bar{u}} & 0 \end{pmatrix} \otimes z\right)\left(\begin{pmatrix} 0 & R_u \\ -R_{\bar{u}} & 0 \end{pmatrix} \otimes z\right) = -u\bar{u}zz \cdot Id.$$

Definice 7.2.3: Definujme izomorfizmus μ komplexního vektorového prostoru $\mathbb{W}(8) := \mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ do prostoru $\mathbb{U}(8) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ předpisem

$$\begin{array}{rccl} \mu: & \mathbb{W}(8) & \longrightarrow & \mathbb{U}(8) \\ & u \otimes z & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & R_u \\ -R_{\bar{u}} & 0 \end{pmatrix} \otimes z, \qquad u \in \mathbb{O},\ z \in \mathbb{C}. \end{array}$$

Poznámka 7.2.4: Jedná se skutečně o izomorfizmus komplexních vektorových prostorů, neboť $\mathrm{Ker}\,\mu = 0$ a $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{W}(8) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{U}(8) = 8$.

Věta 7.2.5: $C\ell(\mathbb{W}(8)) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ je izomorfizmus asociativních komplexních algeber.

Důkaz: Ze strukturní teorie komplexních Cliffordových algeber plyne $C\ell(\mathbb{W}(8)) \simeq M(16, \mathbb{C})$, viz například Friedrichova monografie [6]. Díky Fundamentálnímu lemmatu 4.3.2 o Cliffordových algebrách existuje právě jedno zobrazení f takové, že $f \circ i = \mu$, kde i je kanonické vnoření. Jinými slovy máme komutativní diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{W}(8) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\mu"'] & C\ell(\mathbb{W}(8)) \simeq M(16, \mathbb{C}) \arrow[d, "f"] \\ & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\big((\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\big) \end{tikzcd}$$

Dokažme injektivitu zobrazení f: Nechť f není injektivní. Pak ideál $f^{-1}(0)$ je roven množině $M(16, \mathbb{C})$neboť $M(16, \mathbb{C})$ je jednoduchá, a f je tak triviální, proto $f \circ i = 0 \circ i = 0 \neq \mu$, což je spor.
Protože dimenze $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\big((\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\big)$ a $M(16, \mathbb{C})$ jsou obě 256, musí být zobrazení f izomorfizmus asociativních algeber. $\square$

Lemma 7.2.6: Platí izomorfizmy

$$C\ell^{even}(8, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \right\}.$$

Důkaz: Viz Friedrichovu monografii [6].

Lemma 7.2.7: Označme C konjugační antiautomorfismus na obou sumandech $(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $C(x_1, x_2)^T \otimes w := (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T \otimes w$, $x_1, x_2 \in \mathbb{O}$, $w \in \mathbb{C}$.
Pak grupa $C \circ Spin\,(8, \mathbb{C}) \circ C$ je izomorfní grupě $Spin\,(8, \mathbb{C})$ a je v $C\ell^{even}(8, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ generována pomocí

$$\left\{ \begin{pmatrix} L_{\bar{u}} & 0 \\ 0 & L_u \end{pmatrix} \otimes z \,\middle|\, u \in \mathbb{O},\ z \in \mathbb{C},\ u\bar{u}zz = 1 \right\}.$$

Důkaz: Pro každé $(x_1,\, x_2)^T \otimes w \in (\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned}
&\left(C \circ \begin{pmatrix} R_u & 0 \\ 0 & R_{\bar{u}} \end{pmatrix} \otimes z \circ C\right)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes w\right) = \\
&= C\begin{pmatrix} \bar{x}_1 u \\ \bar{x}_2 \bar{u} \end{pmatrix} \otimes zw = \begin{pmatrix} \bar{u} x_1 \\ u x_2 \end{pmatrix} \otimes zw = \\
&= \begin{pmatrix} L_{\bar{u}} & 0 \\ 0 & L_u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes zw = \left(\begin{pmatrix} L_{\bar{u}} & 0 \\ 0 & L_u \end{pmatrix} \otimes z\right)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes w\right).
\end{aligned}$$

Odtud již plyne tvrzení. $\square$

7.3. Realizace grupy Spin$(9, \mathbb{C})$

Definice 7.3.1: Definujme $\mathbb{C}$-podprostor

$$\mathbb{U}(9) := \left\{ \left[\begin{pmatrix} r & R_u \\ R_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes z \right] \otimes \imath \;\middle|\; r \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{O} \right\} \subset \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \big(((\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \big).$$

Sčítání na $\mathbb{U}(9)$ definujeme přirozeně jako sčítání v tenzorovém součinu, násobení komplexním číslem pak

$$w \cdot \left(\left[\begin{pmatrix} r & R_u \\ R_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes z \right] \otimes \imath \right) := \left[\begin{pmatrix} r & R_u \\ R_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes wz \right] \otimes \imath, \; \left[\begin{pmatrix} r & R_u \\ R_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes z \right] \otimes \imath \in \mathbb{U}(9), w \in \mathbb{C}.$$

Definujme izomorfizmus κ komplexního vektorového prostoru $\mathbb{W}(9) := (\mathbb{R} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ do prostoru $\mathbb{U}(9) \subset \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \big(((\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \big)$ předpisem

$$\begin{aligned}
\kappa : \quad & \mathbb{W}(9) \longrightarrow \mathbb{U}(9), \\
& (r,\, u) \otimes z \longmapsto \left[\begin{pmatrix} r & R_u \\ R_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes z \right] \otimes \imath, \qquad r \in \mathbb{R},\, u \in \mathbb{O},\, z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Poznámka 7.3.2: Jedná se skutečně o izomorfizmus komplexních vektorových prostorů, neboť $\operatorname{Ker} \kappa = 0$ a $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{W}(9) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{U}(9) = 9$.

Lemma 7.3.3: Pro každé $(r,\, u) \otimes z \in (\mathbb{R} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ platí:

$$\kappa((r,\, u) \otimes z)\kappa((r,\, u) \otimes z) = -(r^2 + u\bar{u})zz\,(Id \otimes 1 \otimes 1) = -\|(r,u) \otimes z\| Id_{\mathbb{U}(9)}.$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}
&\left(\left[\begin{pmatrix} r & R_u \\ R_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes z \right] \otimes \imath \right) \cdot \left(\left[\begin{pmatrix} r & R_u \\ R_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes z \right] \otimes \imath \right) = \\
&= \begin{pmatrix} r & R_u \\ R_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & R_u \\ R_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes zz \otimes -1 = \begin{pmatrix} r^2 + u\bar{u} & ru - ru \\ r\bar{u} - r\bar{u} & u\bar{u} + r^2 \end{pmatrix} \otimes zz \otimes -1 = \\
&= -\big((r^2 + u\bar{u}) Id \otimes zz \otimes 1 \big) = -(r^2 + u\bar{u})zz\,(Id \otimes 1 \otimes 1) = -\|(r,u) \otimes z\| Id_{\mathbb{U}(9)}. \square
\end{aligned}$$

Věta 7.3.4: $C\ell(\mathbb{W}(9)) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(\left((\mathbb{O}\oplus\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right)$ je izomorfizmus komplexních asociativních algeber.

Důkaz: Ze strukturní teorie komplexních Cliffordových algeber plyne $C\ell(\mathbb{W}(9)) \simeq M(16,\,\mathbb{C})\oplus M(16,\,\mathbb{C})$, kde $M(n,\,\mathbb{C})$ značí algebru matic $n\times n$ s prvky v $\mathbb{C}$, viz Friedrichovu monografii [6].

Díky Fundamentálnímu lemmatu 4.3.2 o Cliffordových algebrách existuje právě jedno zobrazení f takové, že $f\circ i=\kappa$, kde i je kanonické vnoření $\mathbb{W}(9)$ do $C\ell(\mathbb{W}(9))$. Jinými slovy máme komutativní následující diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{W}(9) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\kappa"'] & C\ell(\mathbb{W}(9)) \simeq M(16,\,\mathbb{C})\oplus M(16,\,\mathbb{C}) \arrow[d, "f"] \\
& \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(\left((\mathbb{O}\oplus\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right)
\end{tikzcd}$$

Dokažme injektivitu zobrazení f:

Nechť f není injektivní. Pak $f^{-1}(0)$ je rovno buď $M(16,\,\mathbb{C})$, anebo $M(16,\,\mathbb{C})\oplus M(16,\,\mathbb{C})$, neboť f je homomorfizmus algeber, proto vzor 0 je ideál; přitom ale algebra $M(16,\,\mathbb{C})\oplus M(16,\,\mathbb{C})$ je polojednoduchá a sestává ze dvou jednoduchých algeber $M(16,\,\mathbb{C})$.

Nechť $f^{-1}(0)=M(16,\,\mathbb{C})\oplus M(16,\,\mathbb{C})$. Pak ale f je triviální a $f\circ i=0\circ i=0\neq\kappa$, což je spor.

Nechť $f^{-1}(0)=M(16,\,\mathbb{C})$. Pak nutně $f=(g,\,0)$ nebo $f=(0,\,g)$, $g: M(16,\,\mathbb{C})\to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(\left((\mathbb{O}\oplus\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right)$. Zvolme první případ $f=(g,\,0)$. Jelikož $\mathbb{W}(9)$ multiplikativně generuje $C\ell(\mathbb{W}(9))$ pomocí tenzorového součinu svých prvků, existuje nenulový prvek $0\neq v\in\mathbb{W}(9)$ takový, že $i(v)$ leží ve druhém sumandu $M(16,\,\mathbb{C})$. Dostáváme tak

$$fi(v)=(g,\,0)i(v)=(g,\,0)(0,\,i(v))=(g(0),\,0(i(v)))=(0,0)=0,$$

z komutativnosti diagramu pak plyne $\kappa(v)=0$, ale κ je definováno jako injektivní zobrazení, což nám dává spor.

Protože dimenze prostorů $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(\left((\mathbb{O}\oplus\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right)$ a $M(16,\,\mathbb{C})\oplus M(16,\,\mathbb{C})$ jsou obě 512, musí být zobrazení f izomorfizmus asociativních algeber. $\square$

Poznámka 7.3.5: Zřejmě $C\ell^{even}(9,\,\mathbb{C})\simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{O}\oplus\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$, jak plyne z předchozí věty a strukturní teorie Cliffordových algeber, viz Friedrichova monografie [6].

Lemma 7.3.6: Grupa $Spin\,(9,\,\mathbb{C})$ je generována v $C\ell^{even}(9,\,\mathbb{C})\simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{O}\oplus\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$ pomocí

$$\left\{\begin{pmatrix} r & R_u \\ R_{\bar{u}} & -r\end{pmatrix}\otimes z\,\middle|\, r\in\mathbb{R},\ u\in\mathbb{O}, z\in\mathbb{C},\ (r^2+u\bar{u})zz=1\right\}.$$

Důkaz: Plyne z definice komplexní spin grupy, neboť evidentně norma $\|\cdot\|$ prvků z uvedené množiny je 1. $\square$

Lemma 7.3.7: Označme C konjugační antiautomorfismus na obou sumandech $(\mathbb{O}\oplus\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, $C(x_1,\,x_2)^T\otimes w := (\bar{x}_1,\,\bar{x}_2)^T\otimes w$, $x_1,x_2\in\mathbb{O}$, $w\in\mathbb{C}$. Pak grupa $C\circ Spin\,(9,\,\mathbb{C})\circ$

C je izomorfní grupě $Spin\,(9,\,\mathbb{C})$ a je v $C\ell^{even}(9,\,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{O}\oplus\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}))$ generována pomocí

$$\left\{ \begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes z \,\middle|\, r \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{O}, z \in \mathbb{C},\ (r^2 + u\bar{u})zz = 1 \right\}.$$

Důkaz: Pro každé $(x_1,\, x_2)^T \otimes w \in (\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned}
&\left(C \circ \begin{pmatrix} r & R_u \\ R_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes z \circ C \right) \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes w \right) = \\
&= C \begin{pmatrix} r\bar{x}_1 + \bar{x}_2\bar{u} \\ \bar{x}_1 u - r\bar{x}_2 \end{pmatrix} \otimes zw = \begin{pmatrix} rx_1 + ux_2 \\ \bar{u}x_1 - rx_2 \end{pmatrix} \otimes zw = \\
&= \begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes zw = \left(\begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes z \right) \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes w \right).
\end{aligned}$$

Odtud již plyne tvrzení. □

7.4. Reprezentace grupy Spin$(9,\,\mathbb{C})$

Označení 7.4.1: Nejprve si zavedeme rozklad prvků z $\mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} r_1 & \bar{x}_3 & \bar{x}_2 \\ x_3 & r_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & r_3 \end{pmatrix} \otimes z = \\
&= \left[r_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \bar{x}_3 & \bar{x}_2 \\ x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & x_1 \\ 0 & \bar{x}_1 & -\rho \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \otimes z,
\end{aligned}$$

kde $\rho := \frac{1}{2}(r_2 - r_3)$ a $\lambda := \frac{1}{2}(r_2 + r_3)$. Označme ještě $x := (x_3,\, x_2)^t$

$$a := \begin{pmatrix} r_2 & x_1 \\ \bar{x}_1 & r_3 \end{pmatrix}.$$

Pak můžeme zapsat rozklad $\mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ na direktní součet následovně:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;&\overset{\sim}{\longleftrightarrow}\; \big(\mathbb{R} \oplus (\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \oplus (\mathbb{R} \oplus \mathbb{O}) \oplus \mathbb{R}\big) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \\
\begin{pmatrix} r_1 & \bar{x}^t \\ x & a \end{pmatrix} \otimes z \;&\longmapsto\; \big(r_1,\ x,\ (\rho,\, x_1),\ \lambda\big) \otimes z.
\end{aligned}$$

Poznámka 7.4.2: V následujících odstavcích definujeme akci $C \circ Spin\,(9, C) \circ C$ na jednotlivých sumandech rozkladu $\mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Spinorová reprezentace Σ_9 na druhém sumandu

Poznámka 7.4.3: Z klasifikace komplexních Cliffordových algeber je známo, že existuje 16-dimenzionální ireducibilní reprezentace Σ_9 grupy $Spin\,(9,\,\mathbb{C})$, viz monografie Goodman, Wallach [8].

Tvrzení 7.4.4: Spinorová reprezentace Σ_9 grupy $Spin\,(9, \mathbb{C})$ je izomorfní s reprezentací $\sigma : Spin\,(9, \mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}((\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, kde

$$\sigma\left[\begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes z\right]\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes w\right) := \left(\begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes zz\right)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes w\right) = \\ = \begin{pmatrix} rx_1 + ux_2 \\ \bar{u}x_1 - rx_2 \end{pmatrix} \otimes zwz.$$

Důkaz: Uvažme vnoření $\iota : Spin\,(9, \mathbb{C}) \to C\ell^{even}(9, \mathbb{C})$. Toto zobrazení lze chápat jako reprezentaci grupy $Spin\,(9, \mathbb{C})$ na $(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ neboť platí $C\ell^{even}(9, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,((\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, kde $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,((\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ je podle Wedderburnovy věty jednoduchá, viz například monografii Goodman, Wallach [8]. Z toho plyne, že ι je ireducibilní reprezentace grupy $Spin\,(9, \mathbb{C})$. Přitom ι zároveň zadává reprezentaci reprezentaci $C\ell^{even}(9, \mathbb{C})$, jak dokážeme pomocí následujícího lemmatu:

Lemma 7.4.5: Grupa $Spin\,(9, \mathbb{C})$ generuje sčítáním a násobením skalárem algebru $C\ell^{even}(9, \mathbb{C})$. Speciálně pro každé $v \in C\ell^{even}(9, \mathbb{C})$ existují prvky $c_i \in \mathbb{C}$, $v_i \in Spin\,(9, \mathbb{C})$ tak, že $v = \sum_i c_i v_i$.

Důkaz: Uvažme prvek $C\ell^{even}(9, \mathbb{C})$ tvaru

$$v := c1 + \sum_{i,j} c_{ij} u_i u_j + \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl} u_i u_j u_k u_l + \dots, \quad c, c_{ij}, c_{ijkl}, \dots \in \mathbb{C},$$

kde prvky u_i, u_j,... jsou prvky ortonormální báze (ta existuje podle Grammova–Schmidtova ortogonalizačního procesu), speciálně jsou to prvky $Pin(9, \mathbb{C})$. $\square$

Definujme zobrazení $\tilde{\iota} : C\ell^{even}(9, \mathbb{C}) \to C\ell^{even}(9, \mathbb{C})$ předpisem

$$\tilde{\iota}(v + w) := \iota(v) + \iota(w), \quad v, w \in Spin\,(9, \mathbb{C}), \\ \tilde{\iota}(cv) := c\iota(v), \quad v \in Spin\,(9, \mathbb{C}), c \in \mathbb{C}.$$

Pak $\tilde{\iota}$ je reprezentace, neboť je zřejmě lineární a díky výše uvedenému Lemmatu 7.4.5 platí $v = \sum_i c_i v_i$, $w = \sum_j d_j w_j$, $c_i, d_j \in \mathbb{C}$, $v_i, w_j \in Spin\,(9, \mathbb{C})$ a

$$\iota(v \cdot w) = \iota(\sum_i c_i v_i \cdot \sum_j d_j w_j) = \sum_{i,j} c_i d_j \iota(v_i \cdot w_j) = \sum_{i,j} c_i d_j \iota(v_i)\iota(w_j) = \\ = \sum_i c_i \iota(v_i) \cdot \sum_j d_j \iota(w_j) = \iota(v) \cdot \iota(w).$$

Avšak $C\ell^{even}(9, \mathbb{C}) \simeq C\ell(8, \mathbb{C})$ (viz Friedrich [6]), která ja jednoduchá, a proto každá její ireducibilní reprezentace je ekvivalentní reprezentaci na $\mathbb{W}(8)$, pomocí níž je definována spinorová reprezentace. Dostáváme tedy $\sigma \simeq \Sigma_9$. $\square$

Díky výše dokázané ekvivalenci reprezentací budeme reprezentaci σ stručně nazývat spinorovou.

Vektorová reprezentace V_9

Dvoulisté nakrytí $\chi'' : Spin\,(9,\,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(9,\,\mathbb{C})$ komplexní speciální ortogonální grupy komplexní spin grupou definuje reprezentaci $\chi' : C \circ Spin\,(9,\mathbb{C}) \circ C \to SO(9,\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{W}(9))$ grupy $C \circ Spin\,(9,\mathbb{C}) \circ C$ na komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{W}(9)$ předpisem $\chi'(C \circ g \circ C)v := \chi''(g)v,\ g \in Spin\,(9,\mathbb{C}), v \in \mathbb{W}(9)$. Díky platnosti vztahu $C \circ C = Id$ lze snadno ověřit, že χ'' je opravdu homomorfizmus příslušných grup, tedy reprezentace.
Díky izomorfizmu

$$\left\{ \begin{pmatrix} \rho & L_{x_1} \\ L_{\bar{x}_1} & -\rho \end{pmatrix} \otimes w \,\middle|\, \rho \in \mathbb{R},\ x_1 \in \mathbb{O},\ w \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{W}(9)$$

a z definice χ'' dostáváme pro zmíněnou reprezentaci χ' explicitní předpis

$$\chi'(g)\big((\rho,\, x_1)^T \otimes w\big) = \left(\begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes z\right)\left(\begin{pmatrix} \rho & L_{x_1} \\ L_{\bar{x}_1} & -\rho \end{pmatrix} \otimes w\right)\left(\overline{\begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix}}^T \otimes z\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho(r^2 - u\bar{u}) + r(x_1\bar{u} + u\bar{x}_1) & 2\rho r u + u\bar{x}_1 u - r^2 x_1 \\ 2\rho r\bar{u} + \bar{u}x_1\bar{u} - r^2\bar{x}_1 & \rho(\bar{u}u - r^2) - r(\bar{x}_1 u + \bar{u}x_1) \end{pmatrix} \otimes zwz,$$

kde g je element grupy $C \circ Spin\,(9,\,\mathbb{C}) \circ C$ tvaru $g = \begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\bar{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes z$.
Definujme reprezentaci $\chi : C \circ Spin(9,\mathbb{C}) \circ C \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Herm}(2,\mathbb{O}) \otimes \mathbb{C})$ grupy $C \circ Spin(9,\mathbb{C}) \circ C$ na komplexním vektorovém prostoru $\mathrm{Herm}(2,\,\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ předpisem

$$\chi(g)\left(\begin{pmatrix} r_2 & L_{x_1} \\ L_{\bar{x}_1} & r_3 \end{pmatrix} \otimes w\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} r_2 r^2 + r_3 u\bar{u} + r(x_1\bar{u} + u\bar{x}_1) & r(r_2 - r_3)u - r^2 x_1 + u\bar{x}_1 u \\ r(r_2 - r_3)\bar{u} - r^2\bar{x}_1 + \bar{u}x_1\bar{u} & r_2\bar{u}u + r_3 r^2 - r(\bar{x}_1 u + \bar{u}x_1) \end{pmatrix} \otimes zwz.$$

Snadno se ověří, že $\chi' = \chi \circ \psi$, kde ψ je $\mathbb{C}$-monomorfizmus vektorových prostorů $\psi : \mathbb{W}(9) \to \mathrm{Herm}(2,\mathbb{O}) \otimes \mathbb{C}$, tj. χ je rozšíření reprezentace χ'. Reprezentaci χ budeme nazývat vektotovou reprezentací $C \circ Spin(9,\mathbb{C}) \circ C$.

Akce grupy $C \circ Spin\,(9,\,\mathbb{C}) \circ C$ na $\mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

Akce g grupy $C \circ Spin\,(9,\,\mathbb{C}) \circ C$ na $\mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ nyní definujeme jako kombinaci vektorové reprezentace χ a spinorové reprezentace σ.

Definice 7.4.6: Pro

$$g = \begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\bar{u}} & r \end{pmatrix} \otimes z \in C \circ Spin\,(9,\,\mathbb{C}) \circ C,$$

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & \bar{x}_3 & \bar{x}_2 \\ x_3 & r_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & r_3 \end{pmatrix} \otimes w = \begin{pmatrix} r_1 & \bar{x}^t \\ x & a \end{pmatrix} \otimes w \in \mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{C}),$$

$$x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{O}^2 \quad \text{a} \quad a = \begin{pmatrix} r_2 & x_1 \\ \bar{x}_1 & r_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(2,\,\mathbb{O})$$

definujme akci prvku g předpisem

$$g(A) := \begin{pmatrix} (r^2+u\bar{u})r_1 & \overline{g(x)}^t \\ g(x) & \chi_g(a) \end{pmatrix} \otimes zwz =$$

$$= \begin{pmatrix} (r^2+u\bar{u})r_1 & r\bar{x}_3+\bar{x}_2\bar{u} & \bar{x}_3u - r\bar{x}_2 \\ rx_3+ux_2 & r_2r^2+r_3u\bar{u}+r(x_1\bar{u}+u\bar{x}_1) & r(r_2-r_3)u - r^2x_1+u\bar{x}_1u \\ \bar{u}x_3 - rx_2 & r(r_2-r_3)\bar{u} - r^2\bar{x}_1+\bar{u}x_1\bar{u} & r_2\bar{u}u+r_3r^2-r(\bar{x}_1u+\bar{u}x_1) \end{pmatrix} \otimes zwz.$$

Poznámka 7.4.7: Pro jednoduchost zapišme reprezentaci grupy $C\circ Spin\,(9,\,\mathbb{C})\circ C$ na $\mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ jiným způsobem. Nejprve pro prvek $g \in C\circ Spin\,(9,\,\mathbb{C})\circ C$ definujme zobrazení

$$C\circ Spin\,(9,\,\mathbb{C})\circ C \ni g = \begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\bar{u}} & r \end{pmatrix} \otimes z \longmapsto (G, E_g) \in (\mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})^2$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & u \\ 0 & \bar{u} & -r \end{pmatrix} \otimes z, \quad E_g = \begin{pmatrix} r^2+u\bar{u}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes z.$$

Protože je matice v E_g diagonální a reálná, E_g komutuje s prvky v $\mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Navíc platí následující rovnosti:

$$E_gAG = E_gA = AE_g = GAE_g.$$

Snadno se ověří, že

$$g\cdot A = GAG + E_gAG = (G+E_g)AG, \qquad A \in \mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}.$$

Dále

$$(G+E_g)G = \left[\begin{pmatrix} r^2+u\bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & r & u \\ 0 & \bar{u} & -r \end{pmatrix} \otimes z\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & u \\ 0 & \bar{u} & -r \end{pmatrix} \otimes z\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} r^2+u\bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & r & u \\ 0 & \bar{u} & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & u \\ 0 & \bar{u} & -r \end{pmatrix} \otimes zz =$$

$$= \begin{pmatrix} r^2+u\bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & r^2+u\bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & r^2+u\bar{u} \end{pmatrix} \otimes zz = Id\otimes(r^2+u\bar{u})zz = Id.$$

Lemma 7.4.8: Akce g grupy $C\circ Spin\,(9,\,\mathbb{C})\circ C$ na $\mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ splňuje

$$(g\cdot A)\circ(g\cdot A) = g\cdot(A^2), \qquad A \in \mathrm{Herm}(3,\,\mathbb{O})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}.$$

Důkaz: Z předchozí poznámky 7.4.7 plyne, že stačí ověřit rovnost

$$((G+E_g)AG)\circ((G+E_g)AG) = (G+E_g)A^2G,$$

kde $\circ$ značí násobení ve výjimečné Jordanově algebře $\mathcal{J}$. Lineární obal $\langle 1,\ r,\ -r,\ u,\ \bar{u}\rangle$ prvků prvního činitele G je jako $\mathbb{R}$-algebra izomorfní $\mathbb{C}$. Pak pro libovolné $w \in \mathbb{O}$ je lineární obal $\langle 1,\ r,\ -r,\ u,\ \bar{u},\ w\rangle$ izomorfní asociativní algebře $\mathbb{H}$, proto platí rovnost

$$(u_1wu_2)(u_3wu_4) = u_1(w(u_2u_3)w)u_4, \qquad u_1, u_2, u_3, u_4 \in \langle 1,\ r,\ -r,\ u,\ \bar{u}\rangle,\ w \in \mathbb{O}.$$

Nyní provedeme polarizaci: Dosaďme do obou stran rovnice $w = x + y$, $x, y \in \mathbb{O}$. Obdržíme tak rovnosti

$$\begin{aligned}
(u_1wu_2)\,(u_3wu_4) &= (u_1(x+y)u_2)(u_3(x+y)u_4) = (u_1xu_2 + u_1yu_2)(u_3xu_4 + u_3yu_4) = \\
&= (u_1xu_2)(u_3xu_4) + (u_1xu_2)(u_3yu_4) + (u_1yu_2)(u_3xu_4) + (u_1yu_2)(u_3yu_4), \\
u_1[w(u_2u_3)w]u_4 &= u_1[(x+y)(u_2u_3)(x+y)]u_4 = \\
&= u_1[x(u_2u_3)x + x(u_2u_3)y + y(u_2u_3)x + y(u_2u_3)y]u_4 = \\
&= u_1[x(u_2u_3)x]u_4 + u_1[x(u_2u_3)y]u_4 + u_1[y(u_2u_3)x]u_4 + u_1[y(u_2u_3)y]u_4.
\end{aligned}$$

Porovnáním výrazů a použitím výše uvedené rovnosti dostáváme

$$(u_1xu_2)(u_3yu_4) + (u_1yu_2)(u_3xu_4) = u_1[x(u_2u_3)y]u_4 + u_1[y(u_2u_3)x]u_4.$$

Tuto rovnost využijeme při násobení matic v $((G+E_g)AG)((G+E_g)AG)$ a dostaneme tak

$$\begin{aligned}
&((G+E_g)AG)((G+E_g)AG) + ((G+E_g)AG)((G+E_g)AG) = \\
&= (G+E_g)\big[A(G(G+E_g))A\big]G + (G+E_g)\big[A(G(G+E_g))A\big]G = \\
&= (G+E_g)\big[A(Id))A\big]G + (G+E_g)\big[A(Id))A\big]G = \\
&= GA^2G + GA^2G.
\end{aligned}$$

Odtud už plyne tvrzení. □

Věta 7.4.9: Grupa $C \circ Spin\,(9,\ \mathbb{C}) \circ C$ je podgrupa $F_4 = \mathrm{Aut}(\mathcal{J})$.

Důkaz: Díky předchozímu Lemmatu 7.4.8 platí pro $A, B \in \mathrm{Herm}(3,\ \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ následující rovnost:

$$\begin{aligned}
&(g\cdot A)(g\cdot A) + (g\cdot A)(g\cdot B) + (g\cdot B)(g\cdot A) + (g\cdot B)(g\cdot B) = \\
&= (g\cdot A + g\cdot B)(g\cdot A + g\cdot B) = \big(g\cdot(A+B)\big)\big(g\cdot(A+B)\big) = g\cdot\big((A+B)(A+B)\big) = \\
&= g\cdot(A^2 + AB + BA + B^2) = g\cdot(A^2) + g\cdot(AB) + g\cdot(BA) + g\cdot(B^2).
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme $g(A)g(B) + g(B)g(A) = g(AB) + g(BA)$ a g tak splňuje podmínku $g(A) \circ g(B) = g(A \circ B)$, tedy $g\cdot \in \mathrm{Aut}(\mathcal{J}) = F_4$. □

7.5. Moufangové rovina jako homogenní prostor

V této kapitole dokážeme, že grupa F_4 má tranzitivní akci na Moufangové rovině $\mathbb{OP}_0^2$, což je ekvivalentní následující větě.

Věta 7.5.1: Pro každé $A \in \mathbb{O}\mathbb{P}^2_0$ existuje prvek $g \in F_4$ takový, že

$$g(A) = E_1, \qquad E_1 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1 \in \mathrm{Herm}(3,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Důkaz: Nechť $A \in \mathbb{O}\mathbb{P}^2_0$, tj.

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & \bar{x}_3 & \bar{x}_2 \\ x_3 & r_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & r_3 \end{pmatrix} \otimes w = \begin{pmatrix} r_1 & \bar{x}^T \\ x & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(3,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

$$r_i \in \mathbb{R},\ x_i \in \mathbb{O},\ i = 1, 2, 3,\ x = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} r_2 & x_1 \\ \bar{x}_1 & r_3 \end{pmatrix} \otimes w \in \mathrm{Herm}(2,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

s vlastnostmi $A^2 = 0$, $\mathrm{tr}\, A = 0$, $\mathrm{rank}\, A = 1$.
Existenci prvku $g \in F_4$ s vlastností $g(A) = E_1$ dokážeme v několika krocích:

a) K diagonalizaci $a \in \mathrm{Herm}(2,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ na tvar $a' = \begin{pmatrix} r'_2 & 0 \\ 0 & r'_3 \end{pmatrix} \otimes w'$ pomocí akce χ grupy $C \circ \mathit{Spin}\,(9,\, \mathbb{C}) \circ C$ na $\mathrm{Herm}(2,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ použijeme následující lemma:

Lemma 7.5.2: Stopa tr a norma $\|\cdot\|$ na $\mathrm{Herm}(2,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ jsou invariantní vůči akci χ grupy $C \circ \mathit{Spin}\,(9,\, \mathbb{C}) \circ C$ na $\mathrm{Herm}(2,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, tedy pro každé $a \in \mathrm{Herm}(2,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $g \in C \circ \mathit{Spin}\,(9,\, \mathbb{C}) \circ C$ platí

$$\mathrm{tr}\,(a) = \mathrm{tr}[\chi(g)a], \qquad \|a\| = \|\chi(g)a\|.$$

Důkaz: Z definice stopy tr a akce grupy $C \circ \mathit{Spin}\,(9,\, \mathbb{C}) \circ C$ na $\mathrm{Herm}(2,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ je

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(\chi(g)a) &= (r_2 r^2 + r_3 u\bar{u} + r(x_1\bar{u} + u\bar{x}_1) + r_2\bar{u}u + r_3 r^2 - r(x_1\bar{u} + u\bar{x}_1))zwz = \\ &= (r_2 + r_3)(r^2 + u\bar{u})zzw = (r_2 + r_3)w = \mathrm{tr}\,(a). \end{aligned}$$

Z definice normy na $\mathrm{Herm}(2,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dostáváme

$$\|\chi(g)a\| = \mathrm{tr}\,(\chi(g)a^2) = \mathrm{tr}\,(a^2) = \|a\|,$$

čímž je dokázáno tvrzení lemmatu. □

Z lemmatu plyne, že $C \circ \mathit{Spin}\,(9,\, \mathbb{C}) \circ C$-orbita prvku $a \in \mathrm{Herm}(2,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ leží v 9-dimenzionálním prostoru

$$\tau_a := \{b \in \mathrm{Herm}(2,\, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \mid \mathrm{tr}\, b = \mathrm{tr}\, a = (r_2 + r_3)w\}.$$

Protože norma $\|\cdot\|$ je také χ-invariantní, leží χ-orbita zvoleného prvku a v 9-sféře o kvadrátu „poloměru“ $\|a\|$. Jelikož $C \circ \mathit{Spin}\,(9,\, \mathbb{C}) \circ C \twoheadrightarrow SO(9, \mathbb{C})$ a $SO(9,\, \mathbb{C})$ operuje tranzitivně na komplexní 9-sféře, dostáváme, že existuje prvek $h \in C \circ \mathit{Spin}\,(9,\, \mathbb{C}) \circ C$, že $h \cdot a = a'$.

b) Nechť $a' = \begin{pmatrix} r'_2 & 0 \\ 0 & r'_3 \end{pmatrix} \otimes w'$ je prvek $\mathrm{Herm}(2, \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ získaný v bodě a). Ukážeme, že existuje $h' \in C \circ Spin\,(9, \mathbb{C}) \circ C$, který při spinorové akci σ grupy $C \circ Spin\,(9, \mathbb{C}) \circ C$ na $(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ zobrazí $x = (x_3, x_2)^T \otimes w$ na $\sigma(h')x = (y_3, y_2)^T \otimes w$, kde $y_3, y_2 \in \mathbb{R}$ a přitom $\chi(h')a = a$.

ba) Díky rovnosti

$$\begin{aligned}
\chi(g)a' &= \chi(g) \left(\frac{1}{2}(r'_2 - r'_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes w' + \frac{1}{2}(r'_2 + r'_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes w' \right) = \\
&= \frac{1}{2}(r'_2 - r'_3)\chi(g)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes w' \right) + \frac{1}{2}(r'_2 + r'_3)\chi(g)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes w' \right) = \\
&= \frac{1}{2}(r'_2 - r'_3)\chi(g)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes w' \right) + \frac{1}{2}(r'_2 + r'_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes w'
\end{aligned}$$

je $\mathrm{Isot}_{a'}(C \circ Spin\,(9, \mathbb{C}) \circ C) = \mathrm{Isot}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \otimes w'}(C \circ Spin\,(9, \mathbb{C}) \circ C)$.

bb) Grupa $C \circ Spin\,(8, \mathbb{C}) \circ C$ je pomocí

$$\left\{ \begin{pmatrix} L_{\bar{u}} & 0 \\ 0 & L_u \end{pmatrix} \otimes z \;\middle|\; \begin{matrix} u \in \mathbb{O}, z \in \mathbb{C}, \\ u\bar{u}zz = 1 \end{matrix} \right\} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}) \subseteq$$
$$\subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

vnořena do grupy $C \circ Spin\,(9, \mathbb{C}) \circ C$.

Lemma 7.5.3: $C \circ Spin\,(8, \mathbb{C}) \circ C \subseteq \mathrm{Isot}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \otimes w'}(C \circ Spin\,(9, \mathbb{C}) \circ C)$.

Důkaz: Pro libovolný prvek $g = \left(\begin{smallmatrix} L_{\bar{u}} & 0 \\ 0 & L_u \end{smallmatrix}\right) \otimes z \in C \circ Spin\,(8, \mathbb{C}) \circ C$ platí

$$\begin{aligned}
\chi(g) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} L_{\bar{u}} & 0 \\ 0 & L_u \end{pmatrix} \otimes z \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes w' \right) \left(\overline{\begin{pmatrix} L_{\bar{u}} & 0 \\ 0 & L_u \end{pmatrix}}^T \otimes z \right) = \\
&= \begin{pmatrix} L_{\bar{u}} & 0 \\ 0 & L_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_u & 0 \\ 0 & -L_{\bar{u}} \end{pmatrix} \otimes zzw' = \begin{pmatrix} L_{u\bar{u}} & 0 \\ 0 & -L_{u\bar{u}} \end{pmatrix} \otimes zzw' = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes (u\bar{u}zz)w' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes w'.
\end{aligned}$$

□

Dále uvažme spinorovou reprezentaci ρ grupy $Spin\,(8, \mathbb{C})$ na $(\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \oplus (\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$. Tato reprezentace se rozkládá na součet dvou ireducibilních reprezentací $\rho_+ \oplus \rho_-$. Pak $Spin\,(8, \mathbb{C})$-orbita bodu $(x_3, x_2) \in (\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \oplus (\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ je

$$\begin{aligned}
&\{(u_3, u_2) \in (\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \oplus (\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \mid \|u_3\| = \|x_3\|,\ \|u_2\| = \|x_2\|\} \\
&\qquad \simeq \begin{cases} S^7_{\mathbb{C}} \times S^7_{\mathbb{C}} & \text{pokud } x_3 \neq 0 \text{ a } x_2 \neq 0; \\ S^7_{\mathbb{C}} \times \{0\} & \text{pokud } x_3 = 0\ x_2 \neq 0; \\ \{0\} \times S^7_{\mathbb{C}} & \text{pokud } x_3 \neq 0 \text{ a } x_2 = 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

kde $S^7_{\mathbb{C}}$ je komplexní 7-dimenzionální sféra. Speciálně bod $(y_3,\, y_2) := (\|x_3\|,\, \|x_2\|)$ leží v této orbitě, přičemž $y_3, y_2 \in \mathrm{Re}\,(\mathbb{O}) \simeq \mathbb{R}$.

c) Kombinací kroků *a*) a *b*) získáme z prvku A prvek $B' \in \mathbb{OP}^2_0$, který má v prvním činiteli reálné prvky:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & \bar{x}_3 & \bar{x}_2 \\ x_3 & r_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & r_3 \end{pmatrix} \otimes w \longmapsto B' := \begin{pmatrix} r_1 & y_3 & y_2 \\ y_3 & r_2' & 0 \\ y_2 & 0 & r_3' \end{pmatrix} \otimes w', \qquad r_1, r_2', r_3', y_2, y_3 \in \mathbb{R}.$$

d) Prvek $B' \in \mathbb{OP}^2_0$ budeme chápat jako komplexní matici, neboli ztotožníme

$$B' = \begin{pmatrix} r_1 & y_3 & y_2 \\ y_3 & r_2' & 0 \\ y_2 & 0 & r_3' \end{pmatrix} \otimes w' \simeq \begin{pmatrix} \check{r}_1 & \check{y}_3 & \check{y}_2 \\ \check{y}_3 & \check{r}_2 & 0 \\ \check{y}_2 & 0 & \check{r}_3 \end{pmatrix} =: B, \qquad \begin{array}{c} \check{r}_1 = r_1 w', \\ \check{r}_2 = r_2' w',\ \check{r}_3 = r_3' w', \\ \check{y}_2 = y_2 w',\ \check{y}_3 = y_3 w', \end{array}$$

matice B je tak komplexní maticí. Ortogonální grupa $SO(3,\, \mathbb{C}) \subset F_4$ má akci na $\mathbb{OP}^2_0$ danou předpisem

$$SO(3,\, \mathbb{C}) \ni g \longmapsto \rho_g \in \mathrm{Aut}\mathcal{J}, \qquad \rho_g(A) = gAg^T \quad \text{pro všechny } A \in \mathcal{J}.$$

Lemma 7.5.3: Pro každou matici

$$B = \begin{pmatrix} \check{r}_1 & \check{y}_3 & \check{y}_2 \\ \check{y}_3 & \check{r}_2 & 0 \\ \check{y}_2 & 0 & \check{r}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{OP}^2_0, \qquad \check{r}_1, \check{r}_2, \check{r}_3, \check{y}_2, \check{y}_3 \in \mathbb{C},$$

existuje prvek $Q \in SO(3,\, \mathbb{C})$ takový, že $QBQ^T = E_1$.

Důkaz: Nejprve z

$$0 = B^2 = \begin{pmatrix} \check{r}_1^2 + \check{y}_2^2 + \check{y}_3^2 & \check{y}_3(\check{r}_1 + \check{r}_2) & \check{y}_3(\check{r}_1 + \check{r}_3) \\ \check{y}_3(\check{r}_1 + \check{r}_2) & \check{y}_3^2 + \check{r}_2^2 & \check{y}_2\check{y}_3 \\ \check{y}_3(\check{r}_1 + \check{r}_3) & \check{y}_2\check{y}_3 & \check{y}_2^2 + \check{r}_3^2 \end{pmatrix}$$

obdržíme $\check{y}_2 = 0 \ \vee\ \check{y}_3 = 0$. Nechť platí $\check{y}_2 = 0$. Pak z $\check{y}_2^2 + \check{r}_3^2 = 0$ plyne $\check{r}_3 = 0$, z $\mathrm{tr}\, B = 0$ plyne $\check{r}_1 = -\check{r}_2$ a $\check{r}_1^2 + \check{y}_2^2 + \check{y}_3^2 = 0$ implikuje $\check{r}_1 = \pm i\check{y}_3$. Dostáváme tak, že

$$B = \begin{pmatrix} \pm i\check{y}_3 & \check{y}_3 & 0 \\ \check{y}_3 & \mp i\check{y}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjevně zároveň neplatí $\check{y}_2 = 0$ a $\check{y}_3 = 0$, neboť pak by B byla nulová matice a ta není prvkem $\mathbb{OP}^2_0$.
Obdobně pro $\check{y}_3 = 0$ a $\check{y}_2 \neq 0$ dostáváme

$$B = \begin{pmatrix} \pm i\check{y}_2 & 0 & \check{y}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \check{y}_2 & 0 & \mp i\check{y}_2 \end{pmatrix}.$$

Hledané matice $Q \in SO(3, \mathbb{C})$ s vlastností $QBQ^T = E_1$ pro jednotlivé typy matic B jsou shrnuty v následující tabulce:

B	Q
$\begin{pmatrix} i\check{y}_3 & \check{y}_3 & 0 \\ \check{y}_3 & -i\check{y}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\check{y}_3}} & 0 & -\frac{i\sqrt{1-\check{y}_3}}{\sqrt{\check{y}_3}} \\ -\frac{i(1-\check{y}_3)}{\sqrt{\check{y}_3}} & \sqrt{\check{y}_3} & -\frac{\sqrt{1-\check{y}_3}}{\sqrt{\check{y}_3}} \\ i\sqrt{1-\check{y}_3} & \sqrt{1-\check{y}_3} & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -i\check{y}_3 & \check{y}_3 & 0 \\ \check{y}_3 & i\check{y}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1(1-\check{y}_3)}{\sqrt{\check{y}_3}} & \sqrt{\check{y}_3} & -\frac{\sqrt{1-\check{y}_3}}{\sqrt{\check{y}_3}} \\ \frac{1}{\sqrt{\check{y}_3}} & 0 & \frac{i\sqrt{1-\check{y}_3}}{\sqrt{\check{y}_3}} \\ -i\sqrt{1-\check{y}_3} & \sqrt{1-\check{y}_3} & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} i\check{y}_2 & 0 & \check{y}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \check{y}_2 & 0 & -i\check{y}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\check{y}_2}} & \frac{i\sqrt{1-\check{y}_2}}{\sqrt{\check{y}_2}} & 0 \\ -\frac{i(1-\check{y}_2)}{\sqrt{\check{y}_2}} & \frac{\sqrt{1-\check{y}_2}}{\sqrt{\check{y}_2}} & 1 \\ i\sqrt{1-\check{y}_2} & 1 & \sqrt{1-\check{y}_2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -i\check{y}_2 & 0 & \check{y}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \check{y}_2 & 0 & i\check{y}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{i(1-\check{y}_2)}{\sqrt{\check{y}_2}} & -\frac{\sqrt{1-\check{y}_2}}{\sqrt{\check{y}_2}} & \sqrt{\check{y}_2} \\ \frac{1}{\sqrt{\check{y}_2}} & \frac{i\sqrt{1-\check{y}_2}}{\sqrt{\check{y}_2}} & 0 \\ -i\sqrt{1-\check{y}_2} & 1 & \sqrt{1-\check{y}_2} \end{pmatrix}$

Tabulka 3

$\square$

Tím je dokázáno tvrzení věty. $\square$

8. Lieova algebra $\mathfrak{f}_4$

V této kapitole jsou shrnuty výsledky o Lieově algebře $\mathfrak{f}_4$: Po přehledu vlastností kořenového systému a zmínce o gradovaných algebrách příslušející k Σ, kde Σ je jednoprvková množina, je ukázána kontaktní gradace algebry $\mathfrak{f}_4$. I když všechny kontaktní gradace jak reálných, tak komplexních jednoduchých Lieových algeber jsou klasifikovány v Yamaguchiho článku [21] [1] a předpis uvádějící, jak určit polojednudchou část reduktivní části příslušné parabolické podalgebry (a to nejen v případě kontaktní gradace), je uveden v monografii Čap, Slovák [4], budeme se kontaktní gradací algebry $\mathfrak{f}_4$ zabývat bez reference k těmto pracím a nebudeme užívat teorie tam vyvinuté nebo použité, za to však naše metody budou zcela explicitní a snad i názornější.
Dále následují oddíly věnované výpočtu Hassových diagramů pro páry $(\mathfrak{f}_4,\, \mathfrak{p}_1)$ a $(\mathfrak{f}_4,\, \mathfrak{p}_4)$. Závěr kapitoly se zabývá vztahem parabolických podgrup grupy F_4 a Moufangové roviny.

8.1. Základní fakta o algebře $\mathfrak{f}_4$

V tomto oddíle shrneme známé vlastnosti algebry $\mathfrak{f}_4$ na základě Knappovy monografie [14]. Jednoduchá komplexní Lieova algebra $\mathfrak{f}_4$ je 52-dimenzionální. Její Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ je čtyřdimenzionální. Uvažme libovolnou ortonormální komplexní bázi $\mathfrak{h}^*$ tvaru $\{\epsilon_1,\, \epsilon_2,\, \epsilon_3,\, \epsilon_4\}$ (vůči bilineární formě $\langle\, \cdot\, ,\, \cdot\, \rangle_\kappa$ Killingovy formy κ algebry $\mathfrak{f}_4$).
Množina Φ všech kořenů je

$$\Phi = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j |\, i < j\} \cup \{\pm\epsilon_i\} \cup \left\{\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)\right\}, \qquad i,\, j = 1, 2, 3, 4$$

(možné jsou všechny kombinace + a $-$, stejně tak i v dalším textu). Množina $\Phi^+ \subseteq \Phi$ pozitivních kořenů má tvar

$$\Phi^+ = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j |\, i < j\} \cup \{\epsilon_i\} \cup \left\{\frac{1}{2}(\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)\right\}, \qquad i,\, j = 1, 2, 3, 4,$$

přičemž jednoduché kořeny mají tvar

$$\begin{aligned}\alpha_1 =& \epsilon_2 - \epsilon_3,\\ \alpha_2 =& \epsilon_3 - \epsilon_4,\\ \alpha_3 =& \epsilon_4,\\ \alpha_4 =& \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4).\end{aligned}$$

Poznámka 8.1.1: V monografii Knapp [14] jsou jednoduché kořeny uvedeny v opačném pořadí.

[1] Připomeňme, že pro každou komplexní jednoduchou Lieovu algebru existuje právě jedna její kontaktní gradace.

Z definice spočteme Cartanovu matici C algebry $\mathfrak{f}_4$ vzhledem k (Φ, Δ) (viz Definici 4.1.21):

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Kvůli opačnému očíslování kořenů v Knapově monografii [14] je tam uvedená Cartanova matice grupy F_4 transponovaná k matici uvedené v této práci.) Snadno ověříme, že

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

proto (jak plyne ze vzorce uvedeného v Definici 4.1.21) fundamentální váhy mají tvar

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \\
\varpi_2 &= 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 4\alpha_4 = 2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \\
\varpi_3 &= 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 3\alpha_4 = \frac{1}{2}(3\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4), \\
\varpi_4 &= \ \ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = \epsilon_1.
\end{aligned}$$

V následující tabulce jsou všechny pozitivní kořeny zapsány v bázi $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$.

Například zápis $\epsilon_1 = (1232)$ znamená, že $\epsilon_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$.

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= (1232),\\
\epsilon_2 &= (1110),\\
\epsilon_3 &= (0110),\\
\epsilon_4 &= (0010),\\
\epsilon_1 + \epsilon_2 &= (2342),\\
\epsilon_1 - \epsilon_2 &= (0122),\\
\epsilon_1 + \epsilon_3 &= (1342),\\
\epsilon_1 - \epsilon_3 &= (1122),\\
\epsilon_1 + \epsilon_4 &= (1242),\\
\epsilon_1 - \epsilon_4 &= (1222),\\
\epsilon_2 + \epsilon_3 &= (1220),\\
\epsilon_2 - \epsilon_3 &= (1000),\\
\epsilon_2 + \epsilon_4 &= (1120),\\
\epsilon_2 - \epsilon_4 &= (1100),\\
\epsilon_3 + \epsilon_4 &= (0120),,\\
\epsilon_3 - \epsilon_4 &= (0100),\\
\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) &= (0001),\\
\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) &= (1111),\\
\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4) &= (0111),\\
\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4) &= (0011),\\
\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4) &= (0121),\\
\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4) &= (1121),\\
\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4) &= (1221),\\
\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4) &= (1231).
\end{aligned}$$

Nyní již snadno určíme množiny Φ_j^+ a $\mathfrak{g}_j$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro $\mathfrak{f}_4$ a libovolnou jednoprvkovou množinu $\Sigma \subseteq \Delta$. V následující tabulce jsou pak shrnuty počty prvků těchto množin.

Σ	$\|\Phi_0^+\|$	$\|\Phi_1^+\|$	$\|\Phi_2^+\|$	$\|\Phi_3^+\|$	$\|\Phi_4^+\|$	dimenze $\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{g}_3$	$\mathfrak{g}_4$	$\sum_{-4}^4 \dim \mathfrak{g}_i$
$\{\alpha_1\}$	9	14	1	0	0	22	14	1	0	0	52
$\{\alpha_2\}$	4	12	6	2	0	12	12	6	2	0	52
$\{\alpha_3\}$	4	6	9	2	3	12	6	9	2	3	52
$\{\alpha_4\}$	9	8	7	0	0	22	8	7	0	0	52

Tabulka 4

V uvedených případech jsou množiny $\mathfrak{g}_j$ jak pro $j > 4$, tak pro $j < -4$ zjevně prázdné, neboť $\sum_{i=-4}^4 \dim \mathfrak{g}_i = 52 = \dim \mathfrak{f}_4$.

8.2. Kontaktní gradace $\mathfrak{f}_4$

Věta 8.2.1: Gradace algebry $\mathfrak{f}_4$ asociovaná k $\Sigma = \{\alpha_1\}$ je kontaktní.

Důkaz: Z definice 5.2.4 vyplývá, že

$$\begin{aligned}
\Phi_0^+ &= \{\epsilon_1 - \epsilon_2,\, \epsilon_3,\, \epsilon_3 \pm \epsilon_4,\, \epsilon_4,\, \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)\},\\
\Phi_1^+ &= \{\epsilon_1,\, \epsilon_1 \pm \epsilon_3,\, \epsilon_1 \pm \epsilon_4,\, \epsilon_2,\, \epsilon_2 \pm \epsilon_3,\, \epsilon_2 \pm \epsilon_4,\, \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)\},\\
\Phi_2^+ &= \{\epsilon_1 + \epsilon_2\},\\
\Phi_j^+ &= \emptyset, \quad j > 2,
\end{aligned}$$

odkud plyne, že první dvě podmínky definice kontaktní gradace (viz Definice 5.2.9) jsou splněny. Ověřme nedegenerovanost závorky $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-2}$:
Z Poznámky 4.1.9 víme, že $[\mathfrak{g}_\alpha,\, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, $\alpha,\, \beta, \in \Phi$, $\alpha + \beta \neq 0$. Zvolme prvky $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tak, aby $[X_\alpha,\, X_\beta] = X_{\alpha+\beta}$.
Obecný prvek $\hat{X} \in \Phi_1^+$, rozepsaný v bázi $\langle X_\alpha;\ \alpha \in \Phi_1^+\rangle$, je tvaru

$$\begin{aligned}
\hat{X} = a_1 X_{\epsilon_1} &+ a_{1+3} X_{\epsilon_1+\epsilon_3} + a_{1-3} X_{\epsilon_1-\epsilon_3} + a_{1+4} X_{\epsilon_1+\epsilon_4} + a_{1-4} X_{\epsilon_1-\epsilon_4} +\\
&+ a_2 X_{\epsilon_2} + a_{2+3} X_{\epsilon_2+\epsilon_3} + a_{2-3} X_{\epsilon_2-\epsilon_3} + a_{2+4} X_{\epsilon_2+\epsilon_4} + a_{2-4} X_{\epsilon_2-\epsilon_4} +\\
&+ a_{(+--)} X_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3-\epsilon_4)} + a_{(+-+)} X_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\epsilon_4)} +\\
&+ a_{(++-)} X_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\epsilon_4)} + a_{(+++)} X_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4)},
\end{aligned}$$

kde koeficienty a_Ξ jsou komplexní čísla. Pak matice zobrazení $[\hat{X},\,\cdot\,]$ ve výše uvedené bázi je tvaru

$$\begin{pmatrix}
0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2+3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2+4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{1-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{1+3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{1+4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{(+++)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{(++-)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{(+-+)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{(+--)} & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

tedy zobrazení $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-2}$ je nedegenerované, čímž jsme dokázali tvrzení věty. $\square$

Věta 8.2.2: Pro kontaktní gradaci určenou množinou $\Sigma = \{\alpha_1\}$ Lieovy algebry $\mathfrak{f}_4$ platí

$$\mathfrak{g}_0^{ss} \simeq \mathfrak{sp}(6, \mathbb{C}), \quad \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \simeq \mathbb{C}.$$

Důkaz: Pro $\alpha \in \Phi_0^+ \cup -\Phi_0^+$ definujme $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tak, aby jednak $[X_\alpha, X_\beta] = X_{\alpha+\beta}$ pro $\alpha, \beta \in \Phi$ a $\alpha + \beta \neq 0$ a jednak $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$, kde H_α je kokořen ke kořenu α. Definujme $\mathfrak{Z} := \mathbb{C}H_{\alpha_1}$ a $\mathfrak{G}_0^{ss} := \mathrm{span}(\{X_\alpha, H_\beta | \alpha \in \Phi_0^+ \cup -\Phi_0^+, \beta \in \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}\})$.
Z definice $\mathfrak{Z}$ a $\mathfrak{G}_0^{ss}$ plyne, že $\mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{G}_0^{ss} = \mathfrak{g}_0$ na úrovni vektorových prostorů. Ukážeme-li, že $\mathfrak{Z}$ komutuje s elementy $\mathfrak{G}_0^{ss}$ a $[\mathfrak{G}_0^{ss}, \mathfrak{G}_0^{ss}] \subseteq \mathfrak{G}_0^{ss}$, dokážeme tím platnost $\mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{G}_0^{ss} = \mathfrak{g}_0$ na úrovni Lieových algeber.
Komutativnost $\mathfrak{Z}$ a $\mathfrak{G}_0^{ss}$ ověříme jen na příkladě $X_{\epsilon_1+\epsilon_2}$, komutátory s ostatními elementy lze spočítat obdobně. $[H_{\alpha_1}, X_{\epsilon_1+\epsilon_2}] = (\epsilon_1 + \epsilon_2)(H_{\alpha_1})X_{\epsilon_1+\epsilon_2} = 0$, neboť $(\epsilon_1 + \epsilon_2)H_{\alpha_1} = 0$, jak plyne z definice kokořenů.
Relaci $[\mathfrak{G}_0^{ss}, \mathfrak{G}_0^{ss}] \subseteq \mathfrak{G}_0^{ss}$ lze ověřit následovně. Snadno se zjistí, že množina kořenů $R := \{\alpha \in \Phi_0^+ \cup -\Phi_0^+, \beta \in \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}\}$ tvoří ireducibilní kořenový systém, a proto podle věty 4.1.19 existuje jednoduchá komplexní Lieova algebra $\mathfrak{s}$ jejíž kořenový systém je R, tj. nutně $\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{G}_0^{ss}$. Nyní tedy stačí ověřit, že $\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{sp}(6, \mathbb{C})$. Za tímto účelem spočtěme Cartanovu matici C Lieovy algebry $\mathfrak{s}$ např. pomocí kořenového systému R. Z definice Cartanovy matice (viz Definice 4.1.21) dostáváme, že

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

která se shoduje s Cartanovou maticí $\mathfrak{sp}(6, \mathbb{C})$ uvedené např. v monografii Čap, Slovák [4]. Upozorněme jen, že ve zmíněné monografii je pod termínem Cartanova matice rozumí matice transponovaná ke Cartanově matici definované v této práci. $\square$

8.3. Hassův diagram pro pár $(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{p}_1)$

Uvažme parabolickou podalgebru $\mathfrak{p}_1$, která odpovídá $\Sigma = \{\alpha_1\}$.
Pro tento oddíl označme kořeny patřící do $\Phi^+(\mathfrak{g}_+) = \Phi_1^+ \cup \Phi_2^+$ následovně:

$$a_1 = e_2 - e_3, \quad a_2 = e_2 - e_4, \quad a_3 = e_2, \quad a_4 = e_2 + e_4, \quad a_5 = e_2 + e_3,$$

$$b_1 = e_1 - e_3, \quad b_2 = e_1 - e_4, \quad b_3 = e_1, \quad b_4 = e_1 + e_4, \quad b_5 = e_1 + e_3,$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(e_1 + e_2 - e_3 - e_4\right), \quad c_2 = \frac{1}{2}\left(e_1 + e_2 - e_3 + e_4\right),$$

$$c_3 = \frac{1}{2}\left(e_1 + e_2 + e_3 - e_4\right), \quad c_4 = \frac{1}{2}\left(e_1 + e_2 + e_3 + e_4\right),$$

$$d_1 = e_1 + e_2.$$

Pak platí:

Tvrzení 8.3.1: Saturované množiny příslušející dané parabolické algebře $\mathfrak{p}_1$ mají tvar

a) $A_i^j = \{a_k;\ 1 \le k < i - j^2 + 6j - 5\} \cup \{c_k;\ 1 \le k < j\} \qquad 1 \le i \le \frac{6}{j},\ j = 1, 2, 3;$

b) $B^j = \{a_k;\ 1 \le k \le 5\} \cup \{b_1\} \cup \{c_1, c_2\} \cup \{d_k;\ 1 \le k < j\} \qquad j = 1, 2;$

c) $C_i^j = \{a_k;\ 1 \le k \le 5\} \cup \{b_k;\ 1 \le k < i\} \cup \{c_k;\ 1 \le k < j + 2\} \cup \{d_1\}$
$1 \le i \le \frac{6}{4-j},\ j = 1,\ 2,\ 3.$

Důkaz: Nejprve označme $\Delta' := \{\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4), e_4, e_3 - e_4\} = \Delta \setminus \{e_2 - e_3\}$.
Zřejmě $\Delta' \cap \Phi^+(\mathfrak{g}_+) = \emptyset$.
Uvažme následující situace:

(P1) Nechť $a_k \in Q$, $2 \le k \le 5$. Potom lze psát $a_k = a_{k-1} + \delta$, $\delta \in \Delta'$, a z podmínky (T2) Tvrzení 6.3.6plyne, že $a_{k-1} \in Q$.

(P2) Nechť $b_k \in Q$, $2 \le k \le 5$. Potom lze psát $b_k = b_{k-1} + \delta$, $\delta \in \Delta'$, a z podmínky (T2) Tvrzení 6.3.6plyne, že $b_{k-1} \in Q$.

(P3) Nechť $c_k \in Q$, $2 \le k \le 4$. Potom lze psát $c_k = c_{k-1} + \delta$, $\delta \in \Delta'$, a z podmínky (T2) Tvrzení 6.3.6plyne, že $c_{k-1} \in Q$.

Že jsou množiny A_i^j, B^j a C_i^j saturované pro $(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{p}_1)$, se snadno ověří z definice.
Dokážeme, že jiné saturované množiny neexistují. Rozeberme jednotlivé případy. Buď Q saturovaná množina příslušející k $\mathfrak{p}_1$.

1. Jestliže $a_1 \notin Q$, pak z (P1) plyne, že $a_k \notin Q$, $1 \le k \le 5$. Dále platí $c_1 = a_3 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \in \Delta'$, tudíž z (P3) plyne $c_i \notin Q$, $1 \le i \le 4$. Dále (P2) spolu s rovností $b_1 = c_2 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \in \Delta'$, dávají $b_k \notin Q$, $1 \le k \le 5$. Kořen d_1 není v Q, neboť platí rovnost $d_1 = a_5 + b_1$ a (T2). Tudíž $Q = \emptyset = A_1^1$.
2. Nechť $a_1 \in Q$.

   2.1. Jestliže $a_3 \notin Q$, pak z (P1) plyne $a_k \notin Q$, $3 \le k \le 5$; z (P3) a $c_1 = a_3 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \in \Delta'$, plyne $c_k \notin Q$, $1 \le k \le 4$; z (P2) a $b_1 = c_2 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \in \Delta'$, plyne $b_k \notin Q$, $1 \le k \le 5$; z rovnosti $d_1 = a_5 + b_1$ a (T2) plyne $d_1 \notin Q$. Tudíž $Q = A_2^1$ nebo $Q = A_3^1$.

2.2. Nechť $a_3 \in Q$.

2.2.1 Jestliže $c_1 \notin Q$, pak z (P3) plyne $c_k \notin Q$, $2 \le k \le 4$; rovnost $b_1 = c_2 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \in \Delta'$, a (P2) dávají $b_k \notin Q$, $1 \le k \le 5$; rovnost $d_1 = c_2 + c_3$ a (T2) dávají $d_1 \notin Q$. Tudíž (P1) určuje Q jako jednu z množin A_i^1, $4 \le i \le 6$.

2.2.2. Nechť $c_1 \in Q$.

2.2.2.1. Jestliže $c_2 \notin Q$, pak použitím (P3) plyne $c_k \notin Q$, $2 \le k \le 4$; rovnost $b_1 = c_2 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \in \Delta'$, a (P2) dávají $b_k \notin Q$, $1 \le k \le 5$; rovnost $d_1 = c_2 + c_3$ a (T2) dávají $d_1 \notin Q$. Pak (P1) určuje Q jako jednu z množin A_i^2, $1 \le i \le 3$.

2.2.2.2. Nechť $c_2 \in Q$. Pak z rovnosti $c_2 = a_4 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \in \Delta'$, a z (P1) plyne $a_k \in Q$, $1 \le k \le 4$.

2.2.2.2.1. Jestliže $b_1 \notin Q$, pak z (P2) plyne $b_k \notin Q$, $1 \le k \le 5$.

2.2.2.2.1.1. Jestliže $d_1 \notin Q$, pak (T1) a $d_1 = c_2 + c_3$ dávají $c_3 \notin Q$, spolu s (P3) pak $c_4 \notin Q$. Tudíž (P1) určuje Q jako jednu z množin A_i^3, $1 \le i \le 2$.

2.2.2.2.1.2. Jestliže $d_1 \in Q$, pak (P3) určuje Q jako jednu z množin C_1^j, $1 \le j \le 3$.

2.2.2.2.2. Nechť $b_1 \in Q$.

2.2.2.2.2.1. Jestliže $b_2 \notin Q$, pak z (P2) plyne $b_k \notin Q$, $2 \le k \le 5$.

2.2.2.2.2.1.1. Jestliže $a_5 \notin Q$, pak $c_3 = a_5 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \in \Delta'$, s (T2) dávají $c_3 \notin Q$, potom podle (P3) $c_4 \notin Q$ a Q je tvaru B^1 nebo B^2.

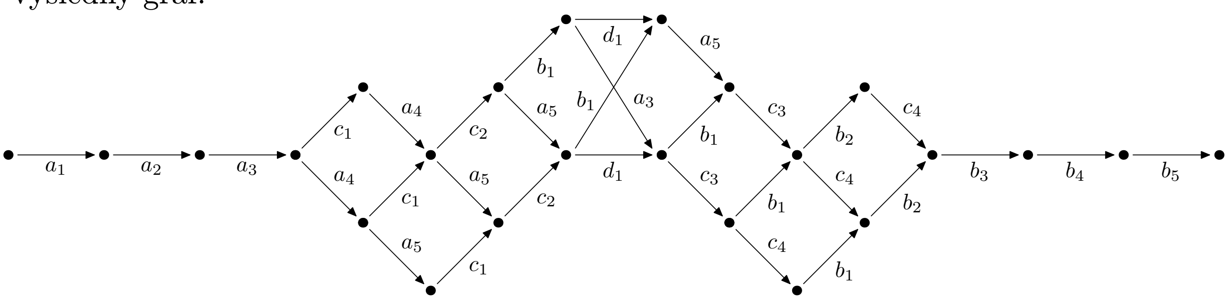
2.2.2.2.2.1.2. Jestliže $a_5 \in Q$, pak z $d_1 = a_5 + b_1$ a (T1) máme $d_1 \in Q$ a (P2) určuje Q jako jednu z množin C_2^j, $1 \le j \le 3$.

2.2.2.2.2.2. Jestliže $b_2 \in Q$, pak z $b_2 = c_3 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \in \Delta'$, a z (T2) plyne $c_3 \in Q$, odtud a z $d_1 = c_2 + c_3$ a z (T1) je $d_1 \in Q$. Dále $c_3 = a_5 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \in \Delta'$, tudíž $a_5 \in Q$.

2.2.2.2.2.2.1. Jestliže $b_3 \notin Q$, pak Q je tvaru C_3^j, $2 \le j \le 3$.

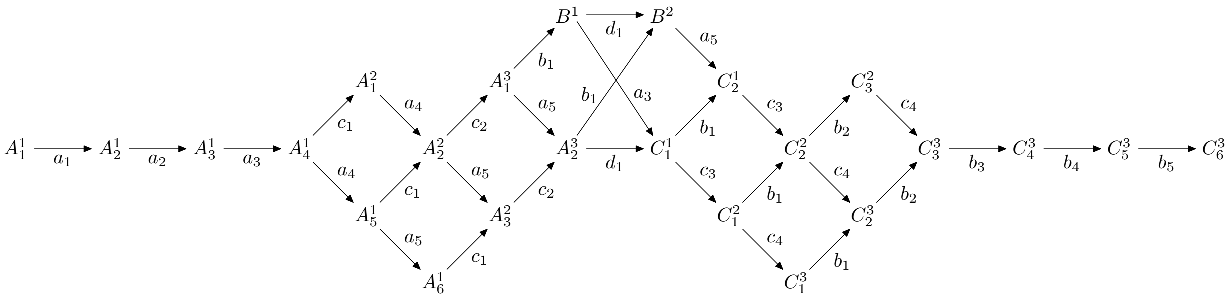
2.2.2.2.2.2.2. Jestliže $b_3 \in Q$, pak z $b_3 = c_4 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \in \Delta'$, a z (T2) máme $c_4 \in Q$. Tedy $a_k \in Q$, $1 \le k \le 5$, $c_k \in Q$, $1 \le k \le 4$, $d_1 \in Q$ a $b_k \in Q$, $1 \le k \le 3$. Pak (P3) určuje zbývající možné saturované množiny jako C_i^3, $3 \le i \le 5$. $\square$

Pomocí Věty 6.4.2 snadno najdeme všechny hrany Hassova diagramu a dostáváme tak výsledný graf:



Obrázek 7

Pokud doplníme do grafu saturované množiny tak, jak jsou označeny v Tvrzení 8.3.1, obdržíme výsledný obrázek:



Obrázek 8

8.4. Hassův diagram pro pár $(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{p}_4)$

Uvažme parabolickou podalgebru $\mathfrak{p}_4$ algebry $\mathfrak{f}_4$, která odpovídá množině $\Sigma = \{\alpha_4\}$. Pro tento oddíl označme kořeny $\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}_+) = \Phi_1^+ \cup \Phi_2^+$ následovně:

$$a_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) \qquad a_2 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4) \qquad a_3 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4) \qquad a_5 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) \qquad a_6 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$$

$$a_7 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4) \qquad a_8 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$$

$$b_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2 \qquad b_2 = \epsilon_1 - \epsilon_3 \qquad b_3 = \epsilon_1 - \epsilon_4 \qquad b_4 = \epsilon_1$$

$$b_5 = \epsilon_1 + \epsilon_4 \qquad b_6 = \epsilon_1 + \epsilon_3 \qquad b_7 = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

Lemma 8.4.1: Pro každou saturovanou množinu Q pro $(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{p}_4)$ platí:
- (L1) Pokud $a_i \in Q$, $i \neq 5$, pak $a_j \in Q$, $1 \leq j \leq i$. Pokud $a_5 \in Q$ pak $a_j \in Q$, $1 \leq i \leq 3$.
- (L2) Pokud $b_i \in Q$, pak $b_j \in Q$, $1 \leq j \leq i$.

Důkaz: Označme množinu kořenů $\Delta' := \{\epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_3 - \epsilon_4\}$. Zjevně $\Delta' \cap \Phi^+(\mathfrak{g}_+) = \emptyset$.
Nechť $a_i \in Q$, $i \neq 5$. Pak lze psát $a_i = a_{i-1} + \delta$, $\delta \in \Delta'$. Podmínka (T2) Tvrzení 6.3.6 pak dává $a_{i-1} \in Q$.
Nechť $a_6 \in Q$. Kořen a_6 lze rozepsat jako $a_6 = a_4 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)$, $\epsilon_2 - \epsilon_3 \in \Delta'$. Tudíž z podmínky (T2) Tvrzení 6.3.6 plyne, že $a_4 \in Q$.
Podobně kořen a_5 lze rozepsat jako $a_5 = a_3 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)$, $\epsilon_2 - \epsilon_3 \in \Delta'$ a z podmínky (T2) Tvrzení 6.3.6 plyne, že pokud $a_5 \in Q$, pak i $a_3 \in Q$.
Z výše uvedeného indukcí plyne tvrzení (L1).
Pokud $b_i \in Q$, pak lze psát $b_i = b_{i-1} + \delta$, $\delta \in \Delta'$ z podmínky (T2) Tvrzení 6.3.6 indukcí plyne tvrzení (L2). $\square$

Věta 8.4.2: Saturované množiny příslušející parabolické algebře $\mathfrak{p}_4$ mají tvar

$$Q_i^k = \left\{a_j \mid 0 < j < i + \frac{1}{2}(k-1)(k^2 - 7k + 14)\right\} \cup \{b_j \mid 0 < j < k\}, \qquad 0 < i < \left\lfloor \frac{19-k}{4} \right\rfloor,\ 0 < k < 5;$$

$$Q_i^5 = \{a_j \mid 0 < j < 4\} \cup \{a_j \mid j = i+3\} \cup \{b_j \mid 0 < j < i+3\}, \qquad 0 < i < 3;$$

$$Q_i^k = \left\{a_j \mid 0 < j < i + 4 + \frac{1}{3}(k-6)(k-7)(k-8)\right\} \cup \{b_j \mid 0 < j < k-1\}, \qquad 0 < i < \left\lfloor \frac{k+9}{4} \right\rfloor,\ 5 < k < 10,$$

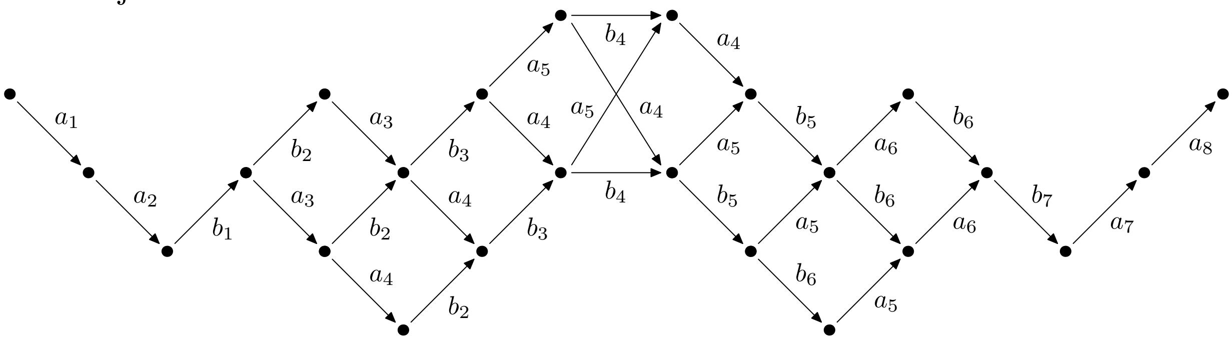
kde $\lfloor \cdot \rfloor$ značí dolní celou část.

Důkaz: Snadno se ověří z definice, že množiny Q_i^k jsou saturované vzhledem k $(\mathfrak{f}_4,\, \mathfrak{p}_4)$. Dokažme, že neexistují žádné další saturované množiny:
Uvažme nyní saturovanou množinu $Q \subset \Phi^+(\mathfrak{g}_+)$. V důkazu budeme používat podmínky (T1) a (T2) Tvrzení 6.3.6 a body (L1) a (L2) předchozího Lemmatu 8.4.1.

1. Nechť $b_1 \notin Q$. Pak podle (L2) $b_l \notin Q$, $1 \le l \le 7$. Podle $b_1 = a_2 + a_3$ a (T1) alespoň jeden z kořenů a_2, a_3 není v Q a z (L1) plyne, že $a_3 \notin Q$. Proto (díky (L1)) $a_l \notin Q$, $3 \le l \le 8$. Tvrzení (L1) pak říká, že Q je jednou z množin Q_i^1, $1 \le i \le 3$.
2. Nechť $b_1 \in Q$. Pak z $b_1 = a_2 + a_3$ a (T2) a (L1) je a_1, $a_2 \in Q$.
   - 2.1. Nechť $b_2 \notin Q$. Pak podle (L2) $b_l \notin Q$, $2 \le l \le 7$. Dále $b_2 = a_2 + a_5$, proto podle (T1) $a_5 \notin Q$ a podle (L1) $a_l \notin Q$, $5 \le l \le 8$. Tvrzení (L1) pak dává, že Q je jedna z množin Q_i^2, $1 \le i \le 3$.
   - 2.2. Nechť $b_2 \in Q$.
     - 2.2.1. Nechť $b_3 \notin Q$. Pak podle (L2) $b_l \notin Q$, $3 \le l \le 7$. Dále $b_3 = a_3 + a_5$, proto podle (L1) a (T1) je $a_5 \notin Q$. Tvrzení (L1) pak určuje Q jako jednu z množin Q_i^3, $1 \le i \le 3$.
     - 2.2.2. Nechť $b_3 \in Q$. Pak z $b_3 = a_3 + a_5$ a (L1) a (T2) plyne $a_3 \in Q$.
       - 2.2.2.1. Nechť $a_5 \notin Q$. Pak $a_l \notin Q$, $5 \le l \le 8$. Z rovnosti $b_7 = a_5 + a_8$ a (L1) plyne $b_7 \notin Q$.
         - 2.2.2.1.1. Nechť $b_4 \notin Q$. Pak z (L2) $b_l \notin Q$, $4 \le l \le 7$. Dostáváme tak, že Q je Q_1^4, nebo Q_2^4.
         - 2.2.2.1.2. Nechť $b_4 \in Q$. Pak (L2) určuje Q jako jednu z množin Q_1^k, $6 \le k \le 8$.
       - 2.2.2.2. Nechť $a_5 \in Q$.
         - 2.2.2.2.1. Nechť $a_6 \notin Q$. Pak z $b_7 = a_6 + a_7$ plyne, že $b_7 \notin Q$ a z (L1) máme $a_l \notin Q$, $6 \le l \le 8$.
           - 2.2.2.2.1.1. Nechť $a_4 \notin Q$. Pak Q je jedna z množin Q_1^5, Q_2^5.
           - 2.2.2.2.1.2. Nechť $a_4 \in Q$. Pak (L2) určuje Q jako jednu z množin Q_2^k, $6 \le k \le 8$.
         - 2.2.2.2.2. Nechť $a_6 \in Q$.
           - 2.2.2.2.2.1. Nechť $b_7 \notin Q$. Pak Q je Q_3^7, nebo Q_3^8.
           - 2.2.2.2.2.2. Nechť $b_7 \in Q$. Pak (L1) určuje Q jako jednu z množin Q_i^9, $1 \le i \le 3$.

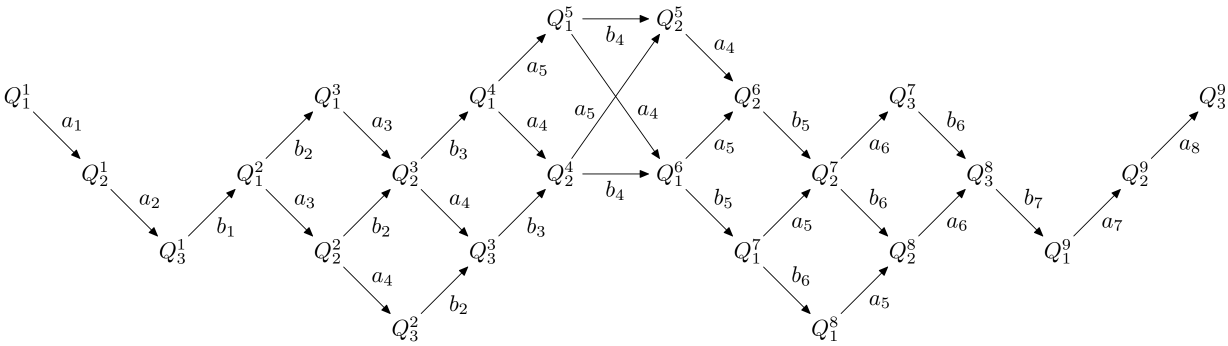
Protože $Q_3^9 = \Phi^+(\mathfrak{g}_+)$, jsou všechny možné saturované množiny $Q \subseteq \Phi^+(\mathfrak{g}_+)$ vyčerpány, tudíž jiné saturované množiny než výše popsané neexistují. $\square$

Z předchozi Věty 8.4.2 známe vrcholy Hasseho diagramu pro $(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{p}_4)$. Pomocí Tvrzení 6.4.2 pak snadno najdeme všechny hrany. Konečně Hasseho diagram pro $(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{p}_1)$ má následující tvar:



Obrázek 9

Pokud doplníme do diagramu označení saturovaných množin z předchozí Věty 8.4.2, dostaneme výsledný obrázek:



Obrázek 10

8.5. Ireducibilní reprezentace grupy F_4

Definice 8.5.1: Definujme vektorový podprostor $\mathcal{J}_0$ algebry $\mathcal{J}$ jako vektorový prostor bezestopých prvků algebry $\mathcal{J}$.

Poznámka 8.5.2: Akci ϱ grupy F_4 na vektorovém prostoru $\mathcal{J}_0$ lze chápat jako 26-dimenzionální reprezentaci ϱ grupy F_4.

Věta 8.5.3: Existují právě dvě neekvivalentní ireducibilní reprezantace ϱ grupy F_4 takové, že

$$0 < \dim_{\mathbb{C}} \varrho \leq 26,$$

a to triviální reprezentace dimenze 1 a 26-dimenzionální reprezentace s nejvyšší vahou ϵ_1.

Důkaz: Hledejme všechny ireducibilní reprezentace ϱ algebry F_4 s dimenzí nepřevyšující 26. Platí $\delta = \frac{1}{2}(11\epsilon_1+5\epsilon_2+3\epsilon_3+\epsilon_4)$, viz Knapp [14]. Označme $\lambda = \frac{1}{2}(a\epsilon_1+b\epsilon_2+c\epsilon_3+d\epsilon_4)$ nejvyšší váhu reprezentace ϱ. Podle Weylovy dimenzionální formule 4.2.12 λ musí splňovat

$$26 \geq \frac{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\lambda+\delta,\, \alpha\rangle}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\delta,\, \alpha\rangle}.$$

Dosazením λ, δ a α a vynásobením jmenovatelem dostaneme nerovnici

$$\begin{aligned}
2^{36}\cdot 3^7 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \geq{} & (a+11)(b+5)(c+3)(d+1)\cdot \\
& \cdot (a+b+16)(a+c+14)(a+d+12)(b+c+8)(b+d+6)(c+d+4)\cdot \\
& \cdot (a-b+6)(a-c+8)(a-d+10)(b-c+2)(b-d+4)(c-d+2)\cdot \\
& \cdot (a+b+c+d+20)(a+b+c-d+18)(a+b-c+d+14)(a-b+c+d+10)\cdot \\
& \cdot (a-b-c+d+4)(a-b+c-d+8)(a+b-c-d+12)(a-b-c-d+2).
\end{aligned}$$

Označme polynom na pravé straně rovnice jako P. Pokud vyjádříme nejvyšší váhu λ jako lineární kombinaci celočíselných nezáporných násobků fundamentálních vah, dostaneme

$$\begin{aligned}
\lambda ={} & \sum_1^4 \lambda^i \varpi_i = \\
={} & \lambda^1 \cdot \epsilon_1 + \lambda^2 \cdot (\frac{3}{2}\epsilon_1 + \frac{1}{2}\epsilon_2 + \frac{1}{2}\epsilon_3 + \frac{1}{2}\epsilon_4) + \lambda^3 \cdot (2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + \lambda^4 \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2) = \\
={} & \left(\lambda^1 + \frac{3}{2}\lambda^2 + 2\lambda^3 + \lambda^4\right)\epsilon_1 + \left(\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4\right)\epsilon_2 + \left(\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda^3\right)\epsilon_3 + \left(\frac{1}{2}\lambda^2\right)\epsilon_4,
\end{aligned}$$

odkud plyne

$$\begin{aligned}
a &= \lambda^1 + \frac{3}{2}\lambda^2 + 2\lambda^3 + \lambda^4, \\
b &= \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4, \\
c &= \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda^3, \\
d &= \frac{1}{2}\lambda^2,
\end{aligned}$$

tedy $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ a všechny činitele polynomu P jsou kladné.
Uvážením $b \geq c \geq d \geq 0$, $a \geq b+c+d$ a $b \geq c+d$ pro odhad P obdržíme

$$\begin{aligned}
P \geq{} & (a+11)\cdot 5\cdot 3\cdot 1\cdot \\
& \cdot (a+16)(a+14)(a+12)\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot \\
& \cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot \\
& \cdot (a+20)(a+18)(a+14)\cdot 10\cdot \\
& \cdot 4\cdot 8\cdot (a+12)\cdot 2 \geq \\
\geq{} & 2^{10}\cdot 3^2\cdot 5\cdot (a+11)^8,
\end{aligned}$$

odkud $a \leq 10$. Podobně odhady

$$\begin{aligned} P \geq &(b+11)(b+5)\cdot 3\cdot 1\cdot \\ &\cdot (2b+16)(b+14)(b+12)(b+8)(b+6)\cdot 4\cdot \\ &\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot \\ &\cdot (2b+20)(2b+18)(b+14)\cdot 10\cdot \\ &\cdot 4\cdot 8\cdot (b+12)\cdot 2\geq \\ \geq &2^{21}\cdot 3^2\cdot 5^2(b+5)^{11}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \geq &(c+11)(c+5)(c+3)\cdot 1\cdot \\ &\cdot (2c+16)(2c+14)(c+12)(2c+8)(c+6)(c+4)\cdot \\ &\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot \\ &\cdot (3c+20)(2c+18)(c+14)(c+10)\cdot \\ &\cdot 4\cdot 8\cdot 12\cdot 2\geq \\ \geq &2^{21}\cdot 3^3\cdot 5\cdot (c+3)^{13}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \geq &(d+11)(d+5)(d+3)(d+1)\cdot \\ &\cdot (2d+16)(2d+14)(2d+12)(2d+8)(2d+6)(2d+4)\cdot \\ &\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot \\ &\cdot (4d+20)(2d+18)(2d+14)(2d+10)\cdot \\ &\cdot 4\cdot 8\cdot 12\cdot 2\geq \\ \geq &2^{28}\cdot 3^2\cdot 5\cdot (d+1)^{14} \end{aligned}$$

implikují, že $b \leq 7$, $c \leq 5$ a $d \leq 4$.
Z podmínek $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ a $10 \geq a$, $7 \geq b$, $5 \geq c$, $4 \geq d$ dostáváme 580 možných čtveřic $[a,\, b,\, c,\, d]$ (viz Příloha 1), z nichž jedinými nezápornými celočíselnými řešeními nerovnice

$$2^{36}\cdot 3^7\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13 \geq P$$

jsou [2, 0, 0, 0], váha ϵ_1 26-dimenzionální reprezentace, a [0, 0, 0, 0], váha 1-dimenzionální (triviální) reprezentace. □

Věta 8.5.4: Reprezentace $\varrho : F_4 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{J}_0)$ je izomorfní ireducibilní reprezentaci s nejvyšší vahou $\lambda = \epsilon_1$.

Důkaz: Na základě věty 4.2.5, že $\mathcal{J}_0$ je buď přímo zmíněná ireducibilní reprezentace, nebo sumou 26 reprezentací triviálních. Druhou možnost však lze vyloučit uvážením např. akce $SO(3,\mathbb{C})$ z důkazu věty 7.5.1. □

Poznámka 8.5.5: Podle programu LIE [23] má 26-dimenzionální reprezentace F_4 váhy $\pm\epsilon_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ a $\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)$ multiplicity 1 a váhu 0 multiplicity 2.
Následující věta charakterizuje Moufangové projektivní rovinu jako specifický homogenní prostor.

Věta 8.5.6: Nechť P je stabilizator akce ϱ grupy F_4 na projektivní Moufangové rovině, pak Lieova algebra $\mathfrak{p}$ grupy P je izomorfní $\mathfrak{p}_4$, tj.

$$\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{p}_4.$$

Důkaz:
Z definice stabilizátoru P plyne, že $\varrho(p)v = v$ pro každé $p \in P$ a vybrané $v \in \mathbb{OP}_0^2$. Poznamenejme, že Moufangové rovina je komplexní projektivní algebraická varieta, jak plyne z její definice. Z tohoto důvodu je dle věty 5.2.8 stabilizátor akce F_4 na Moufangové rovině parabolická podgrupa F_4. Z klasifikace parabolických podalgeber jednoduchých komplexních Lieových grup (viz Kapitola 5 nebo Yamaguchiho článek [21]) plyne, že $\mathfrak{p}$ koresponduje právě s jednou množinou Σ, která je podmnožinou množiny jednoduchých kořenů, $\Sigma \subsetneq \Delta$. Navíc platí, že $\dim \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{f}_4 - \dim \mathbb{OP}_0^2 = 52 - 15 = 37$. Z Tabulky 4 plyne, že možnými kandidáty jsou $\mathfrak{p}_1$ nebo $\mathfrak{p}_4$. Snadno se dokáže, že jiná možnost nastat nemůže, neboť kromě $\mathfrak{p}_1$ a $\mathfrak{p}_4$ žádná algebra ze zmíněné tabulky nesplňuje podmínku na dimenzi a navíc každá parabolická podalgebra $\mathfrak{p}$ algebry $\mathfrak{f}_4$, která není zahrnuta v uvažované tabulce, je určena množinou Σ, jejíž počet prvků je větší než jedna, a proto její dimenze je menší než maximum dimenzí parabolických podalgeber uvedených v tabulce, které činí 37, a tedy nesplňuje podmínku $\dim \mathfrak{p} = 37$. Jelikož P je parabolická podgrupa grupy F_4, existuje jednoznačně určená množina Ψ kořenů přidružená k algebře $\mathfrak{p}$, že $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ viz Poznámku 5.1.3 o ekvivalenci parabolických algeber a podmnožin systému jednoduchých kořenů. Nechť $\alpha \in \Psi$ a $X_{-\alpha}$ je příslušný kořenový vektor ke kořenu $-\alpha$, mimo jiné $e^{tX_\alpha} \in P$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Označme $\dot{\varrho}$ reprezentaci algebry $\mathfrak{p}$, viz Poznámku 4.2.7. Z definice $\dot{\varrho}$ dostáváme $\dot{\varrho}(X_{-\alpha})v = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varrho(e^{tX_{-\alpha}})v = \frac{d}{dt}|_{t=0}v = 0$, protože v je pevným bodem akce P na $\mathbb{OP}_0^2$.
Jelikož víme, že $\mathcal{J}_0$ je izomorfní ireducibilní reprezentaci F_4 s nejvyšší vahou $\lambda = \epsilon_1$, budeme za pevný bod akce volit nějaký vektor nejvyšší váhy v_λ, tj. $v := v_\lambda$. Pro spor předpokládejme, že $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Snadno se potom ověří, že v tomto případě $\mu := -(-\epsilon_1 + \epsilon_2) \in \Psi$, kde množina Ψ je množina kladných kořenů korespondujících s $\mathfrak{p}_1$. Užití relace $\dot{\varrho}(H_\alpha)\dot{\varrho}(X_\alpha)v_\lambda = (\lambda + \alpha)\dot{\varrho}(H_\alpha)\dot{\varrho}(X_\alpha)v_\lambda$ v případě $\dot{\varrho}(X_{-\epsilon_1+\epsilon_2})v_\lambda$ implikuje, že výsledný vektor je vektor váhy ϵ_2, která je vahou uvažované reprezentace (viz seznam vah v Poznámce 8.5.5 výše), a proto $e^{X_{-\mu}}$ nestabilizuje v_λ, tudíž $\mu \notin \Psi$, což je spor.
Odtud již plyne, že $\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{p}_4$, jak bylo dokázat. □

Poznámka 8.5.7: Z předchozí věty plyne, že $\mathbb{OP}_0^2 \simeq F_4/P_4$, kde P_4 je nějaká parabolická podgrupa grupy F_4, jejíž Lieova algebra je izomorfní $\mathfrak{p}_4$.

Poznámka 8.5.8: Lze snadno ukázat, že v případě $\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{p}_4$ pro každé $\alpha \in \Sigma$, kde nyní Σ je množina korespondující výběru $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_4$, je $\dot{\varrho}(X_{-\alpha})v_\lambda$ vektor váhy, která není váha uvažované reprezentace, jak se lze snadno přesvědčit, užívaje seznam vah uvažované reprezentace, viz Poznámka 8.5.5.

9. Přílohy

9.1. Příloha 1: Řešení nerovnice z důkazu Věty 8.5.3

V následující tabulce jsou vypsány všechny čtveřice $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, která splňují nerovnosti

$$a \geq b \geq c \geq d \geq 0, \quad 10 \geq a, \quad 7 \geq b, \quad 5 \geq c, \quad 4 \geq d$$

použité v důkazu Věty 8.5.3.
V posledním sloupci je uvedeno číslo

$$\frac{P(a, b, c, d)}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \delta, \alpha \rangle} = \frac{P(a, b, c, d)}{2^{35} \cdot 3^7 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11},$$

což je hodnota, která odpovídá dimenzi příslušné reprezentace $\mathbb{W}$ (pokud existuje) Lieovy algebry $\mathfrak{f}_4$. Nezáporné celé hodnoty, které mohou odpovídat existujícím reprezentacím Lieovy algebry $\mathfrak{f}_4$, jsou uvedeny tučně, ostatní (nevyhovující) hodnoty jsou vyznačeny kurzívou (jsou zaokrouhlovány na dvě desetinná místa).

$a\ b\ c\ d$	$\dim \mathbb{W}$	$a\ b\ c\ d$	$\dim \mathbb{W}$	$a\ b\ c\ d$	$\dim \mathbb{W}$
0 0 0 0	**1**	3 3 0 0	*254,61*	4 3 2 2	*-2 796,91*
1 0 0 0	*5,80*	3 3 1 0	*240,84*	4 3 3 0	**0**
1 1 0 0	*8,48*	3 3 1 1	**0**	4 3 3 1	*-2 428,34*
1 1 1 0	*6,61*	3 3 2 0	**0**	4 3 3 2	*-6 953,50*
1 1 1 1	**0**	3 3 2 1	*-683,36*	4 3 3 3	*-10 052,81*
2 0 0 0	**26**	3 3 2 2	*-1 736,60*	4 4 0 0	**1 053**
2 1 0 0	*45,69*	3 3 3 0	*-192,72*	4 4 1 0	*1 040,80*
2 1 1 0	*50,23*	3 3 3 1	*-1 274,00*	4 4 1 1	**0**
2 1 1 1	*43,14*	3 3 3 2	*-3 041,71*	4 4 2 0	**0**
2 2 0 0	**52**	3 3 3 3	*-4 096,00*	4 4 2 1	*-3 223,67*
2 2 1 0	*45,89*	4 0 0 0	**324**	4 4 2 2	*-8 424,00*
2 2 1 1	**0**	4 1 0 0	*685,42*	4 4 3 0	*-1 020,61*
2 2 2 0	**0**	4 1 1 0	*957,37*	4 4 3 1	*-6 852,73*
2 2 2 1	*-111,98*	4 1 1 1	*1 169,41*	4 4 3 2	*-16 834,11*
2 2 2 2	*-273,00*	4 2 0 0	**1 053**	4 4 3 3	*-23 748,54*
3 0 0 0	*97,96*	4 2 1 0	*1 519,04*	4 4 4 0	**0**
3 1 0 0	*192,30*	4 2 1 1	*1 736,60*	4 4 4 1	*-6 260,04*
3 1 1 0	*246,16*	4 2 2 0	**1 274**	4 4 4 2	*-19 278,00*
3 1 1 1	**273**	4 2 2 1	*1 247,49*	4 4 4 3	*-32 144,02*
3 2 0 0	*263,73*	4 2 2 2	**0**	4 4 4 4	*-34 749,00*
3 2 1 1	*290,30*	4 3 0 0	*1 228,17*	5 0 0 0	*966,85*
3 2 1 0	*327,52*	4 3 1 0	*1 631,07*	5 1 0 0	*2 158,96*
3 2 2 1	**0**	4 3 1 1	*1 475,72*	5 1 1 0	*3 191,07*
3 2 2 2	*-466,25*	4 3 2 0	*1 093,77*	5 1 1 1	**4 096**
3 2 2 0	*193,71*	4 3 2 1	**0**	5 2 0 0	*3 583,04*

$a\ b\ c\ d$	$\dim \mathbb{W}$	$a\ b\ c\ d$	$\dim \mathbb{W}$	$a\ b\ c\ d$	$\dim \mathbb{W}$
5 2 1 0	*5 629,03*	5 5 5 0	*18 924,62*	6 5 2 2	*-50 012,96*
5 2 1 1	*7 081,74*	5 5 5 1	**0**	6 5 3 0	**0**
5 2 2 0	*5 516,92*	5 5 5 2	*-68 309,13*	6 5 3 1	*-50 676,60*
5 2 2 1	*6 953,50*	5 5 5 3	*-160 056,00*	6 5 3 2	*-151 983,69*
5 2 2 2	*3 847,37*	5 5 5 4	*-223 680,40*	6 5 3 3	*-236 754,54*
5 3 0 0	*4 691,07*	6 0 0 0	**2 652**	6 5 4 0	*-13 374,61*
5 3 1 0	*7 224,21*	6 1 0 0	*6 168,77*	6 5 4 1	*-93 818,88*
5 3 1 1	**8 424**	6 1 1 0	*9 485,95*	6 5 4 2	*-250 973,42*
5 3 2 0	*6 852,73*	6 1 1 1	*12 543,62*	6 5 4 3	*-415 018,25*
5 3 2 1	*6 846,03*	6 2 0 0	**10 829**	6 5 4 4	*-468 488,78*
5 3 2 2	**0**	6 2 1 0	*17 975,86*	6 5 5 0	**0**
5 3 3 0	*3 427,22*	6 2 1 1	*23 748,54*	6 5 5 1	*-78 039,25*
5 3 3 1	**0**	6 2 2 0	**19 278**	6 5 5 2	*-255 753,54*
5 3 3 2	*-10 361,44*	6 2 2 1	*26 698,56*	6 5 5 3	*-473 526,64*
5 3 3 3	*-19 448,00*	6 2 2 2	**19 448**	6 5 5 4	*-614 582,06*
5 4 0 0	*4 867,87*	6 3 0 0	*15 343,77*	6 6 0 0	**12 376**
5 4 1 0	*6 744,38*	6 3 1 0	*25 697,72*	6 6 1 0	*12 887,25*
5 4 1 1	*6 189,89*	6 3 1 1	*32 956,07*	6 6 1 1	**0**
5 4 2 0	*4 851,04*	6 3 2 0	*28 431,21*	6 6 2 0	**0**
5 4 2 1	**0**	6 3 2 1	*36 536,22*	6 6 2 1	*-44 035,69*
5 4 2 2	*-12 925,04*	6 3 2 2	*20 977,25*	6 6 2 2	*-119 119,00*
5 4 3 0	**0**	6 3 3 0	*20 206,76*	6 6 3 0	*-15 451,87*
5 4 3 1	*-12 418,70*	6 3 3 1	*21 227,67*	6 6 3 1	*-105 819,72*
5 4 3 2	*-36 536,22*	6 3 3 2	**0**	6 6 3 2	*-269 257,96*
5 4 3 3	*-55 216,36*	6 3 3 3	*-25 690,52*	6 6 3 3	*-401 233,11*
5 4 4 0	*-2 912,30*	6 4 0 0	**17 901**	6 6 4 0	**0**
5 4 4 1	*-20 206,76*	6 4 1 0	*28 723,09*	6 6 4 1	*-118 987,35*
5 4 4 2	*-53 005,74*	6 4 1 1	*33 956,95*	6 6 4 2	*-379 848,00*
5 4 4 3	*-84 987,25*	6 4 2 0	**29 172**	6 6 4 3	*-669 806,03*
5 4 4 4	*-91 496,72*	6 4 2 1	*29 551,63*	6 6 4 4	*-787 644,00*
5 5 0 0	*3 811,49*	6 4 2 2	**0**	6 6 5 0	*83 799,93*
5 5 1 0	*3 882,91*	6 4 3 0	*16 535,85*	6 6 5 1	**0**
5 5 1 1	**0**	6 4 3 1	**0**	6 6 5 2	*-309 997,18*
5 5 2 0	**0**	6 4 3 2	*-52 035,72*	6 6 5 3	*-744 010,31*
5 5 2 1	*-12 739,19*	6 4 3 3	*-101 925,57*	6 6 5 4	*-1 077 042,47*
5 5 2 2	*-33 956,95*	6 4 4 0	**0**	7 0 0 0	*6 777,26*
5 5 3 0	*-4 295,95*	6 4 4 1	*-34 279,64*	7 1 0 0	*16 275,23*
5 5 3 1	*-29 172,00*	6 4 4 2	*-107 406,00*	7 1 1 0	*25 767,17*
5 5 3 2	*-73 126,29*	6 4 4 3	*-183 718,51*	7 1 1 1	**34 749**
5 5 3 3	*-106 496,00*	6 4 4 4	*-205 751,00*	7 2 0 0	*29 815,73*
5 5 4 0	**0**	6 5 0 0	*16 987,74*	7 2 1 0	*51 430,02*
5 5 4 1	*-30 418,18*	6 5 1 0	*24 229,28*	7 2 1 1	*69 959,37*
5 5 4 2	*-95 633,87*	6 5 1 1	*22 469,82*	7 2 2 0	*58 503,80*
5 5 4 3	*-164 733,41*	6 5 2 0	*18 226,26*	7 2 2 1	*84 987,25*
5 5 4 4	*-187 165,09*	6 5 2 1	**0**	7 2 2 2	*69 010,51*

a b c d	dim 𝕎	*a b c d*	dim 𝕎	*a b c d*	dim 𝕎
7 3 0 0	*44 756,87*	7 6 0 0	*53 434,69*	8 2 1 0	*134 975,33*
7 3 1 0	*79 115,97*	7 6 1 0	*77 831,17*	8 2 1 1	*187 165,09*
7 3 1 1	**106 496**	7 6 1 1	*72 747,51*	8 2 2 0	**160 056**
7 3 2 0	*95 633,87*	7 6 2 0	*60 396,03*	8 2 2 1	*239 188,40*
7 3 2 1	*134 967,65*	7 6 2 1	**0**	8 2 2 2	**205 751**
7 3 2 2	*101 925,57*	7 6 2 2	*-169 405,03*	8 3 0 0	*119 342,45*
7 3 3 0	*79 572,18*	7 6 3 0	**0**	8 3 1 0	*219 018,94*
7 3 3 1	**107 406**	7 6 3 1	*-177 317,85*	8 3 1 1	*303 430,82*
7 3 3 2	*68 907,46*	7 6 3 2	*-539 407,48*	8 3 2 0	*280 473,47*
7 3 3 3	**0**	7 6 3 3	*-858 841,13*	8 3 2 1	*415 018,25*
7 4 0 0	*56 589,04*	7 6 4 0	*-49 938,28*	8 3 2 2	*349 118,99*
7 4 1 0	*98 647,80*	7 6 4 1	*-353 183,47*	8 3 3 0	*255 753,54*
7 4 1 1	*128 204,82*	7 6 4 2	*-958 568,47*	8 3 3 1	*378 791,34*
7 4 2 0	*116 690,49*	7 6 4 3	*-1 620 762,21*	8 3 3 2	*319 154,63*
7 4 2 1	*151 983,69*	7 6 4 4	*-1 890 492,97*	8 3 3 3	*144 533,79*
7 4 2 2	*89 447,19*	7 6 5 0	**0**	8 4 0 0	**160 056**
7 4 3 0	*93 818,88*	7 6 5 1	*-334 485,05*	8 4 1 0	*294 244,97*
7 4 3 1	*99 908,92*	7 6 5 2	*-1 112 527,92*	8 4 1 1	*401 233,11*
7 4 3 2	**0**	7 6 5 3	*-2 107 160,04*	8 4 2 0	**379 848**
7 4 3 3	*-129 210,31*	7 6 5 4	*-2 827 762,13*	8 4 2 1	*543 116,35*
7 4 4 0	*41 887,52*	7 7 0 0	*36 702,29*	8 4 2 2	**420 147**
7 4 4 1	**0**	7 7 1 0	*38 855,41*	8 4 3 0	*356 989,09*
7 4 4 2	*-144 399,61*	7 7 1 1	**0**	8 4 3 1	*488 256,77*
7 4 4 3	*-319 154,63*	7 7 2 0	**0**	8 4 3 2	*320 956,41*
7 4 4 4	*-396 004,57*	7 7 2 1	*-136 832,32*	8 4 3 3	**0**
7 5 0 0	*60 450,84*	7 7 2 2	*-374 330,19*	8 4 4 0	**226 746**
7 5 1 0	*99 756,88*	7 7 3 0	*-49 340,85*	8 4 4 1	*248 658,18*
7 5 1 1	**119 119**	7 7 3 1	*-340 119,00*	8 4 4 2	**0**
7 5 2 0	*105 819,72*	7 7 3 2	*-875 373,83*	8 4 4 3	*-384 212,63*
7 5 2 1	*108 285,19*	7 7 3 3	*-1 327 104,00*	8 4 4 4	*-629 356,00*
7 5 2 2	**0**	7 7 4 0	**0**	8 5 0 0	*185 499,68*
7 5 3 0	*64 338,00*	7 7 4 1	*-401 726,85*	8 5 1 0	*332 313,53*
7 5 3 1	**0**	7 7 4 2	*-1 297 451,02*	8 5 1 1	*436 074,14*
7 5 3 2	*-208 344,68*	7 7 4 3	*-2 328 335,99*	8 5 2 0	*410 130,32*
7 5 3 3	*-420 147,00*	7 7 4 4	*-2 807 476,41*	8 5 2 1	*539 407,48*
7 5 4 0	**0**	7 7 5 0	*303 221,93*	8 5 2 2	*323 078,95*
7 5 4 1	*-152 942,57*	7 7 5 1	**0**	8 5 3 0	*353 183,47*
7 5 4 2	*-488 256,77*	7 7 5 2	*-1 142 871,89*	8 5 3 1	*379 837,60*
7 5 4 3	*-860 222,36*	7 7 5 3	*-2 792 556,00*	8 5 3 2	**0**
7 5 4 4	*-1 008 285,52*	7 7 5 4	*-4 147 395,11*	8 5 3 3	*-514 301,32*
7 5 5 0	*-31 657,75*	8 0 0 0	**16 302**	8 5 4 0	*178 610,41*
7 5 5 1	*-226 746,00*	8 1 0 0	*40 159,96*	8 5 4 1	**0**
7 5 5 2	*-631 029,41*	8 1 1 0	*65 013,89*	8 5 4 2	*-633 218,98*
7 5 5 3	*-1 118 208,00*	8 1 1 1	*88 900,01*	8 5 4 3	*-1 440 025,32*
7 5 5 4	*-1 435 538,40*	8 2 0 0	**76 076**	8 5 4 4	*-1 867 328,83*

$a\ b\ c\ d$	dim $\mathbb{W}$	$a\ b\ c\ d$	dim $\mathbb{W}$	$a\ b\ c\ d$	dim $\mathbb{W}$
8 5 5 0	**0**	9 0 0 0	*37 205,18*	9 5 4 0	*937 154,06*
8 5 5 1	*-351 460,51*	9 1 0 0	*93 582,55*	9 5 4 1	*1 037 707,41*
8 5 5 2	*-1 165 505,44*	9 1 1 0	*154 174,72*	9 5 4 2	**0**
8 5 5 3	*-2 195 411,19*	9 1 1 1	**212 992**	9 5 4 3	*-1 677 333,65*
8 5 5 4	*-2 916 879,93*	9 2 0 0	*182 109,57*	9 5 4 4	*-2 868 049,62*
8 6 0 0	**184 756**	9 2 1 0	*330 115,50*	9 5 5 0	*385 479,67*
8 6 1 0	*311 133,35*	9 2 1 1	*463 979,36*	9 5 5 1	**0**
8 6 1 1	*374 330,19*	9 2 2 0	*403 711,82*	9 5 5 2	*-1 445 585,44*
8 6 2 0	**340 119**	9 2 2 1	*614 582,06*	9 5 5 3	*-3 508 596,00*
8 6 2 1	*350 699,55*	9 2 2 2	*547 761,03*	9 5 5 4	*-5 144 323,94*
8 6 2 2	**0**	9 3 0 0	*295 767,06*	9 6 0 0	*552 290,36*
8 6 3 0	*216 316,14*	9 3 1 0	*557 895,95*	9 6 1 0	*1 009 063,99*
8 6 3 1	**0**	9 3 1 1	**787 644**	9 6 1 1	*1 333 795,30*
8 6 3 2	*-715 587,22*	9 3 2 0	*744 010,31*	9 6 2 0	*1 282 321,05*
8 6 3 3	*-1 473 648,07*	9 3 2 1	*1 132 139,30*	9 6 2 1	*1 698 934,26*
8 6 4 0	**0**	9 3 2 2	*1 008 285,52*	9 6 2 2	*1 030 889,27*
8 6 4 1	*-556 515,56*	9 3 3 0	*720 582,45*	9 6 3 0	*1 153 883,35*
8 6 4 2	*-1 801 371,00*	9 3 3 1	**1 118 208**	9 6 3 1	*1 250 197,37*
8 6 4 3	*-3 241 979,59*	9 3 3 2	*1 048 234,19*	9 6 3 2	**0**
8 6 4 4	*-3 921 372,00*	9 3 3 3	**629 356**	9 6 3 3	*-1 750 253,50*
8 6 5 0	*-129 804,38*	9 4 0 0	*414 986,26*	9 6 4 0	*625 731,64*
8 6 5 1	*-937 154,06*	9 4 1 0	*791 511,50*	9 6 4 1	**0**
8 6 5 2	*-2 645 093,39*	9 4 1 1	*1 110 512,94*	9 6 4 2	*-2 265 035,78*
8 6 5 3	*-4 789 898,53*	9 4 2 0	*1 081 476,91*	9 6 4 3	*-5 257 754,46*
8 6 5 4	*-6 348 974,71*	9 4 2 1	*1 620 762,21*	9 6 4 4	*-7 028 232,81*
8 7 0 0	*154 107,43*	9 4 2 2	*1 395 862,88*	9 6 5 0	**0**
8 7 1 0	*228 049,99*	9 4 3 0	*1 112 527,92*	9 6 5 1	*-1 406 490,76*
8 7 1 1	*214 453,56*	9 4 3 1	*1 669 036,87*	9 6 5 2	*-4 727 651,64*
8 7 2 0	*181 035,62*	9 4 3 2	*1 440 025,32*	9 6 5 3	*-9 092 705,26*
8 7 2 1	**0**	9 4 3 3	*678 335,14*	9 6 5 4	*-12 458 851,26*
8 7 2 2	*-516 427,35*	9 4 4 0	*828 067,44*	9 7 0 0	*519 478,63*
8 7 3 0	**0**	9 4 4 1	*1 165 505,44*	9 7 1 0	*888 267,96*
8 7 3 1	*-552 447,75*	9 4 4 2	*812 123,65*	9 7 1 1	**1 074 944**
8 7 3 2	*-1 698 934,26*	9 4 4 3	**0**	9 7 2 0	*992 587,83*
8 7 3 3	*-2 749 807,96*	9 4 4 4	*-705 542,83*	9 7 2 1	*1 029 506,62*
8 7 4 0	*-162 125,74*	9 5 0 0	*510 660,32*	9 7 2 2	**0**
8 7 4 1	*-1 153 883,35*	9 5 1 0	*964 144,44*	9 7 3 0	*651 423,06*
8 7 4 2	*-3 166 504,87*	9 5 1 1	**1 327 104**	9 7 3 1	**0**
8 7 4 3	*-5 443 962,49*	9 5 2 0	*1 297 451,02*	9 7 3 2	*-2 190 509,16*
8 7 4 4	*-6 503 408,05*	9 5 2 1	*1 872 754,78*	9 7 3 3	*-4 582 656,00*
8 7 5 0	**0**	9 5 2 2	*1 473 648,07*	9 7 4 0	**0**
8 7 5 1	*-1 176 520,51*	9 5 3 0	*1 304 552,71*	9 7 4 1	*-1 765 505,18*
8 7 5 2	*-3 957 517,46*	9 5 3 1	**1 801 371**	9 7 4 2	*-5 775 380,05*
8 7 5 3	*-7 624 042,24*	9 5 3 2	*1 204 692,52*	9 7 4 3	*-10 561 339,85*
8 7 5 4	*-10 483 053,64*	9 5 3 3	**0**	9 7 4 4	*-13 070 617,68*

$a\ b\ c\ d$	$\dim \mathbb{W}$
9 7 5 0	*-439 854,48*
9 7 5 1	*-3 195 192,00*
9 7 5 2	*-9 115 704,03*
9 7 5 3	*-16 777 216,00*
9 7 5 4	*-22 761 455,54*
10 0 0 0	**81 081**
10 1 0 0	*207 493,13*
10 1 1 0	*346 687,32*
10 1 1 1	*482 730,84*
10 2 0 0	**412 776**
10 2 1 0	*760 965,94*
10 2 1 1	*1 080 242,98*
10 2 2 0	**952 952**
10 2 2 1	*1 469 608,95*
10 2 2 2	**1 341 522**
10 3 0 0	*689 427,98*
10 3 1 0	*1 327 864,69*
10 3 1 1	*1 899 652,79*
10 3 2 0	*1 824 771,66*
10 3 2 1	*2 827 762,13*
10 3 2 2	*2 608 065,86*
10 3 3 0	*1 844 454,18*
10 3 3 1	*2 941 818,55*
10 3 3 2	*2 916 879,93*
10 3 3 3	*1 961 753,24*
10 4 0 0	**1 002 456**
10 4 1 0	*1 964 081,83*
10 4 1 1	*2 807 476,41*
10 4 2 0	**2 792 556**
10 4 2 1	*4 302 633,39*
10 4 2 2	**3 921 372**
10 4 3 0	*3 048 137,59*
10 4 3 1	*4 789 898,53*
10 4 3 2	*4 595 712,63*
10 4 3 3	*2 868 049,62*
10 4 4 0	**2 488 563**
10 4 4 1	*3 839 945,97*
10 4 4 2	**3 508 596**
10 4 4 3	*1 854 743,94*
10 4 4 4	**0**
10 5 0 0	*1 291 663,59*
10 5 1 0	*2 528 806,80*
10 5 1 1	*3 580 608,49*
10 5 2 0	*3 599 247,71*
10 5 2 1	*5 443 962,49*
10 5 2 2	*4 767 188,59*
10 5 3 0	*3 957 517,46*
10 5 3 1	*5 992 576,10*
10 5 3 2	*5 257 754,46*
10 5 3 3	*2 543 729,67*
10 5 4 0	*3 327 496,51*
10 5 4 1	*4 727 651,64*
10 5 4 2	*3 350 506,63*
10 5 4 3	**0**
10 5 4 4	*-3 118 487,99*
10 5 5 0	*1 948 222,33*
10 5 5 1	*2 198 148,96*
10 5 5 2	**0**
10 5 5 3	*-3 925 369,49*
10 5 5 4	*-7 574 442,85*
10 6 0 0	**1 484 406**
10 6 1 0	*2 856 880,88*
10 6 1 1	*3 960 222,88*
10 6 2 0	**3 955 952**
10 6 2 1	*5 750 795,55*
10 6 2 2	**4 582 656**
10 6 3 0	*4 152 630,16*
10 6 3 1	*5 775 380,05*
10 6 3 2	*3 911 823,58*
10 6 3 3	**0**
10 6 4 0	**3 195 192**
10 6 4 1	*3 563 797,36*
10 6 4 2	**0**
10 6 4 3	*-5 952 203,73*
10 6 4 4	*-10 482 472,00*
10 6 5 0	*1 487 699,77*
10 6 5 1	**0**
10 6 5 2	*-5 694 036,51*
10 6 5 3	*-14 101 176,93*
10 6 5 4	*-21 302 106,54*
10 7 0 0	*1 517 192,16*
10 7 1 0	*2 813 288,99*
10 7 1 1	*3 739 646,32*
10 7 2 0	*3 652 193,61*
10 7 2 1	*4 866 292,45*
10 7 2 2	*2 982 303,76*
10 7 3 0	*3 388 358,36*
10 7 3 1	*3 692 282,46*
10 7 3 2	**0**
10 7 3 3	*-5 301 256,87*
10 7 4 0	*1 921 944,81*
10 7 4 1	**0**
10 7 4 2	*-7 069 016,92*
10 7 4 3	*-16 663 327,12*
10 7 4 4	*-22 772 549,15*
10 7 5 0	**0**
10 7 5 1	*-4 663 289,71*
10 7 5 2	*-15 837 162,16*
10 7 5 3	*-30 938 301,36*
10 7 5 4	*-43 352 341,12*

10. Literatura

[1] Adams, J. F. (1996): *Lectures on Exceptional Lie Algebras*, The University of Chicago Press, Chicago.

[2] Baez, J. C. (2001): *The Octonions*, Bull. of Am. Math. Soc. **39** Nr. 2, 145-205. Elektronicky dostupné pod `math.RA/0105155`.

[3] Bott, R., Milnor, J. (1958): *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64**, 87–89.

[4] Cap, A., Slovák, J.: *Parabolic geometries*, kniha v přípravě.

[5] Drápal, A. (2000): *Teorie grup – základní aspekty*, Karolinum, Praha.

[6] Friedrich, T. (1997): *Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie*, Vieweg, Wiesbaden.

[7] Fulton, W., Harris, J. (1991): *Representation Theory: A First Course*, Springer, New York.

[8] Goodman, R., Wallach, N. R. (1990): *Representations and invariants of the classical groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[9] Harvey, F. R. (1990): *Spinors and Calibration*, Academic Press, San Diego.

[10] Humphreys, J. E. (2000): *Introduction to Lie algebras and Representation theory*, Springer-Verlag, New York.

[11] Hurwitz, A. (1898): *Über eine Klasse nichtassociativer hyperkomplexer Algebren*, Nachr. Ges. Wiss. Götingen, 309–316.

[12] Jordan, P., von Neumann, J., Wigner, E. (1934): *On an generaliyation of the quantum mechanical formalism*, Ann. Math. **35**, 29–64.

[13] Kervair, M. (1958): *Non-parallelizabilitz of the n sphere for $n > 7$*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **44**, 280–283.

[14] Knapp, A. W. (1996): *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhäuser, Boston.

[15] Krump, L., Souček, V. (2002): *Hasse Diagrams For Parabolic Geometries*, Proc. of the 22^{nd} Winter School "Geometry and Physics", Srni, Rend. Circolo Mat. Palermo.

[16] Landsberg, J. M.: *soukromá korespondence.*

[17] Landsberg, J. M., Manivel, L. (2003): *On the projective geometry of rational homogeneous varieties*, Comment. Math. Helv. **78** No. 1, 65–100. Elektronicky dostupné pod `math.AG/9810140`.

[18] Sagerschnigová, K. (2003): *Schubert Cell Decomposition and Homology of Generalized Flag Manifolds*, diplomová práce, der Universität Wien.

[19] Springer, T. A., Veldkamp, F. D. (2000): *Octonions, Jordan algebras and exceptional groups*, Springer-Verlag, Berlin.

[20] Wienbergová, E. (2005): *Das Spektrum des Diracoperators auf der Moufang–Ebene* $\mathbb{OP}^2$, diplomová práce, Fachbereich Mathematik, der Universität Hamburg.

[21] Yamaguchi, K. (1993): *Differential systems associated with simple graded Lie algebras*, Advanced Studies in Pure Mathematics **22**, 413–494 .

[22] Zorn, M. (1930): *Theorie der alternativen Ringe (1930)*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **8**, 123–147.

[23] Výpočetní program LIE, elektronicky dostupné na `http://young.sp2mi.univ-poitiers.fr/~marc/LiE/form.html`.