

Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jan Kuchařík

Variační počet ve fyzice

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.

Studijní program: Fyzika
Studijní obor: Obecná fyzika

Praha, rok 2015

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V.....dne.....

Podpis

Název práce: Variační počet ve fyzice

Autor: Jan Kuchařík

Katedra / Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.

Abstrakt: Ve své práci shrnuji některá základní použití variačního počtu v praktických aplikacích. Odvozuji zde nezbytný matematický aparát. Zavádím pojem matematického funkcionálu a jeho extremalizaci, odvozuji Euler-Lagrangeovu rovnici a její důsledek – Beltramiho identitu; dále se věnuji odvození metody řešení izoperimetrických úloh, která zobecňuje metodu Lagrangeových multiplikátorů. Ačkoliv se v práci vyskytují řešené úlohy nejrůznějšího typu, zaměřuju se na čtyři hlavní oblasti: Fermatův princip, Hamiltonův princip nejmenší akce, isoperimetrické úlohy a hledání geodetik.

Title: Variational calculus in physics

Author: Jan Kuchařík

Department:

Supervisor: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.

Abstract: In my research work, I try to collect some basic usage of variational calculus in practical applications. I derive all the necessary mathematical tools. I explain what is a functional and what it means to extremalize it, I derive Euler-Lagrange equation and its corollary – Beltrami identity. I also try to derive a method for solving isoperimetric problems which generalizes the one of the Lagrange multipliers. Although there is a variety of several different problems solved in the thesis, we focus our attention foremost on four topics: the Fermat's principle, the Hamilton's principle of least action, isoperimetric problems and seeking geodesics.

Obsah

Úvod a motivace	1
1) Problém královny Dido a první historicky známý isoperimetrický problém	2
2) Problém brachystochrony jako motivace pro zavedení pojmu funkcionál	7
3) Odvození Euler-Lagrangeovy rovnice: diskrétní přístup	10
4) Definice lokálního extrému funkcionálu	13
5) Odvození Euler-Lagrangeovy rovnice: spojitý přístup	15
6) Elementární příklad na extremalizaci funkcionálů	18
7) Funkcionály explicitně nezávislé na nezávislé proměnné a Beltramiho identity	20
8) Příklady na užití Beltramiho identity	22
9) Fermatův princip	28
10) Kinetická energie a zobecněné souřadnice	40
11) Konzervativní pole a potenciální energie	45
12) Hamiltonův princip nejmenší akce	53
13) Hledání pohybových rovnic pomocí Hamiltonova variačního principu	60
14) Hledání vázaných extrémů funkcí více proměnných	67
15) Isoperimetrické úlohy s pevnými konci	72
16) Isoperimetrické úlohy s pevnými konci – příklady	76
17) Geodetiky - hledání nejkratších spojnic na zakřiveném povrchu	81
18) Hledání geodetik na válci, kuželu a sféře	85
19) Dodatek 1: Podstata světla	95
20) Dodatek 2: Fermatův princip šíření světla - odvození z Maxwellových rovnic	98
Seznam použité literatury a jiných pramenů	105
Závěr	106

Úvod a motivace

Variační počet je metoda, pomocí níž lze hledat extrémy funkcí, tedy zobecněných funkcí. Jedná se o snahu najít takovou funkci nebo takové funkce, které lokálně optimalizují určitou veličinu. Pokud funkcionál závisí pouze na volné proměnné, funkci a její derivaci, pak nutnou podmínkou pro extrém je Euler-Lagrangeova rovnice. Součástí práce je použití metody diskretizace, která umožní spojit dvě na první pohled nesouvisející koncepty, a sice Euler-Lagrangeovu rovnici a Lagrangeovy multiplikátory. V práci se zabýváme především řešením různých problémů variačního počtu vedoucích na řešení zmíněné rovnice. Z tématického hlediska lze úlohy rozdělit na 5 hlavních kategorií:

1. Fermatův princip šíření světla, jeho odvození z Maxwellovy teorie a jeho filosofická interpretace
Aplikace: odvození zákona odrazu a lomu, konstrukce zrcadel a čoček, ohyb světla.
2. Hamiltonův princip nejmenší akce, jeho aplikace a vyvození z klasické mechaniky
Aplikace: počítání trajektorií volného pádu, lin. harm. oscilátoru, kyvadla a hm. bodu na rotující kruhové obruči
3. Isoperimetrické úlohy – odvození na základně zobecnění metody Lagrangeových multiplikátorů
Aplikace: úloha královny Dido, problém řetězovky
4. Geodetiky – odvození obecného postupu vedoucího k nalezení geodetik na křivých plochách
Aplikace: hledání geodetik na rovině, válci, kuželu a sféře
5. Ostatní - úloha o brachystochroně (problém nalezení křivky nejrychlejšího spádu) a hledání tvaru mýdlové bubliny.

Tuto bakalářskou práci jsem se rozhodl psát, protože jsem člověk se zájmem o fyziku a geometrii. Tyto dvě disciplíny spolu velmi úzce souvisí a hranice mezi nimi je často tenká. Samozřejmě: čistý matematik by nejspíš řekl, že v Platónově světě idejí existují přímky, kružnice, kuželosečky i cykloidy nezávisle na jakémkoliv vnějším fyzickém světě. Ano, kdybychom měli do tohoto světa idejí přístup, nemuseli bychom při poznávání pravdy spoléhat na své omylné smysly. My jsme však připoutáni do světa hmoty a nelze tedy důsledně odlišit hmotu a duchovno. Když malému dítěti chceme vysvětlit, co je to přímka, nakreslíme ji na papír. Přitom se snažíme, aby vypadala "rovně". Ale v jiných, neeuclidovských geometriích vypadají přímky zcela jinak, než jak jsme zvyklí (třeba na sféře jsou přímkami hlavní kružnice). Když tedy malému dítěti ukazujeme přímku, nevysvětlujeme mu vlastně přímku jakožto přímku z Platónova světa idejí, ale přímku na papíře, na něž jsme ji nakreslili. A pouze díky smyslovému vjemu si tedy pojem euclidovské přímky dokáže dítě představit. Poznávání geometrických pojmů je proto do jisté míry závislé na našem vizuálním vjemu (potažmo sluchovém a hmatovém).

To, že se o geometrických pojmech dovídáme zprostředkovaně skze naše smysly, však nemusí být vždy jen na škodu. Zkoumání přírody a jevů v ní probíhajících nás velkým způsobem inspiruje při poznávání nových zákoutí geometrie. A naopak nové objevy v geometrii prohlubují naše porozumění fyzice. Že se planety pohybují po elipsách není náhoda, je to zákonitost! To, že příroda vybírá tak jednoduchou a elegantní křivku, je něco, co by člověka asi mělo fascinovat. To, že křivka nejrychlejšího spádu (brachystochrona) je stejná křivka jako ta, kterou opisuje bod na valícím se kole (cykloida), nás též naplňuje úžasem. A že mýdlová bublina zaujímá takový tvar, aby měla minimální plochu, vyznívá trochu jako magie - "jak si to ta bublina dokáže spočítat?", napadne možná někoho. Nemluvě o to, že se světelné paprsky šíří tak, aby dráhu vždy urazily co nejdřív.

Tak či tak, všechny tyto problémy jsou ryze fyzikální a přitom v sobě zahrnují jakousi matematickou "krásu", ukazují nám, že příroda se často chová tak, jako by chtěla, aby se nám to líbilo. A když už se příroda tak snažila, aby připravila pro ty zvědavé z nás tuto estetickou podívanou, tak jsem se rozhodl věnovat svou práci tomu, že se pokusím v ní tuto aspoň střípek této krásy odhalit. A právě variační počet je místem, kde (dle mého mínění) se krása a věda spolu snoubí tak jako málokde jinde.

Upozorňuji však, že ne vždy je cesta k těmto výsledkům snadná a mnohdy bude potřeba prokousat se přes spoustu zdlouhavých výpočtů. Snažil jsem se práci psát tak, aby se četla dobře mně samotnému v době, kdy jsem variační počet ještě neznal. Snad proto je velká část mé práce věnovaná tomu, aby uvedla do povědomí matematické metody, které zde používám. Snažil jsem se napsat nezbytné minimum nutné k pochopení problematiky, ale nezacházet do zbytečných detailů, aby neutekla podstata věci.

Úmluva: Citace na odbornou literaturu nejsou v kapitolách explicitně uvedeny, ale na konci práce se lze dočíst, kde byla která kniha použita

1 Problém královny Dido a první historicky známý isoperimetrický problém

Roku 814 před našim letopočtem utíká fénická královna Dido ze svého rodného města Tyru. Byla svržena svým mocichtivým bratrem Pygmalionem. Na pobřeží severní Afriky, v dnešním Tunisu, chce Dido začít nový život a založit zde nové město - Kartágo. Numidský král však zjevně z jejího úmyslu nebyl příliš nadšený. Dal jí tuto nabídku: Užívej pozemek tak velký, jaký dokážeš ohraničit volskou kůží [Vergilius].

Bylo jasné, že "velkorysá" nabídka byl pouhý výsměch do očí. Avšak fénická královna oplývala důvtipem a zkusila z královského slibu vytěžit maximum. Vzala tedy kůži vola a rozřezala ji na co nejtenčí proužky, na jaké byla schopná. Tyto proužky měly celkovou délku L . Dále chtěla využít pobřeží moře jako přirozenou hranici. Řekněme pro jednoduchost, že pobřeží je dokonale rovné (tvoří přímkou). Jaký tvar by mělo mít město, pokud Dido chtěla, aby bylo ohraničené pouze mořem a volskou kůží, a přitom zaujímalo maximální možnou rozlohu?

Zkusme nejprve úlohu řešit analyticky. Položme jako x -ovou osu pobřeží moře. Křivka, podél níž bude natažena volská kůže, může být vnímána jako funkce $y = y(x)$. Délka této křivky může být vyjádřena jako:

$$s = \int ds$$

Přitom element délky ds podle Pythagorovy věty můžeme vyjádřit jako

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) dx^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

takže výsledná délka křivky bude:

$$s = \int \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Rozloha města je dána standardně pomocí Riemannova integrálu jako:

$$S = \int y(x) dx$$

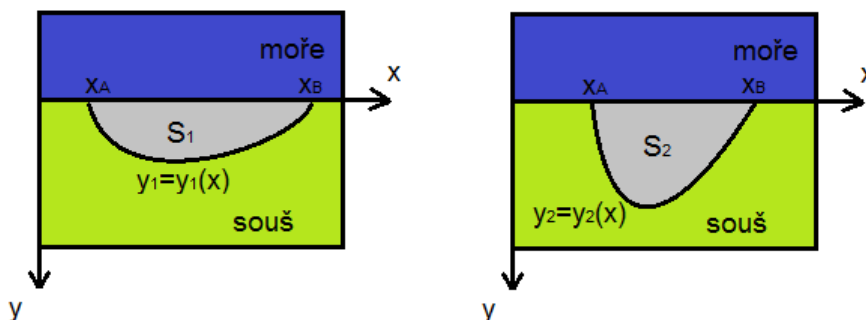
Tím tedy máme všechny důležité veličiny vyjádřené. Poslední věc, kterou bychom si měli ujasnit, jsou místa, kde se hranice města bude napojovat na moře. Vlastně se jedná o dvě místa na x -ové ose. Označme si souřadnice těchto míst jako x_A, x_B . Na začátku úlohy nejsou tato čísla zadána, jejich nalezení je tedy nedílnou součástí řešení. Konečně tedy můžeme úlohu napsat pomocí matematického formalismu:

Hledáme tedy dvě reálná čísla x_A, x_B a funkci $y = y(x)$ takovou, že:

$$1) s = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2} dx = L$$

$$2) S = \int_{x_A}^{x_B} y(x) dx = S_{max}$$

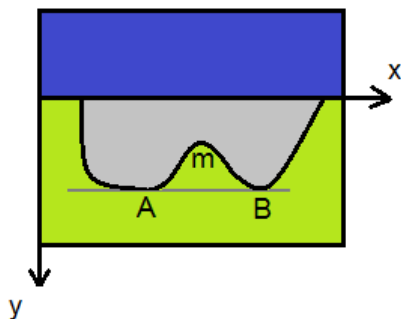
Hledáme křivku, která při zadané hodnotě její délky maximalizuje plochu mezi ní a osou x . Jedná se o příklad tzv. isoperimetrické úlohy. Jak se s problémem královny Dido vypořádat? Křivek o délce L existuje nekonečně mnoho (na obrázku vidíme dvě náhodné možnosti y_1, y_2). Jak vybrat tu správnou, pro kterou je obsah maximální?



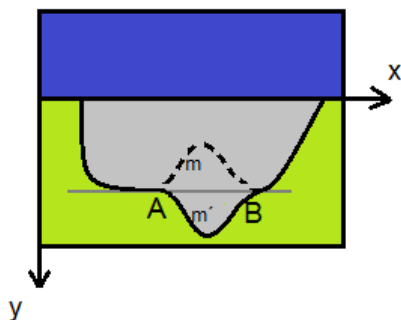
Tento úkol se může jevit velmi těžký, téměř nemožný. Jedním z našich cílů bude postupně získat "zbraně", pomocí nichž se lze s podobnými problémy vypořádat. Odpověď na tuto otázku totiž dává právě variační počet.

Ale přece jen, aby má práce nezačínala jen sliby, zkusím čtenáři ukázat, že tuto jednu konkrétní úlohu lze vyřešit i jinak - bez metod variačního počtu. Naše řešení bude poněkud trikové a nelze v něm hledat nějaký obecně platný postup, aplikovatelný na širší třídu úloh. Nicméně je to velmi elegantní cesta, jak se dostat k výsledku. Pochází od Švýcarského geometra Jakoba Steinerja. Tuto úvahu bych zde rád ukázal, snad pro ten estetický požitek.

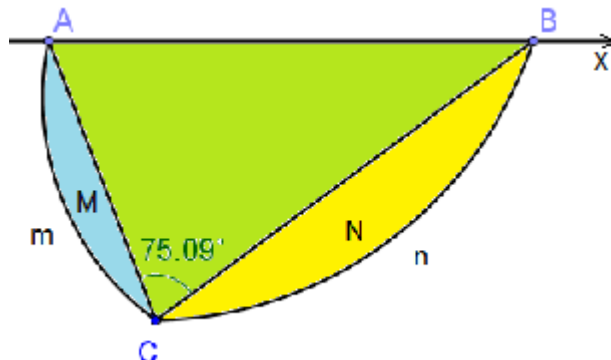
Nejprve si uvědomme, že oblouk tvořící nataženou kůži musí být konvexní. Jak to víme? Inu, zkusme na chvíli předpokládat, že by oblouk mohl být nekonvexní, a přesto měl při dané délce uzavírat maximální možnou plochu. Pokud je nekonvexní, pak na něm musí existovat dva body A, B , jejichž spojnice – úsečka AB – nebude ležet uvnitř útvaru.



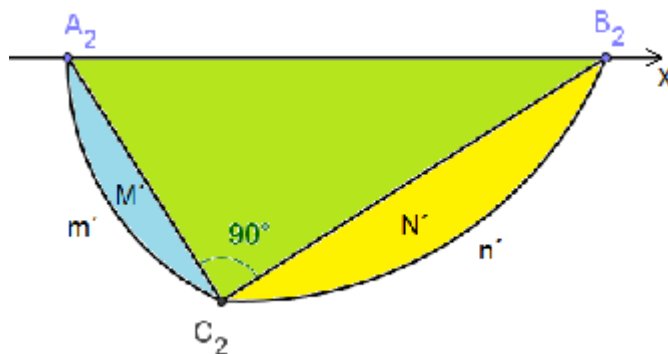
Označme část křivky ležící mezi body A, B jako m . Uvažme křivku m' , která vznikne překlopením křivky m v osové souměrnosti podle přímky AB . Nově vzniklý útvar má zjevně stejnou délku (osová souměrnost zachovává délku), ale větší obsah. Proto původní nekonvexní útvar nemohl mít maximální obsah. To je ale spor s předpokladem.



Další část důkazu je založená na následující úvaze: Pojmenujme celý útvar jako U a oblouk jako o . Označme koncové body oblouku jako A, B . Uvažme, že náš oblouk rozdělíme libovolným bodem C na dva menší oblouky AC, CB , které si označme m, n . Protože víme, že útvar je konvexní, určitě trojúhelník ABC leží uvnitř zkoumaného útvaru U . Zbylé části útvaru si pojmenujme jako M, N (formálně definováno: M je útvar ohraničený křivkou m a úsečkou AC ; N je útvar ohraničený křivkou n a úsečkou BC).



Nyní uvažme, že zkonstruujeme jiný útvar: nejprve vytvoříme pravoúhlý trojúhelník $A_2B_2C_2$ s pravým úhlem při vrcholu C_2 , který se bude shodovat ve stranách $A_2C_2 = AC, B_2C_2 = BC$. Přitom body A_2, B_2 stále leží na ose x . Poté "nalepíme" (z vnější strany trojúhelníku) k úsečce A_2C_2 útvar $M' = M$. Obdobně "nalepíme" k úsečce B_2C_2 útvar $N' = N$. Označme ještě křivočarou část hranice útvaru M' jako m' . Obdobně n' . Konečně: sjednocením oblouků m', n' získáme nový oblouk o' . Oblouk o' společně s osou x ohraničuje nový útvar, označme jej U' .



Nejprve si všimněme, že křivka o' je stejně dlouhá, jako křivka o . Proč? Oblouky m, m' jsou zjevně shodné (tvoří hranici shodných útvarů M, M'). Obdobně i oblouky n, n' jsou shodné. Křivka o je sjednocením křivek m, n ; křivka o' je sjednocením křivek m', n' . Proto jsou křivky o, o' stejně dlouhé.

Víme tedy, že sestrojení nové křivky o' nemění její délku. Logicky bychom se nyní měli zeptat, co se bude dít s plochou útvaru U' . Ukážeme, že nově vytvořený útvar U' má obsah větší nebo roven obsahu původního útvaru U . Z obrázku vidíme, že:

- 1) útvar U je tvořen trojúhelníkem ABC , plochami M a N .
- 2) útvar U' je tvořen trojúhelníkem $A_2B_2C_2$, plochami M' a N' .

Protože $M = M', N = N'$, stačí dokázat, že trojúhelník $A_2B_2C_2$ má větší obsah, než trojúhelník ABC . Označme strany trojúhelníku BC, AC jako a, b . Dále označme úhel ACB jako γ . Díky tomu, jak jsme definovali trojúhelník $A_2B_2C_2$, tak strany B_2C_2 a A_2C_2 mají také délku a, b . Obsah trojúhelníku ABC lze určit jako $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, obsah trojúhelníku $A_2B_2C_2$ je zjevně $S' = \frac{1}{2}ab$. (úhel $A_2C_2B_2$ je pravý). Protože $\sin \gamma \leq 1$ pro libovolný úhel γ , je zjevné, že $S \leq S'$. Rovnost nastane pouze pokud $\gamma = 90^\circ$.

Vidíme tedy, že obsah útvaru U určitě není maximální, pokud úhel ACB není pravý. Pokud tedy vůbec nějaký útvar s maximálním obsahem existuje, úsečka AB by teda měla jít vidět z útvaru pod pravým úhlem. Bod C byl zvolen zcela libovolně na křivce o . Takže zkoumaná křivka o by měla být tvořena pouze z takových bodů, z nichž jde vidět úsečka AB pod pravým úhlem. My však víme, jak taková křivka vypadá! Je to Thaletova půlkružnice. Pokud tedy řešení vůbec existuje, musí to být půlkružnice.

Bylo by však chybné spontánně prohlásit, že odtud plyne, že řešením je půlkružnice. Pouze jsme dokázali, že pokud řešení existuje, pak je to nutně půlkružnice. Nemáme však nijak zaručenou existenci řešení. Možná se to zdá jako maličkost, ale z hlediska metody důkazu to maličkost není. Zkusím to objasnit na příkladu:

Předpokládejme, že existuje největší přirozené číslo, označme jej n . Zjevně n^2 je taky přirozené číslo. Pokud je n největší přirozené číslo, mělo by platit, že $n \geq n^2$, nebo-li $0 \geq n^2 - n$, nebo-li $0 \geq n(n - 1)$. Číslo n je vždycky kladné, takže pokud má nerovnost platit, musí být druhá závorka nekladná. To ovšem splňuje jediné přirozené číslo: $n = 1$. Pokud tedy existuje největší přirozené číslo, musí to být číslo 1. Na základě této argumentace by se skoro zdálo, že 1 je největší přirozené číslo. Zdravý rozum ale teď křičí "stůj!" Jenže kde je v důkazu chyba? Hned na začátku: "Předpokládejme, že existuje největší přirozené číslo, označme jej n ". Tento předpoklad může, ale taky nemusí být oprávněný!

A stejně tak v úloze královny Dido: předpokládali jsme, že křivka uzavírající při dané délce maximální obsah existuje. To je ovšem netriviální předpoklad. Co když pomocí křivky o délce L lze ohraničit plochu libovolně velkého obsahu? Intuice nám říká, že to asi nepůjde, ale jasný důkaz pro to nemáme. Naštěstí v tomto konkrétním případě se naše intuice nemýlí. Řešením je skutečně půlkružnice.

2 Problém brachystochrony jako motivace pro zavedení pojmu funkcionál

Uvažme, že máme v rovině xy dva body $A[x_A, y_A], B[x_B, y_B]$. Řekněme, že z bodu A pustíme kuličku. Pustíme ji po nějaké konkrétní dráze $y_1 = y_1(x)$ a budeme zkoumat, za jak dlouho se dostane do bodu B . Kulička je urychlována pouze homogenním tíhovým polem, navíc neuvažujeme, že by se energie ukládala do rotačního pohybu kuličky, ale pouze do translační složky pohybu. Označme celkový čas, který nás zajímá jako t .

Zjevně platí

$$t = \int dt = \int \frac{ds}{v(x)}$$

Element dráhy ds lze vyjádřit z Pythagorovy věty snadno jako:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

což můžeme dosadit do předchozího vztahu:

$$t = \int dt = \int \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v(x)} dx \quad (1)$$

Pokud na začátku byla kulička v klidu, její kinetická energie byla nulová: $T(x_A) = 0$. Potenciální energie kuličky je zjevně $V(x_A) = mgy_A$.

Poté se kulička na své dráze nacházela ve mnoho různých bodech $[x, y]$ s kinetickou energií $T(x) = \frac{1}{2}mv^2$ a potenciální energií $V(x) = mgy$.

Ať už je kulička na své cestě z bodu A do bodu B kdekoliv, stále musí platit zákon zachování mechanické energie:

$$T(x) + V(x) = T(x_A) + V(x_A)$$

neboli

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_A$$

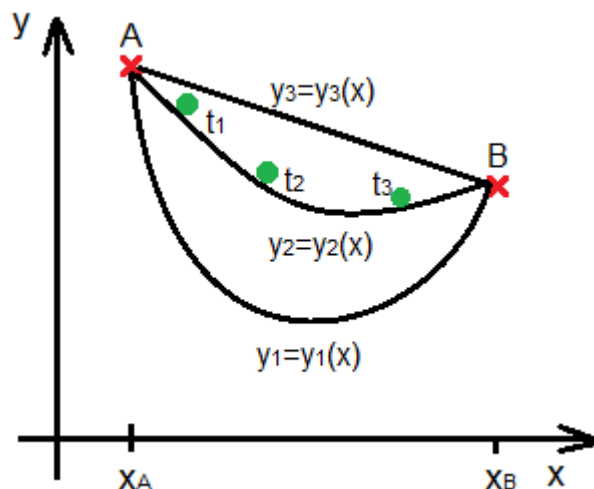
odkud můžeme vyjádřit rychlost kuličky v v dané výšce y jako

$$v = \sqrt{2g(y_A - y)}$$

a toto vyjádření dosadit do vztahu (1):

$$t = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2g(y_A - y)}} dx \quad (2)$$

Zde si musíme uvědomit, že hodnota jmenovatele pro každý konkrétní bod x je zcela jistě závislá na volbě dráhy $y = y(x)$. Kdybychom si vybrali jinou dráhu, řekněme $y_2 = y_2(x)$ a opět zkoumáme-li čas, jak dlouho potrvá kuličce, než se dostane z bodu A do bodu B , došli bychom pravděpodobně k numericky úplně jinému výsledku.



Nabízí se tedy zajímavá otázka, kterou se zabývá právě variační počet: pro jakou dráhu bude doba potřebná k přesunutí kuličky nejmenší? A existuje vůbec taková dráha? Je zjevné, že tato otázka není nijak jednoduchá na zodpovězení - křivek spojujících body A , B existuje nekonečně mnoho. Jak vybrat tu správnou?

Nyní tedy máme představu o tom, jakému problému čelíme. Nemáme však žádné ponětí, jak takový problém analyticky řešit. Abychom se posunuli trochu vpřed, provedeme úrok stranou a zamyslíme se nad tím, o jaký typ úlohy se jedná.

Jde o to, za určitých podmínek extremalizovat jistou veličinu, která závisí na volbě křivky. V tomto případě se jedná o extremalizaci času při přesunu kuličky v homogenním tíhovém poli - to už je ale jistá konkretizace úlohy. Obecně vzato však řešíme toto: mám skříňku, do které vložím funkci a vypadne z ní číslo. Jakou funkci musím vložit, aby vypadlo co nejmenší číslo?

Skříňka má v sobě určitý mechanismus, pomocí kterého každou dostatečně rozumnou křivku zpracovat. Zde bychom mohli říct, že vnitřní mechanismus skříňky známe: jedná se o předpis (2).

A nyní provedeme naprosto geniální trik: na chvíli předstírejme, že konkrétní mechanismus skříňky neznáme - tj. odtud to pro nás bude černá skříňka. A chceme i přesto najít určitý recept, jak najít křivku, kterou když do naší černé skříňky vložíme, vypadne co nejmenší číslo.

Pohlížejme tedy na vztah (2), jako bychom jeho podobu neznali. Ve vztahu (2) je důležité to, že zde máme závislost na veličinách x, y, y' . Obecně řečeno tedy extremalizujeme nějakou veličinu I tvaru:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (3)$$

Poslední věc, kterou si musíme uvědomit, že veličiny x, y, y' jsou ve vztahu (2) v jistém smyslu na sobě nezávislé. To zní trochu podivně: závislost $y = y(x)$ přece svazuje veličiny x a y . Jenže my zde nezkoumáme, co ze skřínky vypadne, ale pouze samotnou tu skřínku. Informace o křivce je něco, co jsme zatím nepoužili (a ani nechceme použít, neb křivku teprve hledáme). Stejně tak nezávislost veličin y a y' - je sice pravda, že druhé je derivací prvního, ovšem to ta skřínka "neví". Pro tu skřínku to jsou při integraci nezávislé údaje.

Náš pojem černé skřínky je vlastně vágní definice obecného pojmu "funkcionál", naše konkrétní skřínka s mechanismem popsaným vztahem (2) je příklad konkrétního funkcionálu.

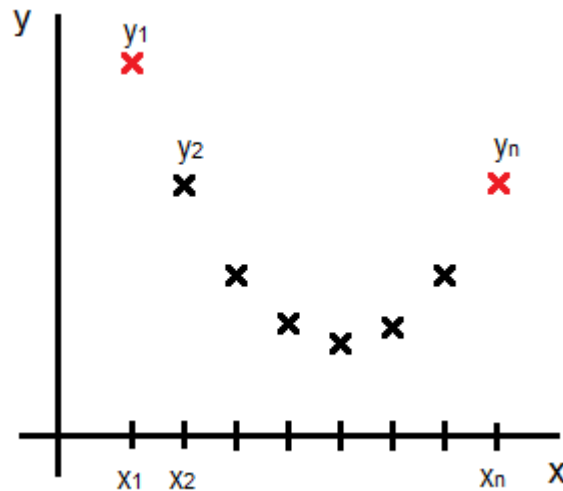
Problém tedy po zobecnění můžeme reformulovat: chceme najít nutnou podmínku pro extremalizaci funkcionálu.

3 Odvození Euler-Lagrangeovy rovnice: diskrétní přístup

Tradičně se ve většině učebnic variačního počtu obvykle začíná zavedením pojmů, jako jsou variace, aby bylo možné říct, co to znamená extremalizovat funkci. Když říkám funkci, myslím spojitou funkci (např. v problému brachystochrony dráha musí být zjevně spojitá).

Co kdybychom k problému pro začátek přistoupili trochu jednodušeji a funkci diskretizovali (tj. definovali ji pouze v konkrétních bodech)? Pak by se ze spojitě funkce stala posloupnost. Posloupnost je však mnohem jednodušší objekt, dá se s ním lépe pracovat, jak si vzápětí uvědomíme.

Uvažme tedy posloupnost definovanou v ekvidistantních bodech x_1, x_2, \dots, x_n od sebe vzdálených Δx a s příslušnými hodnotami y_1, y_2, \dots, y_n , viz obrázek:



V předchozí kapitole jsme dospěli k závěru, že cílem variačního počtu je nalézt metody, jak extremalizovat funkcionál tvaru (3). Ve funkcionálu se vyskytuje integrál. Po diskretizaci ale není co integrovat! Integrovat lze pouze funkce reálné proměnné. Od integrálu tedy musíme udělat "krok zpět" - vzpomenout si, jaký má vlastně integrál význam. Jedná se o objekt sloužící k sečtení nekonečně mnoha nekonečně malých členů. V případě (konečné) posloupnosti ale máme konečně mnoho členů, které už nemusí být malé. Od integrálu tedy musíme přejít k sumě:

$$I = \sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, y'_k) \Delta x \quad (4)$$

Dalším problémem, který zde vidíme, je zde vyskytující se derivace y'_k . Derivace je opět definována jen pro spojitě funkce, nikoliv pro posloupnosti. I zde uděláme jakýsi "krok zpět" a vzpomeneme si, jaký význam mají derivace - jedná se o sklon křivky:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Když se oprostíme od požadavku limity, můžeme celkem rozumně definovat analogicky derivaci jako sklon mezi dvěma sousedními body posloupnosti:

$$y'_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \quad (5)$$

Nyní máme vše připraveno a můžeme se pustit do řešení problému. Máme tedy funkcionál, kterému dáme na vstup konečnou posloupnost bodů a na výstupu obdržíme číslo. A zajímá nás, jakou posloupnost máme funkcionálu předhodit, aby získané číslo bylo co nejmenší.

Body jsou ve vertikálním směru zafixovány, nelze s nimi hýbat vlevo nebo vpravo, x -ové souřadnice bodů x_1, x_2, \dots, x_n jsou pevné. Co však můžeme, je hýbat s body nahoru a dolů, tj. měnit y -ové souřadnice. To můžeme skoro se všemi body, s výjimkou okrajových bodů y_1, y_n . Dále předpokládáme, že funkce $F(x, y, y')$ je spojitá a diferencovatelná ve všech proměnných x, y, y' . Pokud má funkcionál nabývat extrému, musí zřejmě platit, že $\frac{\partial I}{\partial y_i} = 0$ pro $i = 2, 3, \dots, n-1$. Dosaďme z předpisu (4):

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, y'_k) \Delta x \right) = 0$$

Δx je zde jenom multiplikativní konstanta, takže ji můžeme vytknout ze sumy i z derivace a následně jí celý vztah podělit:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, y'_k) \right) = 0$$

Dále si uvědomme, že indexy v sumě nijak nezávisí na i , proto můžeme zaměnit derivaci a sumu:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F(x_k, y_k, y'_k)}{\partial y_i} = 0$$

Zde použijeme řetízkové pravidlo pro derivaci funkcí více proměnných:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial y'_k} \frac{\partial y'_k}{\partial y_i} &= 0 \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_k} \frac{\partial y'_k}{\partial y_i} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Zaměříme se nyní na derivace $\frac{\partial x_k}{\partial y_i}$, $\frac{\partial y_k}{\partial y_i}$, $\frac{\partial y'_k}{\partial y_i}$, které se nám ve výrazu vyskytují. Co o nich můžeme říct?

- $\frac{\partial x_k}{\partial y_i}$ je zjevně vždy 0, protože jak již bylo řečeno, x -ové a y -ové souřadnice bodů na sobě vůbec nezávisí. První suma ve vztahu (6) tedy zcela vypadne.
- Taktéž $\frac{\partial y_k}{\partial y_i}$ je nulové, až na jednu výjimku: pokud $i = k$, pak je derivace rovna 1. Druhá suma ve výrazu (6) se tedy redukuje na člen $\frac{\partial F}{\partial y_i}$.
- U posledního výrazu, $\frac{\partial y'_k}{\partial y_i}$ je potřeba být opatrný a vrátit se ke vztahu (5). Z něj vidíme, že na hodnotě y_i jsou závislé jednak y'_i , jednak y'_{i+1} . Z tohoto vztahu odvodíme, že $\frac{\partial y'_i}{\partial y_i} = -\frac{1}{\Delta x}$, podobně odvodíme $\frac{\partial y'_{i-1}}{\partial y_i} = \frac{1}{\Delta x}$. Pro jiné indexy, než $i, i+1$ se opět derivace rovná 0. Třetí suma ve výrazu (6) se tedy zjednoduší na $-\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial F}{\partial y'_i} + \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial F}{\partial y'_{i-1}}$

Vztah (6) tedy přejde do značně jednodušší podoby:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial F}{\partial y'_i} + \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial F}{\partial y'_{i-1}} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y'_{i-1}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Vztah (7) představuje $n-2$ podmínek nutných pro extremalizaci funkcionálu I . Podmínky se vztahují k indexům 2, 3, ..., $n-1$. Tím je úloha zcela vyřešena pro diskrétní případ. Nyní už stačí pouze provést jednoduchou úvahu, abychom došli k případu spojitých funkcí. Začneme tím, že si minulý vztah přepíšeme do tohoto tvaru:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y'_{i-1}}}{\Delta x} = 0$$

Druhý zlomek lze vnímat i jinak:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\Delta \frac{\partial F}{\partial y'_{i-1}}}{\Delta x} = 0$$

Pro $n \rightarrow \infty$ přejde diskrétní proměnná x_i na spojitou proměnnou x a z posloupnosti y_i se stane funkce, o níž budeme předpokládat, že je spojitá a diferencovatelná. Pak druhý zlomek můžeme interpretovat jako derivaci podle x . Celkově tedy máme:

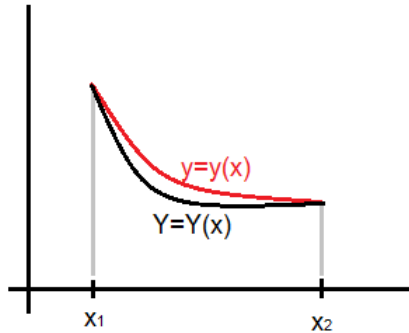
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (8)$$

Poslední rovnici nazýváme Euler-Lagrangeova rovnice. Jedná se o nutnou (nikoliv však postačující) podmínku pro extremalizaci funkcionálu $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$. Máme však na mysli lokální extrém. Co přesně se tím myslí, se dozvíme více v příští kapitole.

4 Definice lokálního extrému funkcionalu

Vztah (8) bychom rádi odvodili i spojitým přístupem, kdy se přibližujeme ne s posloupnostmi, ale s funkcemi. Abychom to mohli udělat, musíme si nejdříve něco říct o tom, co míníme pojmem "lokální extrém". Předpokládejme, že známe funkci $y = y(x)$, která lokálně minimalizuje zkoumaný funkcional tvaru (3), tj. funkcional $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$.

Co to znamená "lokálně minimalizuje"? Funkcional jsme definovali jako skřínku, do něž vložíme funkci a vypadne číslo. Lokální minimalizace tedy znamená, vágně řečeno, že pro funkce $Y = Y(x)$ hodně blízke k funkci $y = y(x)$ výstup z funkcionalu bude vždy menší (nebo stejné) číslo, než pro funkci $Y = Y(x)$, tedy $I(y) \leq I(Y)$. Pro maximalizaci by definice byla obdobná, akorát s opačným znamínkem v nerovnosti.

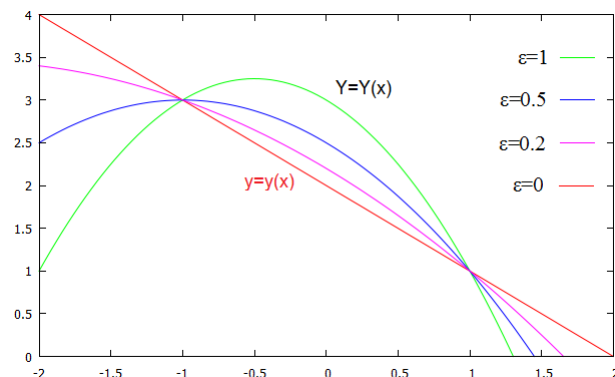


Definice už je skoro korektní, ovšem stále nevíme, které funkce $Y = Y(x)$ lze považovat za hodně blízke funkci $y = y(x)$. Tuto otázku na chvíli nechme stranou, budeme ji podrobněji diskutovat v další kapitole.

O funkci $y = y(x)$ tedy předpokládáme, že minimalizuje funkcional $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$. Dále uvažme libovolnou spojitou hladkou funkci $\eta = \eta(x)$, po níž budeme požadovat, aby $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Pomocí ní vytvoříme určitou třídu funkcí $Y = Y(x)$, která bude parametrizována číslem ϵ :

$$Y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad (9)$$

Například uvažme, že $y(x) = 2 - x$. Řekněme pro konkrétnost, že okrajové body funkcionalu budou $x_1 = -1, x_2 = 1$. Nyní můžeme vybrat libovolnou spojitou hladkou funkci $\eta(x)$ takovou, že $\eta(-1) = \eta(1) = 0$. Tomu vyhovuje například $\eta(x) = 1 - x^2$. To nám generuje třídu funkcí $Y(x) = 2 - x + \eta(1 - x^2)$. Na obrázku jsou znázorněné některé funkce $Y(x)$ z této třídy.



Pokud se ϵ neomezeně přibližuje nule, funkce $Y(x)$ se na intervalu (x_1, x_2) neomezeně přibližuje funkci $y(x)$, což je vidět i z obrázku. Pro různý výběr funkcí $\eta(x)$ vytvoříme různé třídy funkcí. A u každé takové třídy funkcí platí, že pro $\epsilon \rightarrow 0$ platí $Y(x) \rightarrow y(x)$. Pro různý výběr η však každé přibližování vypadá obvykle úplně jinak. To nám umožní popsat všechnu tu spleť funkcí blízkých k funkci $y(x)$.

Poznámka: Jak se chovají funkce $Y(x)$ mimo interval (x_1, x_2) nás nezajímá, to už totiž pro výpočet hodnoty funkcionálu nemá žádný vliv.

Než přejdeme v odvozování dál, chtěl bych ještě upozornit na jednu věc: řekněme, že v předchozím příkladě $y(x) = 2 - x$ opravdu lokálně minimalizuje nějaký funkcionál $I(y)$, ale pro volbu $\epsilon = 1$, tj. pro funkci $Y(x) = 3 - x - x^2$ nám vyjde výstup z funkcionálu menší. Je něco takového možné? Neodporuje to definici? Neodporuje, protože $y(x) = 2 - x$ je pouze minimem lokálním, nemusí být globální. Jinými slovy, funkce $Y(x)$ nebyla dostatečně blízká funkci $y(x)$, aby se nerovnost $I(y) \leq I(Y)$ mohla projevit. Volba $\epsilon = 1$ je až příliš velkorysá a nesplňuje dostatečně dobře požadavek $\epsilon \rightarrow 0$. Lokální minimum nám pouze říká to, že pro každé dostatečně malé ϵ bude nerovnost $I(y) < I(Y)$ platit. Přesněji řečeno zaručuje existenci takového intervalu $(0, \epsilon_0)$, že pro každé ϵ z tohoto intervalu už nerovnost bude platit. Tento interval může být libovolně malý, ale vždy musí existovat.

5 Odvození Euler-Lagrangeovy rovnice: spojitý přístup

Uvažme funkcionál $I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$ a nějakou funkci $y = y(x)$, která tento funkcionál lokálně minimalizuje. Co pro takovou funkci musí platit? Odvodíme, že musí platit vztah (8), tj. Euler-Lagrangeova rovnice.

Uvažme tedy pro $\eta(x)$, specifikovanou vztahem (9), třídu funkcí $Y(x) = y(x) + \epsilon\eta(x)$. Pro dostatečně malé ϵ musí platit nerovnost $I(y) < I(Y)$. Funkce $Y(x)$ jsou tedy blízké k $y(x)$ pro dostatečně malé ϵ . Zkoumejme nyní, jaké číslo dostaneme na výstupu, když vložíme do funkcionálu I některou funkci $Y(x)$ dostatečně blízkou k $y(x)$.

$$I(Y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y') dx \quad (10)$$

Funkce Y závisí podle vztahu (9) na ϵ . Lokální minimum funkcionálu nastane zjevně pro $\epsilon = 0$, neboť tehdy splyne $Y(x)$ s $y(x)$. Musí tedy zjevně platit

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

To po dosazení z rovnice (10) dává:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y') dx \right|_{\epsilon=0} = 0$$

Protože neintegrujeme podle ϵ , ale podle x , lze integrál prohodit s derivací:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{\partial F(x, Y, Y')}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} dx = 0$$

Dále použijeme řetězkové pravidlo pro derivování funkcí více proměnných:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} dx = 0 \quad (11)$$

Podle vztahu (9) odvodíme, že $\frac{\partial Y}{\partial \epsilon} = \eta(x)$. Pokud tohle zderivuju podle x , dostanu $\frac{\partial Y'}{\partial \epsilon} = \eta'(x)$. A konečně, x zjevně nezávisí na ϵ , tj. $\frac{\partial x}{\partial \epsilon} = 0$. Všechny tři tyto substituce dosadím do rovnice (11):

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial F}{\partial Y} + \eta'(x) \frac{\partial F}{\partial Y'} \Big|_{\epsilon=0} dx = 0$$

Protože parciální derivace vyčíslujeme v $\epsilon = 0$, je $Y(x) = y(x)$, takže můžeme vhodně nahradit y za Y :

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial F}{\partial y} + \eta'(x) \frac{\partial F}{\partial y'} dx = 0$$

Tím jsme se zbavili jak uměle vytvořené funkce $Y = Y(x)$, tak jejího parametru ϵ . Nyní nám tedy v integrálu přebývá "navíc" už jen jakási funkce spojitá hladká funkce $\eta(x)$, která je vázaná podmínkou, že $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Tě bychom se chtěli nějak zbavit. Pokud se nám to podaří, vyhráli jsme!

Integrál mohu rozdělit na součet dvou menších integrálů:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial F}{\partial y} dx + \int_{x_1}^{x_2} \eta'(x) \frac{\partial F}{\partial y'} dx = 0$$

Hodilo by se nám nějak vytknout $\eta(x)$ a pak jím podělit celou rovnici, což by závislost na této funkci zrušilo. V tom nám ale brání skutečnost, že se zde vyskytuje nejen $\eta(x)$, ale i $\eta'(x)$. Proto zde provedeme trik a na druhý integrál použijeme integraci per partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial F}{\partial y} dx + \left[\eta(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx = 0$$

Prostřední člen vypadne díky podmínce, že $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial F}{\partial y} dx - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx = 0$$

Integrály nyní opět složím dohromady a vytknu funkci $\eta(x)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) dx = 0$$

Tato rovnice by ale měla platit pro každou testovací funkci $\eta(x)$. Jediná možnost, jak tohle splnit, je položit

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \tag{12}$$

Tato rovnice se nazývá Euler-Lagrangeova a je přesně shodná s rovnicí (8), kterou jsme dostali při diskrétním odvození. Jedná se o nutnou (nikoliv však postačující) podmínku pro minimalizaci (nebo maximalizaci) funkcionálu (10).

Všimněme si, že protože jsme pohlíželi na funkci $F(x, y, y')$ jako na černou skříňku, jejíž tvar neznáme, je Euler-Lagrangeova rovnice aplikovatelná na

poměrně široké spektrum úloh, nikoliv jenom na úlohu o brachystochroně. Jedná se o diferenciální rovnici pro neznámou funkci $y = y(x)$, kterou je potom následně potřeba řešit. To obvykle není snadné a pro různé konkrétní funkcionál vypadají diferenciální rovnice zcela jinak a podle toho je potřeba použít různé metody k jejich řešení. Rovnice má navíc okrajové podmínky $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$, které třídu možných řešení značně omezí.

6 Elementární příklad na extremalizaci funkcionalů

Abychom si vytvořili představu, jak Euler-Lagrangeovu rovnici využít v praxi, uvažme velmi jednoduchou úlohu: chceme najít nejkratší spojnicí mezi dvěma body v rovině $A[x_A, y_A], B[x_B, y_B]$. Intuitivně tušíme, že se bude jednat o úsečku. Zkusme to dokázat!

Uvažme tedy křivku $y = y(x)$ spojující tyto dva body, definovanou na intervalu (x_A, x_B) . Délku křivky obdržíme jako

$$s = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Funkce F v Euler-Lagrangeově rovnici má tedy tvar $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$. Spočítáme:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Obojí dosadíme do Euler-Lagrangeovy rovnice (12):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0$$

Tuto rovnici je potřeba řešit. Zde se nabízí rovnici vyintegrovat podle x :

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

Odtud vyjádříme y'^2 :

$$y'^2 = \frac{C^2}{1 - C^2}$$

Pro $C \in (-1, 1)$ lze odmocnit:

$$y' = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}}$$

Výraz napravo označme jako funkci C , tj. $f(C)$. Tato funkce je zjevně spojitá a platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(C) = \pm \infty$$

Výraz $\frac{C}{\sqrt{1 - C^2}}$ tedy může nabývat libovolné reálné hodnoty, a můžeme jej bez újmy na obecnosti označit jako novou libovolnou konstantu $D \in \mathbb{R}$:

$$y' = D$$

Vyintegruji podle x :

$$y = Dx + E \tag{13}$$

Tím jsme diferenciální rovnici vyřešili. Je však ještě potřeba splnit okrajové podmínky: aby funkce $y = y(x)$ spojovala body $A[x_A, y_A], B[x_B, y_B]$, musíme požadovat $y(x_A) = y_A, y(x_B) = y_B$. Po dosazení do předpisu (13) dostáváme soustavu dvou podmínek pro koeficienty D, E :

$$y_A = Dx_A + E$$

$$y_B = Dx_B + E$$

Z nichž vyjádříme D, E jako:

$$D = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$E = \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}$$

Pokud tedy vůbec nějaká nejkratší křivka spojující body A, B existuje, musí to být úsečka daná předpisem: $y(x) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}$ pro $x \in (x_A, x_B)$. Že se jedná o minimum, vnímáme intuitivně, ale zatím nevíme, jak formálně ověřit, že se skutečně jedná o minimum. Budeme tomu tedy zatím věřit a později si ukážeme techniku, která nevěřícím tomášům dokáže, že skutečně jde o nejkratší spojnici.

Poznamenejme, že se jedná o nejjednodušší příklad úlohy, kde se na dané ploše snažíme hledat nejkratší křivku, která by tyto dva body spojovala. V tomto případě jsme řešili nejjednodušší možnou plochu - rovinu. Později se budeme věnovat hledání nejkratších spojnic i na zakřivených plochách. Obecně se tento problém nazývá hledání geodetiky.

7 Funkcionály explicitně nezávislé na nezávislé proměnné a odvození Beltramio identity

Vyzkoušeli jsme si v praxi, jak lze použít Euler-Lagrangeova rovnice k řešení konkrétních problémů. Často však funkce $F(x, y, y')$ ve funkcionálu nezávisí na proměnné x . V takovém případě, kdy $F \neq F(x)$, lze dokázat, že platí tzv. Beltramio identita:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = konst. \quad (14)$$

Zbytek této stručné kapitoly věnujeme důkazu. Vyjděme z Euler-Lagrangeovy rovnice:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Tuto rovnici přenásobme y' :

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) y' = 0 \quad (15)$$

Provedeme substituci prvního členu, která je trochu komplikovanější: nejdříve provedeme pomocný výpočet a zderivujeme pomocí řetízkového pravidla funkcionál F :

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y''$$

Zkoumaný výraz se nám vyskytuje napravo, vyjádříme ho tedy odsud:

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y'} y''$$

Ještě si uvědomme, že $F \neq F(x)$, tedy $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, což nám vyjádření ještě zjednoduší:

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'} y''$$

Odtud dosadíme do vztahu (15):

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) y' = 0 \quad (16)$$

Nyní je ještě potřeba se nějak zbavit členu $\frac{\partial F}{\partial y'} y''$. Nabízí se trik, že tento člen nahlédneme jako fragment z derivace součinu:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) = \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) y'$$

Po úpravě:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) y'$$

Toto vyjádření dosadíme do vztahu (16):

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) y' - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) y' = 0$$

Poslední dva členy se k našemu velkému potěšení vyruší a zbude:

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) = 0$$

Po integraci této rovnice podle proměnné x získáme finální vztah, který nazýváme Beltramiho identita:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = konst.$$

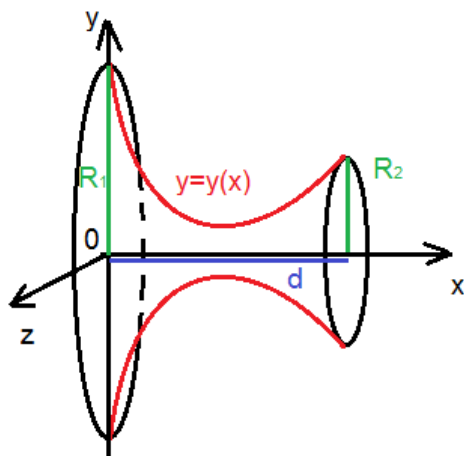
Tato rovnost je v případě, že $F \neq F(x)$ mnohem lépe použitelná, než Euler-Lagrangeova rovnice. Když řešíme Euler-Lagrangeovu rovnici, jedná se obvykle o řešení poměrně komplikované diferenciální rovnice. Beltramiho identita obvykle poskytuje diferenciální rovnici poněkud jednodušší, snadněji řešitelnou.

8 Příklady na užití Beltramiho identity

Příklad: Mýdlová blána mezi obručemi

Představme si dvě sousední kruhové obruče umístěné v prostoru, které jsou spojeny mýdlovou blánou. Ta se kvůli povrchovému napětí snaží zaujmout takový tvar, aby její povrch byl co nejmenší. Předpokládejme, že obruče mají poloměry R_1, R_2 a vzdálenost středů obručí je d . Jaký bude mít blána tvar?

Axiální symetrie úlohy nám napovídá, že i její řešení by mělo být axiálně symetrické. Budeme tento fakt předpokládat, aniž bychom provedli jeho exaktní důkaz. Řešením tedy bude nějaká rotační plocha. Bez újmy na obecnosti si tuto plochu orientujeme tak, že osa symetrie splývá s osou x a obruč s poloměrem R_1 leží v rovině $x = 0$. Potom veškerá informace o geometrii bubliny je dána funkcí $y = y(x)$, která vznikne jako řez bubliny rovinou $z = 0$ (ve skutečnosti křivky vzniknou dvě, vyberme si třeba tu horní). Otázka tedy zní: jak vypadá funkce $y = y(x)$, aby příslušná rotační plocha byla minimální?

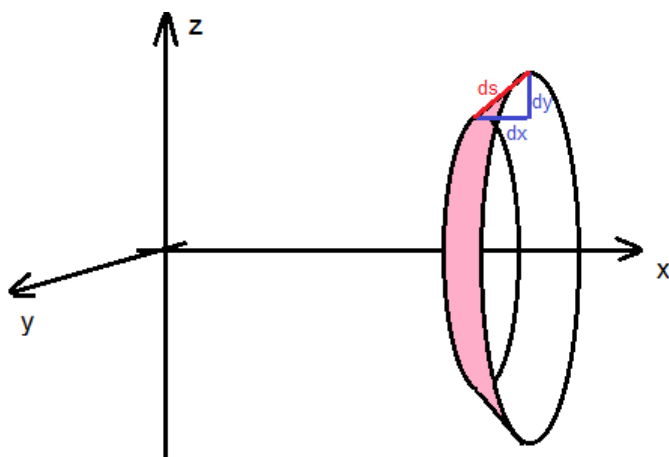


Předpokládejme, že průběh neznámé funkce je $y = y(x)$. Jak vyjádříme povrch mýdlové blány? Můžeme si představit, že povrch bubliny "sekám" na elementární plátky, jejichž šířka na ose x je dx (viz obrázek níže). Celkovou plochu bubliny získáme sečtením (integrací) všech těchto plátek dohromady. Jaká je plocha plátku ležící v pásu mezi x a $x + dx$? Označíme-li ji jako dS , pak $dS = 2\pi y ds$, kde ds je elementární délka křivky $y = y(x)$ v příslušném pásu. Výraz můžeme upravit:

$$dS = 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Po integraci:

$$S = \int_0^d 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$$



Tuto veličinu tedy chceme minimalizovat výběrem vhodné křivky $y = y(x)$, která bude splňovat podmínky $y(0) = R_1$, $y(d) = R_2$ (bublina začíná na jedné obruči a končí na druhé). Všimneme, že funkce v integrálu $F(x, y, y') = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}$ nezávisí explicitně na nezávislé proměnné x - můžeme tedy s výhodou použít Beltramiho identitu - vztah (14):

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

Dostaneme:

$$2\pi y\sqrt{1 + y'^2} - y' 2\pi y \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

což můžeme zjednodušit na tvar:

$$y = \frac{C}{2\pi} \sqrt{1 + y'^2}$$

Zkusme nyní provést separaci proměnných. Provedme záměnu y' za $\frac{1}{x'}$ (to můžeme udělat, protože $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$)

$$y = \frac{C}{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x'}\right)^2}$$

Odtud chceme vyjádřit x' :

$$x' = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{C^2} y^2 - 1}}$$

Konečně můžeme obě strany integrovat podle y :

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{C^2} y^2 - 1}}$$

Abychom integrál snadněji spočítali, bude výhodné zavést substituci:

$$z = \frac{2\pi}{C}y \quad dz = \frac{2\pi}{C}dy \Rightarrow dy = \frac{C}{2\pi}dz$$

Dosaďme tedy tuto substituci do našeho integrálu:

$$x = \int \frac{\frac{C}{2\pi}dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{C}{2\pi} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{C}{2\pi} \cosh^{-1} z + D$$

D je zde konstanta vzniklá při integraci. Provedeme-li zpětnou substituci k proměnné y , dostaneme:

$$x = \frac{C}{2\pi} \cosh^{-1} \left(\frac{2\pi}{C}y \right) + D$$

Odtud tedy vyjádříme y jakožto explicitní funkci x :

$$y = \frac{C}{2\pi} \cosh \left(\frac{2\pi}{C}(x - D) \right)$$

Tím jsme tedy konečně zjistili, jaký tvar musí mít bublina! Kvalitativně se jedná o rotační hyperbolický kosinus. O hyperbolickém kosinu ještě uslyšíme později v souvislosti s jiným zajímavým problémem.

Poslední věc, která by nás ještě mohla trápit, je ta, že nemáme konstanty C, D vyjádřené v závislosti na původních vstupních parametrech úlohy. Jsou to pro nás stále neznámá čísla! Je ale nasnadě, jak je získat: splněním okrajových podmínek $y(0) = R_1, y(d) = R_2$. Ty po dosazení dávají soustavu dvou rovnic pro tyto neznámé:

$$R_1 = \frac{C}{2\pi} \cosh \left(-D \frac{2\pi}{C} \right) \quad R_2 = \frac{C}{2\pi} \cosh \left(\frac{2\pi}{C}(d - D) \right)$$

Bohužel, tato soustava nepůjde řešit analyticky, šla by nicméně řešit iterativně pomocí numerických metod. To však je mimo koncept této práce.

Příklad: Brachystochrona

Dalším příkladem užití Beltramiho identity je dořešení problému brachystochrony - křivky nejrychlejšího spádu. Šlo o to najít křivku $y = y(x)$ spojující pevné body A, B takovou, aby se po ní hmotný bod dostal z bodu A do bodu B co nejrychleji (působí na něj homogenní tíhové pole).

V první kapitole jsme úlohu dokázali dostat do tohoto tvaru: mezi všemi (spojitými, diferencovatelnými) křivkami $y = y(x)$ definovaných na intervalu (x_A, x_B) chceme najít takovou, aby pro ni funkcionál $t = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_A-y)}} dx$ nabýval minimální hodnoty.

Opět si všimneme, že funkce uvnitř funkcionálu nezávisí explicitně na x , můžeme tedy směle použít Beltramiho identitu:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

Po dosazení za F z funkcionálu:

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_A-y)}} - y' \frac{y'}{2g(y_A-y)} \sqrt{\frac{2g(y_A-y)}{1+(y')^2}} = C$$

Vztah sice vypadá na první pohled hrozně, ale když si dá člověk tu práci a upraví si ho, dostane mnohem jednodušší tvar:

$$1 = 2gC^2(y_A - y)(1 + y'^2)$$

Přímočará (ale zdlouhavá) cesta k výsledku by byla tato:

- Invertovat v předchozí rovnici $y' = \frac{1}{x'}$
- Zavést substituci $2gC^2(y_A - y) = z \Rightarrow dy = -\frac{dz}{2gC^2}$
- Vyjádřit x' pomocí z . Vyšlo by $x' = -\frac{1}{2gC^2} \sqrt{\frac{z}{1-z}}$
- Vypočítat integrál $x = -\frac{1}{2gC^2} \int \sqrt{\frac{z}{1-z}} dz$. Nabízí se použít například Eulerovy substituce.

Tento postup však naprosto zamlžuje krásnou geometrickou interpretaci řešení našeho problému. Proto budeme postupovat jinak.

1) Nejprve vyjádříme z předchozí diferenciální rovnice y :

$$y = y_A - \frac{1}{2gC^2(1 + y'^2)}$$

2) Následně zavedeme substituci $y' = \cot \varphi$. Po dosazení do předchozího vztahu získáme:

$$y = y_A - \frac{1}{2gC^2(1 + \cot^2 \varphi)} =_* y_A - \frac{\sin^2 \varphi}{2gC^2} \Rightarrow dy = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{gC^2} d\varphi$$

Rovnost * plyne z goniometrické identity $\frac{1}{1 + \cot^2 \varphi} = \sin^2 \varphi$.

3) Posledním krokem bude explicitní vyjádření x :

$$x = \int dx = \int \frac{dy}{y'} = \int \frac{-\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{gC^2} d\varphi}{\cot \varphi} = -\frac{1}{gC^2} \int \sin^2 \varphi d\varphi$$

Z goniometrických identit víme, že $\sin^2 \varphi = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{2} - \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2}$, takže integrand můžeme upravit:

$$x = -\frac{1}{gC^2} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{1}{4gC^2} (\sin 2\varphi - 2\varphi) + D$$

Ze vztahu 2) můžeme vyjádřit y :

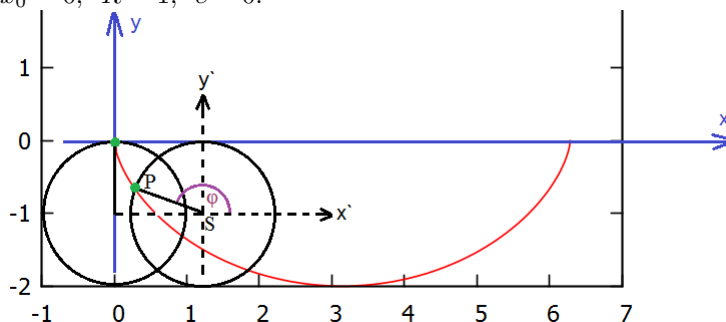
$$y = y_A - \frac{\sin^2 \varphi}{2gC^2} = y_A + \frac{1}{4gC^2} (\cos 2\varphi - 1)$$

Celkově tedy můžeme zapsat naši křivku parametricky takto:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D + \frac{1}{4gC^2} (\sin 2\varphi - 2\varphi) \\ y_A - \frac{1}{4gC^2} + \frac{1}{4gC^2} \cos 2\varphi \end{bmatrix} \quad (17)$$

Pokud má čtenář trochu zkušeností s geometrií rovinných křivek, pak tuší, že se jedná o cykloidu (křivku, kterou opisuje bod na obvodu valčího se kola). Pro úplnost však raději ukážeme, že cykloidě skutečně odpovídá tento tvar parametrické závislosti.

Uvažme tedy kruhový kotouč o poloměru R , který se dotýká zespodu osy x . Označme bod, kde se kotouč dotýká přímky x jako P . Jeho počáteční poloha bude $[x_0, y_0] = [x_0, c - R]$. Poté kotouč začneme valit (bez prokluzování) po přímce $y = c$. Bod P se bude spolu s kotoučem také valit a opisovat určitou trajektorii, kterou pojmenujeme cykloida. Na obrázku vidíme příklad cykloidy, když $x_0 = 0$, $R = 1$, $c = 0$.



Pohyb lze rozložit na translační a rotační část. Vyřešíme nejdřív translační část - budeme popisovat, jak se pohybuje střed kotouče. Pokud se kotouč odvalí po přímce x o úhel φ , posune se střed kotouče o vzdálenost $R\varphi$ směrem doprava. Označíme-li x_S, y_S souřadnice středu kotouče, bude platit:

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + R\varphi \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + R\varphi \\ c - R \end{bmatrix}$$

Naším dalším úkolem bude parametrizovat rotační část pohybu - a to v závislosti na úhlu φ . Kdybychom si představili, že ve středu kotouče zavedeme počátek nové soustavy souřadné $O'x'y'$, tak zjevně souřadnice bodu P v této soustavě budou:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) \\ R \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Celkový pohyb bodu P získáme složením translační a rotační složky pohybu:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + R\varphi \\ c - R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + R\varphi - R \sin \varphi \\ c - R + R \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Kdybychom provedli formální přeznačení $\varphi \rightarrow -2\varphi$, dostali bychom:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + R(\sin 2\varphi - 2\varphi) \\ c - R + R \cos 2\varphi \end{bmatrix}$$

Tento tvar však naprosto přesně odpovídá vztahu (17). Vidíme tedy, že brachyochrona je skutečně cykloidou. Překrásné zjištění!

9 Fermatův princip

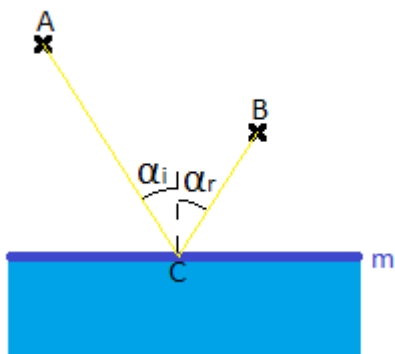
Paprsky světla mají jednu pozoruhodnou vlastnost: pokud paprsek projde z bodu A do bodu B , musí je šířit po takové dráze, že ji urazí za nejkratší možný čas (extremální možný čas, chceme-li být přesní). Této skutečnosti si poprvé všiml francouzský právník (a "amatérský" matematik) Pierre Fermat a dokázal z této skutečnosti odvodit celou řadu doposud nesourodých jevů. Na jeho počest se zmíněný zákon nazývá Fermatův princip. Ukážeme si například, jak tento princip souvisí například se zákonem odrazu a zákonem lomu. Ukážeme, jak se dá Fermatův princip aplikovat při konstrukci zrcadel a čoček.

Než se však do těchto zajímavých věcí pustíme, měli bychom si ještě uvědomit, že sebekrásnější matematický zákon je pouze modelem nějaké fyzikální reality. V našem případě je touto fyzikální realitou světelný paprsek a jeho šíření. Pokud si světelný paprsek představíme jako proud světelných částic (fotonů), evokuje to v hlavě přirozeně představu šířícího se proudu částic - paprsku.

Je tu však jeden problém: jak foton "ví", že pokud cestuje z bodu A do bodu B skrze nějakou optickou soustavu, že si má vybrat dráhu takovou, aby to zvládl za nejkratší možný čas? Mají snad fotony něco jako "vědomí"? Tato otázka je velmi zajímavá, avšak odpověď na ni není zdaleko triviální. Proto čtenáře, kterého to zajímá, odkážu do dodatků, které jsem nazval "Podstata světla" a "Odvození Fermatova principu z vlnové optiky".

Příklad: Odraz světla na rozhraní dvou prostředí

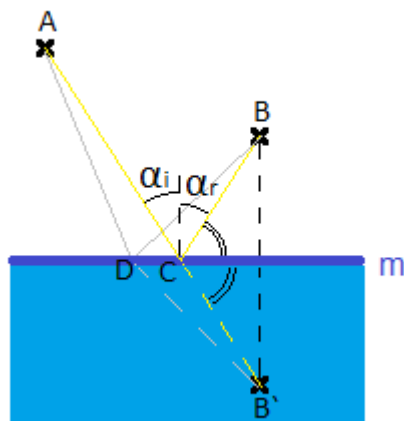
Představme si, že máme rozhraní dvou prostředí (třeba vzduchu a vody). Pokud na něj dopadne v nějakém blíže nespecifikovaném bodě C paprsek světla pod nějakým úhlem α_i , část světla projde skrz vodu a část světla se v podobě paprsku odrazí. Otázka zní: pod jakým úhlem α_r se odrazí?



Řekněme, že paprsek se šíří z bodu A a po odraze projde nějakým bodem B . Podle Fermatova principu pro bod dopadu musí platit, že ze všech možných bodů C na rozhraní se musí zvolit takový bod, aby se světlo dostalo po lomené čáře ACB do bodu B za nejkratší možný čas. Odtud bychom měli nějak zjistit vztah mezi úhly α_i, α_r .

Předně si uvědomme, že světlo se šíří ve stále stejném prostředí (ve vzduchu) - tudíž minimalizace času je totéž jako minimalizace dráhy. Označme přímkou na rozhraní (problém teď bez újmy na obecnosti zjednoduším na dvojrozměrný) jako m . Hledáme tedy bod $C \in m$ takový, že $|AC| + |CB| = \min$.

Dále provedme trik: zobrazme bod B v osové souměrnosti podle přímkou m a obraz označme B' . Označme průsečík přímkou AB' a m jako bod C . Tvrdím, že bod C řeší naši úlohu. Toto tvrzení se pokusím v dalším odstavci dokázat.



Pro spor předpokládejme, že na přímce m leží nějaký bod D , pro nějž by lomená čára ADB byla kratší než ACB :

$$d(ADB) < d(ACB) \quad (18)$$

Díky vlastnostem osové souměrnosti určitě platí, že $|CB| = |CB'|$, a tedy lomené čáry ACB a ACB' jsou stejně dlouhé. Podobně i lomené čáry ADB a ADB' jsou stejně dlouhé. Díky tomu můžeme přepsat vztah (18) takto:

$$d(ADB') < d(ACB')$$

Po rozepsání:

$$|AD| + |DB'| < |AC| + |CB'|$$

Avšak podle definice bodu C lze pravá strana psát jen jako $|AB'|$:

$$|AD| + |DB'| < |AB'|$$

Tato nerovnost je však v přímém rozporu s trojúhelníkovou nerovností pro trojúhelník ADB' . Proto byl původní předpoklad (18) špatný. Bod C tedy skutečně minimalizuje lomenou čáru.

A konečně si povšimněme, že díky osové somuměrnosti jsou dvouproužkované úhly na obrázku shodné - označme je β . Z diagramu okamžitě vidíme, že platí rovnosti:

$$\alpha_r + \beta = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha_r + \alpha_i + 2\beta = \pi$$

Pomocí úhlu β mohu vyjádřit snadno vyjádřit z této soustavy rovnic oba úhly α_i, α_r :

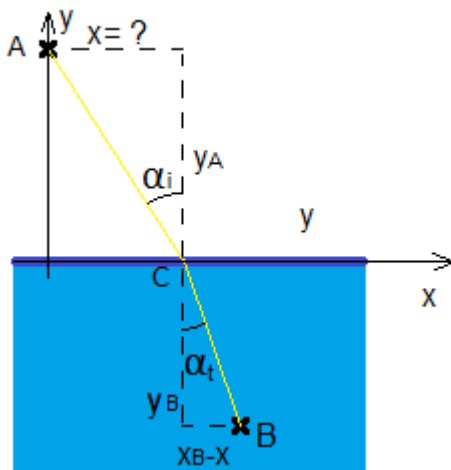
$$\alpha_r = \alpha_i = \frac{\pi}{2} - \beta$$

Úhel odrazu se tedy vždy rovná úhlu dopadu! Mimochodem, stejný zákon platí nejen pro odraz na rozhraní, ale třeba i pro odraz na zrcadle.

Příklad: Lom světla na rozhraní dvou prostředí

Další možné využití Fermatova principu je při lomu světla. Zadání je podobné, jako minule: máme rovinné rozhraní dvou prostředí (opět třeba vzduchu a vody). Z optického hlediska jsou obě prostředí charakterizována indexem lomu - jedná se o čísla, která říkají, kolikrát se světlo šíří v daném prostředí pomaleji než by se šířilo ve vakuu. Řekněme, že vzduch má index lomu n_1 , zatímco voda index lomu n_2 . Uvažme, že světelný paprsek dopadá pod úhlem dopadu α_i ze vzduchu na rozhraní. Část světla se odrazí a část projde dovnitř materiálu. Otázka zní: pod jakým úhlem α_t se paprsek zlomí?

Řekněme, že paprsek se šíří z bodu A a po průchodu rozhráním projde nějakým bodem B . Podle Fermatova principu pro bod dopadu musí platit, že ze všech možných bodů C na rozhraní se musí zvolit takový bod, aby se světlo dostalo po lomené čáře ACB do bodu B za nejkratší možný čas. Odtud bychom měli nějak zjistit vztah mezi úhly α_i, α_t .



Opět bez újmy na obecnosti považujme úlohu za dvourozměrnou a kartézské souřadnice Oxy umístíme tak, aby rozhraní prostředí splývalo s x -ovou osou a bod A ležel na y -ové ose (viz obrázek). Označme souřadnice bodů A, B, C po

řadě jako $[0, y_A], [x_B, y_B], [x, 0]$. Jedinou neznámou je zde hodnota x . Světlo se ve vzduchu šíří rychlostí $\frac{c}{n_1}$, ve vodě rychlostí $\frac{c}{n_2}$. Světlo se tedy bude skrz vzduch šířit dobu $t_1 = \frac{n_1}{c} \sqrt{x^2 + y_A^2}$ a skrz vodu dobu $t_2 = \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$. Celkový čas potřebný k uražení této vzdálenosti je tedy

$$t = \frac{n_1}{c} \sqrt{x^2 + y_A^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$$

Podle Fermatova principu výběr x musí být takový, aby čas byl t minimální. To může nastat jen tehdy, pokud $\frac{dt}{dx} = 0$. Po dosazení funkce t dostaneme:

$$\frac{n_1}{c} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} + \frac{n_2}{c} \frac{(x - x_B)}{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}} = 0$$

V tuto chvíli bychom mohli pokračovat řešit tuto rovnici a dostali bychom po několika úpravách nehezku algebraickou rovnici 4. stupně pro x . Abychom se tomuto zdoluhavému postupu vyhnuli, zamysleme se raději nad tím, jaký je geometrický význam zlomků. Z pravoúhlých trojúhelníků na obrázku vidíme, že:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} = \sin \alpha_i \qquad \frac{(x - x_B)}{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}} = \sin \alpha_t$$

To můžeme dosadit do předchozí rovnice a vyjde elegantní vztah:

$$\frac{n_1}{c} \sin \alpha_i = \frac{n_2}{c} \sin \alpha_t$$

$$n_1 \sin \alpha_i = n_2 \sin \alpha_t$$

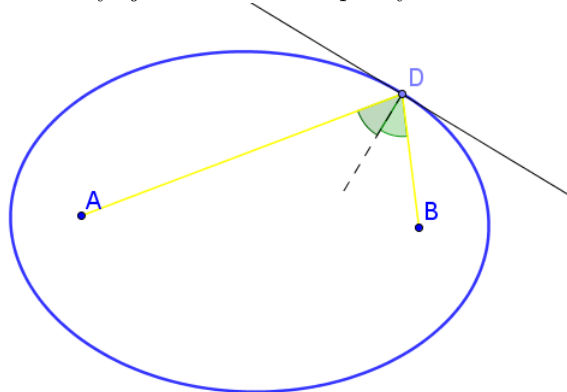
Získali jsme velmi jednoduchý vztah mezi úhlem odrazu, úhlem dopadu a indexy lomu obou prostředí. Říká se mu Snellův zákon. Mimochodem, pojmenování veličiny "index lomu" vzniklo právě díky této vlastnosti světla, ačkoliv je tato hodnota relevantní i v situacích, kdy k žádnému lomu nedochází.

Příklad: Zrcadlo fokusující radiálně se rozbíhající paprsky

Další velmi elegantní použití Fermatova principu se týká konstrukce zrcadel, která mají za úkol soustředit paprsky tak, aby se sbíhali do jediného bodu. Představme si třeba, že máme dva zdroj světla A a do bodu B umístíme například svíčku, přičemž chceme, aby se knot svíčky zapálil. Jaký tvar musí mít odrazivá plocha, aby koncentrovala odražené paprsky do bodu B ?

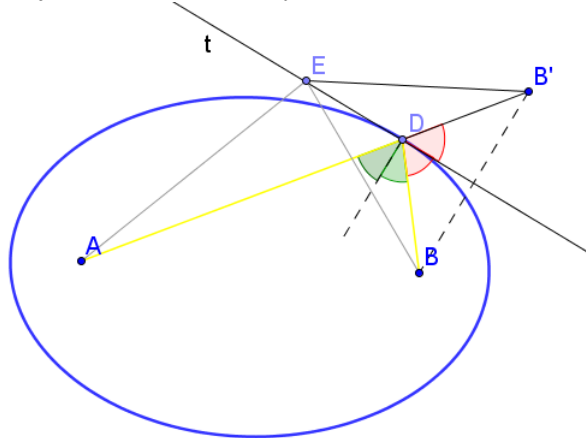
Inu, Fermatův princip nám říká, že pokud se světlo má šířit z bodu A do bodu B , musí tak učinit za minimální čas. Řekněme tedy, že některý paprsek vyjde z bodu A , odrazí se od zrcadla v bodě D a skončí v bodě B a potrvá mu to dobu t_0 . A teď si představme jiný paprsek vycházející z bodu A . Pokud se má od zrcadla odrazit a dospět do bodu B , musí tak učinit také za minimální čas - tj. také za čas t_0 . Paprsku vycházejícímu v libovolném směru to musí trvat přesně stejně dlouho: t_0 ! A protože se světlo šíří stále jen v jednom prostředí, je požadavek konstantního času času stejný, jako požadavek konstantní dráhy.

Celou tu dobu hledáme tvar zrcadla - tj. jakousi množinu bodů D takovou, aby pro fixní body A, B měla lomená čára ADB konstantní délku. Ale my přece z geometrie víme, jak taková křivka vypadá! Je to elipsa! Elipsa s ohnisky A, B . Zrcadlo tedy zjevně musí mít eliptický tvar.



Každé zakřivené zrcadlo si můžeme představit, jako mnoho vedle sebe poskládaných rovinných zrcadel. A pro rovinné zrcadlo už jsme zjistili, že úhel odrazu je vždy roven úhlu dopadu. Pokud tedy uvažíme normálu k elipse v bodě D , úhly mezi ní a úsečkami DA, DB by měly být shodné. Fyzikální uvažování nám v tuto chvíli vlastně radí, jak odhalit nějakou ryze geometrickou vlastnost! Zkusme to...

Zaveďme tečnu t k elipse v bodě D . Označme úhel dopadu jako α_i , úhel odrazu jako α_r . Uvažme obraz bodu B v osové souměrnosti podle této tečny a pojmenujme jej B' . Nejprve ukážeme, že bod D leží na úsečce AB' . Naše strategie bude tato: pokusíme se dokázat, že pro libovolný bod $E \neq D$ ležící na tečně t je lomená čára ADB kratší než lomená čára AEB . Pak totiž bude bod D mít tu vlastnost že mezi všemi body ležícími na t pro něj lomená čára ADB' bude nejkratší možná - a tedy bude $D \in AB'$.



Platí

$$|AD| + |D'B| =_1 |AD| + |DB| <_2 |AE| + |EB| =_3 |AE| + |EB'|$$

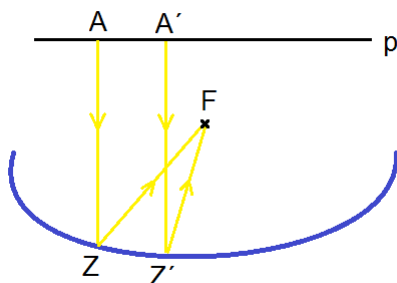
Rovnost č. 1 vysvětlíme díky rovnosti $|D'B| = |DB|$, která plyne z osové souměrnosti. Nerovnost č. 2 vysvětlíme na základě faktu, že bod E leží na tečnu t , a protože je různý od bodu D , tak leží vně elipsy. Proto na základě definice elipsy musí nerovnost platit. Rovnost 3 č. je opět důsledkem osové souměrnosti: $|EB| = |EB'|$.

Celkově tedy máme $|AD| + |D'B| < |AE| + |EB'|$, nebo-li lomená čára ADB je vždy kratší než lomená AEB , a je tedy nejkratší. Proto $D \in AB'$.

Označme úhly mezi tečnou t a úsečkami DB, DB' jako β (díky vlastnostem osové souměrnosti musí být shodné). Na obrázku jsou vybarveny červeně. Zjevně $\alpha_r + \beta = \frac{\pi}{2}$, neboť tečna a normála na sebe musí být kolmé. Dále protože $D \in AB'$, tak $\alpha_i + \alpha_r + 2\beta = \pi$. Z posledních dvou rovnic získáme, že $\alpha_r = \alpha_i = \frac{\pi}{2} - \beta$. Vidíme, že zákon odrazu neplatí jen pro rovinné zrcadlo, ale i pro eliptické zrcadlo.

Příklad: Zrcadlo fokusující svazek rovnoběžných paprsků

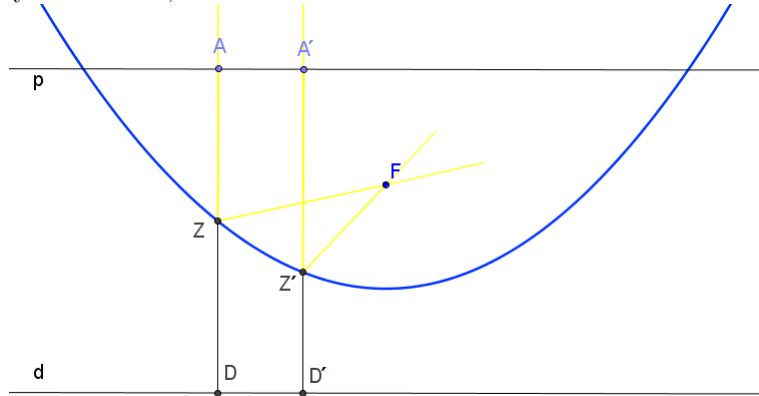
Teď zkusme uvážit jiný příklad: řekněme, že uvážíme svazek rovnoběžných paprsků a opět je chceme pomocí zrcadla soustředit do jediného bodu, řekněme do bodu F . Jaký tvar by mělo mít takové zrcadlo?



Ne překvapivě nám opět pomůže Fermatův princip. Celá situace se opět odehrává v homogenním izotropním prostředí, takže minimalizace času je opět ekvivalentní požadavku minimalizace dráhy. Představme si, že paprsky vybíhají z nějaké rovinné vlnoplochy. Protože náš problém budeme opět řešit pouze ve dvou dimenzích, tato vlnoplocha bude mít podobu přímky - třeba přímka p . Paprsek vybíhá kolmo k vlnoploše v bodě A , odrazí se na zrcadle v bodě Z a poté požadujeme, aby prošel bodem F . Paprsek tedy na své cestě urazí dráhu $|AZ| + |ZF|$. Tato vzdálenost musí být minimální. Zvolíme-li jiný paprsek (který bude s tím minulým rovnoběžný), k odrazu dojde v jiném bodě Z' a celková dráha bude $|A'Z'| + |Z'F|$. Opět se ale musí jednat o minimum ze všech možných drah. Pokud ale obě dráhy jsou minimální, jsou si navzájem sobě rovné:

$$|AZ| + |ZF| = |A'Z'| + |Z'F| = \min.$$

Nyní provedeme malý trik: prodlužme oba rovnoběžné paprsky "za zrcadlo" - první z nich o vzdálenost $|ZF|$, druhý z nich o vzdálenost $|Z'F|$. Koncové body označme D, D' .



Poslední rovnost tedy můžeme přepsat:

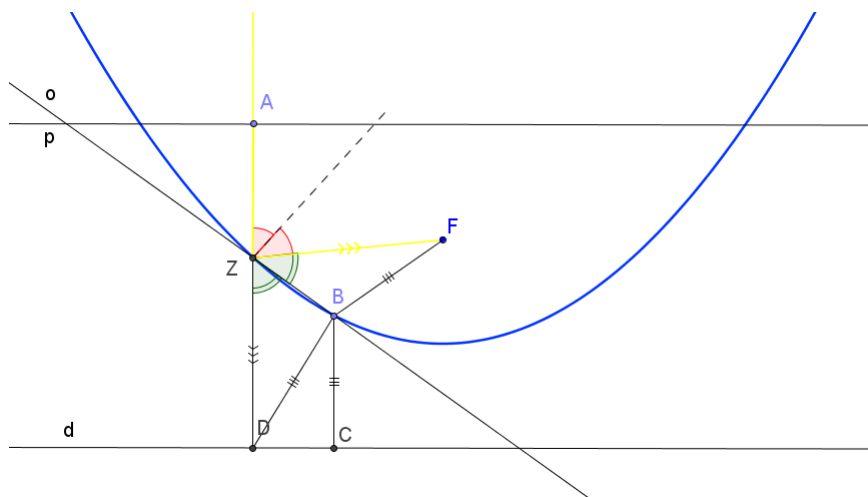
$$|AZ| + |ZD| = |A'Z'| + |Z'D'|$$

$$|AD| = |A'D'|$$

Bodem D veďme rovnoběžku s přímkou p , pojmenujme ji d . Protože paprsky jsou rovnoběžné a oba kolmé k vlnoploše p , tak díky poslední rovnosti je $ADD'A'$ obdélník. Bod D' tedy musí také ležet na přímce d .

Teď už máme připravené všechno co potřebujeme k triumfálnímu závěru. Nezávisle na volbě bodu Z' , do nějž bude dopadat paprsek, určitě je vzdálenost tohoto bodu stejná od přímky d jako od bodu F . To je však známá křivka: parabola! Zrcadlo musí mít parabolický tvar.

Parabolické zrcadlo si lze představit jako soustavu velmi malých rovinných zrcadel. A při odrazu na velmi malém rovinném zrcadle jsme odvodili, že úhel odrazu se rovná úhlu dopadu. Opět nám tedy optika napovídá něco o čistě geometrické vlastnosti paraboly. Zkusme tuto vlastnost odvodit ryze geometricky.



Nechť o je osa úhlu DZF . Naše strategie bude tato: nejprve dokážu pomocné tvrzení, že tato osa je tečnou k parabole. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není - pak by to musela být sečna a musela by protnout parabolu ještě v nějakém dalším bodě. Označme tento bod B . Trojúhelníky ZBD a ZBF by pak musely být shodné podle věty sus (protože $|DZ| = |FZ|$, $|BZ| = |BZ|$ a $|\angle BZD| = |\angle BZF|$). Díky tomu i příslušné strany BD a BF se musí shodovat:

$$|BD| = |BF|$$

Vědme z bodu B kolmici na řídící přímku a patu označme C . Protože body Z, B nesplývají, tak nesplývají ani jejich projekce na řídící přímku: body D a C . Díky tomu je BCD trojúhelník, díky kolmosti projekce navíc pravoúhlý s přeponou BD . Z vlastností paraboly jsou úsečky BF a BC shodné:

$$|BF| = |BC|$$

Srovnáním posledních dvou rovností:

$$|BD| = |BC|$$

BD je ale přeponou pravoúhlého trojúhelníku, zatímco BC jeho odvěsnou. Tato rovnost tedy nemůže platit - dostáváme spor. Osa úhlu DZF tedy nemůže být sečnou paraboly, nýbrž tečnou.

Označme opět úhel dopadu α_i , úhel odrazu α_r , úhel DZF jako 2β . Zjevně tyto tři úhly dávají dohromady úhel přímý: $\alpha_i + \alpha_r + 2\beta = \pi$.

Úhel mezi osou o a úsečkou ZF je zjevně β . Dokázali jsme, že o je tečna k parabole, a ta je vždy kolmá na normálu. Proto: $\alpha_r + \beta = \frac{\pi}{2}$.

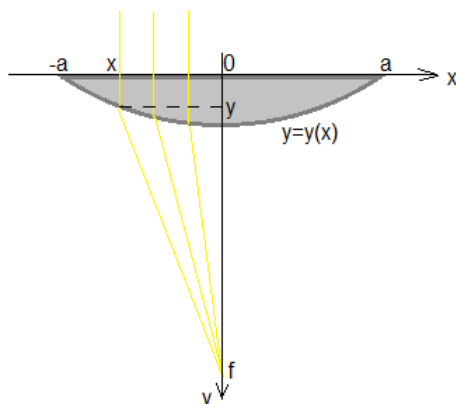
Vyjádríme-li z posledních dvou rovností zkoumané úhly dostaneme: $\alpha_i = \alpha_r = \frac{\pi}{2} - \beta$. Ano, úhel odrazu a úhel dopadu se opět rovnají!

Velký antický matematik a fyzik - Archimedes ze Syrakus - použil podle legendy tento princip při obraně svého rodného města Syrakus proti Římanům. Podle legendy shromáždil lesklé kovové plošky (tehdy ještě skleněná zrcadla nebyla známa), které uspořádal do takového parabolického tvaru, aby světlo ze slunce bylo fokusováno na nepřátelské lodě, které se takto vznítily.

Satelitní přijmače mají typicky tvar rotačního paraboloidu, protože se jim hodí shromažďovat vysílané rovinné vlny do jednoho bodu, kde je umístěná anténa.

Příklad: Čočka fokusující svazek rovnoběžných paprsků

Tím přehlídka použití Fermatova principu pořád ještě nekončí. Pokusíme se určit, jaký tvar by měly mít ploskovypuklé čočky, aby soustředily svazek rovnoběžných paprsků do daného bodu. Problém budeme opět uvažovat pouze dvourozměrně. Aby úloha byla nějak parametrizovaná, řekněme, že chceme vyrobit čočku o průměru $2a$ s ohniskovou vzdáleností f . Čočku chceme vyrobit ze skla o indexu lomu n_1 , zatímco prostředí vně čočky (typicky vzduch) má index lomu n_2 .



Podle Fermatova principu opět musí všem paprskům zabrat cesta od vstupu do čočky až po dolet do ohniska stejnou dobu. Označme tuto dobu jako T . Ta se skládá ze dvou částí: doby t_1 , kdy se světlo šíří skrze sklo a doby t_2 , kdy se světlo šíří skrze vzduch. Řekněme, že souřadnice paprsku vstupujícího do čočky je x a tvar čočky je popsán funkcí $y = y(x)$.

Dráha skrz sklo měří y a světlo se tudíž šíří rychlostí $\frac{c}{n_1}$. Doba t_1 je tedy $t_1 = \frac{n_1}{c}y$.

Dráha skrz vzduch měří podle Pythagorovy věty $\sqrt{x^2 + (f - y)^2}$ a světlo se tudíž šíří rychlostí $\frac{c}{n_2}$. Proto příslušná doba pro vzduch je $t_2 = \frac{n_2}{c}\sqrt{x^2 + (f - y)^2}$.

Celková doba T pro průchod světla je tedy:

$$T = \frac{n_1}{c}y + \frac{n_2}{c}\sqrt{x^2 + (f - y)^2} \quad (19)$$

Tím jsme získali rovnici, odkud můžeme získat vyjádření $y = y(x)$. V rovnici figuruje parametr T , jehož hodnota se určí z podmínky $y(a) = 0$. Po dosazení dostáváme:

$$T = \frac{n_2}{c} \sqrt{a^2 + f^2}$$

Rovnice (18) lze převést na rovnici kvadratickou vzhledem k neznámé y :

$$y^2(n_1^2 - n_2^2) + 2y(n_2^2 f - Tcn_1) + (T^2 c^2 - n_2^2 x^2 - n_2^2 f^2) = 0$$

Její vyřešením dostaneme:

$$y = \frac{Tcn_1 - n_2^2 f}{n_1^2 - n_2^2} \pm \sqrt{\left(\frac{Tcn_1 - n_2^2 f}{n_1^2 - n_2^2}\right)^2 + \frac{n_2^2 f^2 - T^2 c^2}{n_1^2 - n_2^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} x^2}$$

Tento tvar vypadá poněkud odpudivě, nicméně podíváme-li se pozorně a uvědomíme-li si, že kromě x jsou všechno jen konstanty, tak funkce je vlastně tvaru $y = \alpha \pm \sqrt{\beta + \gamma x^2}$ pro vhodné substituce za α, β, γ . Tato rovnice lze upravit do "hezčího" tvaru:

$$\frac{(y - \alpha)^2}{\beta} - \frac{x^2}{\frac{\beta}{\gamma}} = 1$$

Z tohoto tvaru je zjevné, že kvalitativně se jedná o hyperbolu. Hranice ploskoduté čočky by tedy měla tvořit hyperbolu (ve třech dimenzích rotační hyperboloid).

Kdybychom chtěli soustředit nikoliv paprsky rovnoběžně jdoucí, ale naopak radiálně se rozbíhající z nějakého zdroje, stačilo by dát dvě takové čočky k sobě tak, aby plochou stěnou přiléhaly.

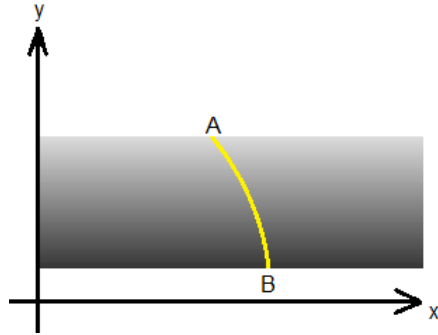
Příklad: Ohyb světla v opticky nehomogenním prostředí

Poslední aplikace Fermatova principu, kterou si zde předvedeme, je zakřivování paprsku světla v prostředí, kde se spojitě mění index lomu. Abychom si nemysleli, že jde snad o nereálnou situaci: index lomu se mění mimo jiné například v závislosti na teplotě prostředí. Stačí si tedy třeba představit vzduch nad rozpálenou vozovkou a přesně k takové situaci může dojít - vidíme, že po silnici jakoby "teče voda". Ve skutečnosti se jen chvěje vzduch nad ní a díky ohybu světla toto chvění vidíme. Na poušti se tomu říká fata morgana.

A teď už k úloze: opět si ji zjednodušíme jen do dvou dimenzí, ačkoliv by problém šel řešit trojrozměrně. Zadání zní takto: po jaké dráze se bude šířit paprsek světla z bodu $A[x_A, y_A]$ do bodu $B[x_B, y_B]$ v prostředí s indexem lomu daným funkcí $n(x, y) = \frac{c}{v_0 y}$? Tuto dráhu bychom chtěli popsat jako křivku $y = y(x)$.

Pochopitelně tento předpis není platný všude, protože index lomu musí být reálné číslo z intervalu $(1, \infty)$. Proto předpis povolíme pouze v pásu $y \in (y_A, y_B)$, kde $y_A > 0, y_B < \frac{c}{v_0}$.

Všimněme si, že prostředí má v dané výšce y všude stejný index lomu, tj. nezávisí na souřadnici x . Rychlost světla v prostředí je n -krát menší než ve vakuu: $v(x, y) = \frac{c}{n(x, y)} = v_0 y$.



Podle Fermatova principu se světlo musí dostat z bodu A do bodu B za nejkratší možnou dobu. Doba potřebná k uražení této dráhy je:

$$t = \int_{x_A}^{x_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} \frac{ds}{v} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} dx = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v_0 y} dx$$

Chceme tedy extremalizovat tento funkcionál. Ten nezávisí na x , použijeme tedy Beltramiho identitu:

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v_0 y} - y' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v_0 y} \right) = C$$

C je zde neznámá konstanta, kterou určíme později z okrajových podmínek $y(x_A) = y_A, y(x_B) = y_B$. Po zderivování máme:

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v_0 y} - \frac{y'^2}{v_0 y \sqrt{1 + y'^2}} = C$$

Po úpravě dostaneme tvar:

$$\frac{1}{v_0^2 C^2 y^2} = 1 + y'^2$$

Aby se nám tato diferenciální rovnice lépe řešila, uvažme místo závislosti $y = y(x)$ raději závislost $x = x(y)$. Bylo by dobré vyjádřit y' . To lze provést snadno: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'}$ (kde značkou x' máme na mysli $\frac{dx}{dy}$). To můžeme dosadit do předchozího vztahu:

$$\frac{1}{v_0^2 C^2 y^2} = 1 + \frac{1}{x'^2}$$

Teď už stačí pouze vyjádřit x' jakožto závislou na y a výsledek potom integrovat:

$$x' = \frac{v_0 C y}{\sqrt{1 - v_0^2 C^2 y^2}}$$

$$x = \int \frac{v_0 C y}{\sqrt{1 - v_0^2 C^2 y^2}} dy$$

Integraci lze v tomto případě provést snadno:

$$x = \frac{\sqrt{1 - v_0^2 C^2 y^2}}{v_0 C} + D$$

Tento vztah jde upravit do podoby:

$$\left(x - \frac{D}{v_0 C}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{v_0^2 C^2}$$

To je evidentně rovnice kružnice. Nyní bychom měli zajásat, protože jsme úlohu vyřešili: zjistili, že paprsek se bude pohybovat po dráze kruhového oblouku. O této kružnici navíc můžeme podle její rovnice prohlásit, že její střed leží na ose x . Nikdo nám nemůže zakázat si přeznačit konstanty:

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2$$

Nyní už stačí jen splnit počáteční podmínky a na základě nich určit hodnoty konstant α, R . Řešíme tedy soustavu rovnic:

$$(x_A - \alpha)^2 + y_A^2 = R^2 \quad (x_B - \alpha)^2 + y_B^2 = R^2$$

Její vyřešením dostaneme:

$$\alpha = \frac{x_A + x_B}{2} + \frac{y_A^2 - y_B^2}{2(x_A - x_B)}$$

$$R^2 = \left(\frac{x_A - x_B}{2}\right)^2 + \frac{y_A^2 + y_B^2}{2} + \left(\frac{y_A^2 - y_B^2}{2(x_A - x_B)}\right)^2$$

Tím je úloha zcela vyřešená. Na závěr této úlohy bych zde rád poznamenal, že úloha je dosti podobná úloze o brachystochroně (tam se přece taky hledala křivka nejrychlejšího spádu!). U obou problémů je každé výšce y přiřazena přesně daná hodnota rychlosti. Zde je tato závislost zakódována v rozložení indexu lomu (neboť znám-li jej, znám i rychlost světla v daném místě). Pro náš konkrétní případ se index lomu měnil jako $n(x, y) = \frac{c}{v_0 y}$. Kdyby ale závislost indexu lomu byla $n(x, y) = \frac{c}{\sqrt{2g(y_A - y)}}$, úloha by byla naprosto ekvivalentní problému brachystochrony - a měla by tedy i stejné řešení (cykloidu).

10 Kinetická energie a zobecněné souřadnice

Uvažme inerciální kartézskou soustavu $Oxyz$ a v rámci této soustavy si představme pohybující se objekt, jehož hmotnost je m . Pohybující se těleso pak musí mít kinetickou energii $T = \frac{1}{2}mv^2$, kde v je rychlost tělesa vztažená k zavedeným souřadnicím.

Než se posuneme ke zobecněným souřadnicím, pokusme se nejprve tento jednoduchý vzorec dokázat.

Pro jednoduchost uvažme, že na začátku bylo těleso v klidu, tj. pohybová energie tělesa byla nulová. Pohyb byl vytvořen tím, že jsme na určité dráze působili na objekt silou. Kousek práce dW , kterou tato síla F vykoná na malém kousku trajektorie ds , je rovna $dW = \vec{F} \cdot \vec{ds}$. Celkovou práci, kterou síla vykonala, pak určíme součet přes všechny malé kousky dráhy (tj. integrací):

$$W = \int \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

Přitom vykonaná práce se na něco musí přeměnit (dle zákona zachování energie). Na co se tato práce přeměnila? Na kinetickou (pohybovou) energii tělesa. Musí tedy platit

$$T = \int \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

Sílu můžeme klidně rozepsat na základě druhého Newtonova pohybového zákona:

$$T = \int m\vec{a} \cdot \vec{ds}$$

Máme zde skalární součin dvou veličin, nic nám nebrání napsat si tyto veličiny po složkách:

$$T = \int m(a_x, a_y, a_z) \cdot (dx, dy, dz)$$

Dále si uvědomíme, že a_x je zrychlení ve směru osy x , tj. musí platit: $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$. Podobně pro další složky zrychlení. Po dosazení:

$$T = \int m \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right) \cdot (dx, dy, dz)$$

Vytkneme konstantu m z integrálu a použijeme definici skalárního součinu pro vektory:

$$T = m \int \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz \right)$$

Nyní provedu první trochu trikový krok: dx si napíšu jako $\frac{dx}{dt} dt$, obdobně dy, dz :

$$T = m \int \left(\frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} dt + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} dt + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{dt} dt \right)$$

Druhým trikem je nahlédnout pomocí pravidla pro derivování složených funkcí, že platí rovnost $\frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$. Po dosazení vidíme, že následná integrace už není problém:

$$\begin{aligned} T &= m \int \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 dt \right) \\ T &= \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Výrazy $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ jsou však rychlosti pohybu ve směru os:

$$T = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

Rychlost je však vektorová veličina a velikost vektoru se určuje pomocí Pythagorovy věty:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (21)$$

Tím tedy máme kinetickou energii vyjádřenou v kartézských souřadnicích. Poznamenejme, že o kinetická energii má smysl mluvit vždy pouze vzhledem k nějaké konkrétní soustavě. Důvod je zjevný - rychlost v se vždy posuzuje vůči něčemu. Jinak rychle se nám jeví člověk, který se uvnitř vlaku rozběhne, pokud jedeme vlakem spolu s ním, nebo když stojíme na nádraží a celou situaci pozorují odtud. Je tedy logické, že energie uložená v pohybu se může lišit na základě toho, vůči jakému pozorovateli ji vztahujeme.

Kartézské souřadnice však nejsou jediné souřadnice, v nichž můžeme pohyb tělesa (a jeho kinetickou energii) popisovat. Existují i mnohé další souřadnice a často bývá výhodné pracovat i v nich. Jak na to?

Položme si nyní důležitou otázku: co to vlastně jsou souřadnice a na co slouží? Obecně vzato se jedná o určitou n -tici čísel, které přiřadím právě jeden bod v prostoru, který se snažím algebraicky popsat. Podle Newtonovské fyziky žijeme v Euklidovském prostoru \mathbb{R}^3 , proto je přirozené začít právě kartézskými souřadnicemi. Nicméně často v reálných fyzikálních situacích nemůže popisované těleso zaujmout v tomto prostoru zcela libovolnou polohu.

- Například závaží zavěšené na tyči dlouhé l , otáčející se kolem pevného bodu, musí od tohoto bodu být stále stejně vzdálené - tj. v úvahu připadají pouze body na sféře o poloměru l . Ne každá poloha závaží je povolena. Množina všech povolených poloh se nazývá konfigurační prostor. V tomto případě se jedná o sféru s poloměrem l .

- Uvážíme-li například drát smotaný do šroubovice a na něm je navléknutá kulička, která po něm může klouzat, pak konfigurační prostor kuličky je potom právě ona šroubovice.
- Jako poslední příklad uvažme kapku, která díky povrchovému napětí drží pohromadě a je přilnuta k povrchu válcového sloupu. Pak konfigurační prostor kapky je plášť zmíněného válce.

Asi tušíme, že v každém z posledních třech příkladů je možno polohu zkoumaného objektu vyjádřit pomocí obyčejných kartézských souřadnic x, y, z . Nicméně takový popis není zrovna "pěkný". Má totiž dvě hlavní vady na kráse:

1) šroubovice je křivka, tudíž na její popis mi stačí jediný parametr. Podobně plášť válce a sféra jsou plochy, takže na jejich parametrizaci mi stačí parametry dva. Není žádný důvod šahat při popisu hned po třech číslech jen proto, že situaci popisujeme jakožto obyvatelé 3-dimenzionálního světa.

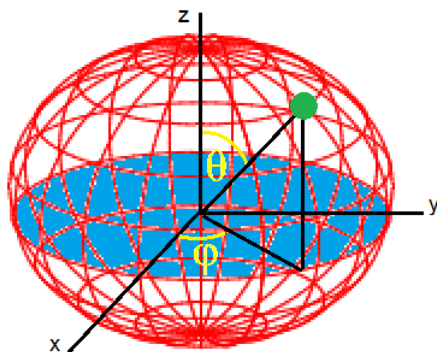
2) šroubovice i plášť válce jsou invariantní vůči translaci určitému typu translace. Plášť válce má dokonce axiální symetrii. Sféra disponuje ještě silnější symetrií radiální. Pokud se rozhodneme pro popis těchto konfiguračních prostorů pomocí kartézské soustavy, nebude možno tyto symetrie algebraicky využívat.

Bylo by teda výhodné pro každý konfigurační prostor zavést n -tici navzájem nezávislých parametrů, které budou jednoznačně popisovat každý bod tohoto prostoru a pokud možno zachycovat geometrii dané fyzikální situace. Těmto souřadnicím budeme říkat zobecněné souřadnice. Obecně se značí q_1, q_2, \dots, q_n .

Zkusme ilustrovat zavedení zobecněných souřadnic pro naše tři příklady.

Příklad: Kinetická energie kyvadla ve zobecněných souřadnicích

Začneme kyvadlem, jehož konfigurační prostor je sféra o poloměru l . Zde by bylo výhodné zvolit přirozenou parametrizaci sféry - pomocí polárního úhlu $\varphi \in (0, 2\pi)$ a azimutálního úhlu $\theta \in (0, \pi)$. Na obrázku je závaží znázorněno jako zelená kulička a tyč je reprezentována spojnicí s počátkem souřadnic.



Kinetickou energii tělesa jsme zatím vyjádřili pouze v kartézských souřadnicích. Pokud chceme být schopni ji vyjádřit i v nově zavedených zobecněných souřadnicích, je potřeba najít převod mezi těmito souřadnicemi, tj.

$$x = x(q_1, \dots, q_n), \quad y = y(q_1, \dots, q_n), \quad z = z(q_1, \dots, q_n)$$

Tyto předpisy stačí dosadit do vztahu (20) a získáme kinetickou energii vyjádřenou ve zobecněných souřadnicích. Zkusme to provést pro dva z našich třech příkladů (kuličku navlečenou na šroubovici vynechám):

Začneme kyvadlem. Z obrázku sféry lze snadno odvodit, že příslušné převody mezi souřadnicemi jsou tyto:

$$x = l \sin \theta \cos \varphi, \quad y = l \sin \theta \sin \varphi, \quad z = l \cos \theta$$

Pokud tyto vztahy zderivujeme podle času (vůči l se samozřejmě chováme jako ke konstantě, zatímco k φ a θ jako k časově závislým proměnným), dostaneme:

$$\frac{dx}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \cos \varphi - l \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \sin \varphi$$

$$\frac{dy}{dt} = l \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta \sin \varphi + l \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \cos \varphi$$

$$\frac{dz}{dt} = -l \frac{d\theta}{dt} \sin \theta$$

Tím máme vyjádřené kartézské rychlosti pomocí zobecněných souřadnic a posledním krokem je dosadit do vztahu (20). Po jednoduchých úpravách (musí se víckrát využít identita $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$) dostaneme, že:

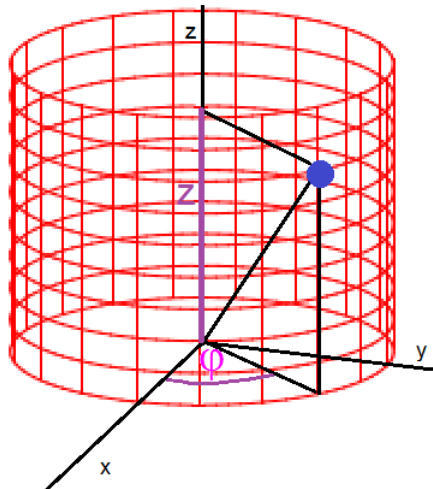
$$T = \frac{1}{2} m l^2 \left(\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right)$$

Konečně jsme tedy získali kinetickou energii vyjádřenou v závislosti na zobecněných souřadnicích, což byl cíl, ke kterému jsme v této kapitole chtěli dospět.

Příklad: Kinetická energie kapky vody klouzající na povrchu válcového sloupu ve zobecněných souřadnicích

Podobným způsobem zkusme vyjádřit i kinetickou energii kapky vody na sloupu ve tvaru válce. Přitom předpokládáme (ač je tento předpoklad dosti nereálný), že při pohybu kapka neztrácí hmotnost, tj $m = konst.$ Dále předpokládáme, že podstava sloupu je kruh s poloměrem R .

Plášť válce lze naprosto přirozeně parametrizovat pomocí polárního úhlu $\varphi \in (0, 2\pi)$ a výšky bodu $z \in \mathbb{R}$. Na obrázku je kapka vody znázorněná modře.



Z ilustrace lze snadno zjistit, že příslušné převody mezi souřadnicemi musí vypadat takto:

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = z$$

Odtud:

$$\frac{dx}{dt} = -R \frac{d\theta}{dt} \sin \theta, \quad \frac{dy}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \cos \theta, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

A po dosazení do (20) a drobných úpravách:

$$T = \frac{1}{2} m \left(R^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right)$$

11 Konzervativní pole a potenciální energie

Kromě kinetické energie budeme potřebovat ještě zavést energii potenciální. O co jde? Zkusme si představit prostor \mathbb{R}^3 a v něm určitý objekt, který se zde může pohybovat. Celý prostor vyplníme silovým polem: na každý objekt uvnitř tohoto pole může působit nějaká síla. Co by se s takovým objektem dělo? Silové epole by objekt zjevně urychlovalo a tím mu předávalo kinetickou energii. Tato energie se však odněkud musí vzít, jinak by byl porušen zákon zachování energie. Odkud se vezme?

Ještě než na otázku odpovíme, zkusme si udělat nějakou představu o tom, jak může takové silové pole vypadat - uveďme si nějaké příklady.

- Nejjednodušším příkladem je homogenní gravitační pole: na každé těleso o hmotnosti m působí síla $F_g = mg$ ve směru dolů k povrchu Země. Při prvním přiblížení předpokládejme, že Země je placatá, takže silové pole míří všude stejným směrem, a lze tedy jednoduše popsat vzorcem $F = -mg\vec{e}_z$, kde \vec{e}_z je jednotkový vektor směřující od povrchu Země.
- Pokud však trajektorie objektů bude srovnatelná s velikostí Země, nelze provést už předpoklad, že Země je placatá. Musíme tedy provést 2 korekce: jednak pole už nebude mít všude stejnou velikost, a ani nebude už všude mít stejný směr. Působení takového pole je popsáno vzorcem $F = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r$, kde \vec{e}_r je jednotkový vektor, mířící z testovaného tělesa směrem od středu Země. Poznamenejme, že tento zákon se netýká jen interakce se Zemí, ale s libovolným dostatečně hmotným objektem (hvězdy, planety, měsíce, atd.). Objekty však musí mít opravdu velkou hmotnost, jinak je gravitační působení zanedbatelné (jedná se o nejslabší známou sílu ve vesmíru).
- Dalším jednoduchým příkladem je elektrostatické působení. Mějme elektrostatické pole \vec{E} , které působí na testovací náboj q . Síla působící na něj musí je dána vzorcem $\vec{F} = q\vec{E}$.

Samozřejmě se nabízí otázka, jak může takové elektrostatické pole vypadat a čím je vlastně vytvářeno. Obecně je vytvářeno libovolným nabitým tělesem. Bylo by však příliš složité zkoumat všechna možná tělesa, která mohou existovat. Proto je výhodnější si těleso rozložit na jednotlivé částice a zkoumat působení nabitých částic. Každá taková částice o náboji Q vytváří elektrické pole $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$, kde r je vzdálenost od působící částice Q , \vec{e}_r jednotkový vektor mířící od zkoumaného místa v prostoru ke Q , ϵ je konstanta popisující prostředí, tzv. permitivita. Vyberme si tedy libovolné místo prostoru a sečteme vůči němu všechny příspěvky intenzit všech nabitých částic. Tím dostaneme celkovou intenzitu elektrického pole ve zkoumaném místě. Jako příklad uveďme tři rovnoměrně nabitá tělesa s plošnou hustotou náboje σ :

- a) sféru o poloměru R , od jejíhož středu jsem vzdálen $r > R$
- b) válcovou plochu o poloměru R , od jehož osy jsem vzdálen $r > R$
- c) nabitou rovinu, od níž jsem vzdálen r

Příslušné vzorce jsou postupně:

a) $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{R^2}{r^2} \vec{e}_r$, kde \vec{e}_r je jednotkový vektor mířící pryč kolmo od středu koule

b) $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{R}{r}$, kde \vec{e}_r je jednotkový vektor mířící kolmo od osy válce

c) $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \vec{e}_z$, kde \vec{e}_z je jednotkový vektor mířící kolmo od roviny

- Jako poslední příklad uveďme harmonický oscilátor. Ten si můžeme představit například jako závaží zavěšené na pružině, které kmitá vertikálně kolem své rovnovážné polohy. Síla, kterou pružinka působí na závaží, je pro dostatečně malé výchylky dána Hookovým zákonem, tj. $\vec{F} = -kz\vec{e}_z$, kde k je tuhost pružinky a \vec{e}_z je jednotkový vektor směřující ze závaží směrem od rovnovážné polohy.

Jiný příklad harmonického oscilátoru je elektrický dipól, který byl vlivem vnějšího elektrického pole rozkmitán kolem své rovnovážné polohy a stává se tak zdrojem elektromagnetického záření (takto lze popsat interakci světla s látkou).

Poznamenejme zde, že narozdíl od všech předchozích příkladů silových polí zde máme zvláštní vlastnost: spolu s rostoucí vzdáleností od zdroje pole velikost síly narůstá. Čím víc je pružinka natažená, tím víc se snaží vrátit se do počáteční polohy. Samozřejmě, kdybychom pružinku natáhli příliš, Hookův zákon přestane platit a příslušný vzorec nebude popisovat realitu.

Tím jsme tedy snad získali nějakou intuici o tom, jak takové silové pole může v principu vypadat. Ještě než začneme zavádět pojem konzervativního pole, rád bych upozornil na jednu zdánlivě "samozřejmou" vlastnost, která ale někdy nemusí být splněná. Předpokládali jsme totiž, že silové pole se sice může měnit v prostoru, ale jinak je konstantní (nemění se s časem). Navíc toto pole nezávisí na rychlosti, s jakou se objekt pohybuje. To u mnoha sil nemusí být splněno, například u magnetické síly, nebo třecích sil vyvolaných odporem vzduchu. I o těchto silách se ještě později zmíníme, ne však v této kapitole.

Vraťme se nyní k otázce, kterou jsme si položili na začátku kapitoly: máme objekt uvnitř silového pole. Síly mohou toto těleso urychlit a tím mu předat kinetickou energii. Odkud se tato kinetická energie vezme?

Odpověď je jednoduchá: abychom těleso dovnitř silového pole dostali, museli jsme předtím vynaložit nějakou práci. Jakou?

$$W_{my} = \int \vec{F}_{my} \cdot d\vec{s} = \int -\vec{F}_{pole} \cdot d\vec{s} \quad (22)$$

Tento vzorec vypadá formálně podobně, jako v předchozí kapitole, když jsme uvažovali práci, kterou vykonáváme při urychlování tělesa. Zde ovšem na těleso nejenom my, ale i síly pole. Uvažujeme-li rovnoměrný přímočarý pohyb, musí být výslednice sil nulová. Abychom toho dosáhli síla naše musí mít přesně opačnou velikost, jako síla pole. Proto ve výše uvedeném vzorci je $\vec{F}_{my} = -\vec{F}_{pole}$.

Tato naše práce, kterou jsme do systému vložili, se zdánlivě ztratila. Pokud však přestaneme působit proti-silou, na těleso bude působit pouze silové pole, a to těleso urychlí, čímž mu předá kinetickou energii. A to je odpověď na naši otázku - odtud se tedy kinetická energie vezme.

$$\Delta T = \int -\vec{F}_{pole} \cdot d\vec{s} = - \int \vec{F}_{pole} \cdot d\vec{s}$$

Pokud tedy dovnitř pole umístíme těleso, má v sobě systém ukrytou energii - a pokud necháme pole působit, tato skrytá energie bude transformována na pohyb. Budeme jí říkat potenciální energie a značit ji V .

$$V = - \int \vec{F}_{pole} \cdot d\vec{s} \quad (23)$$

Ještě než začneme cokoliv počítat, je potřeba stanovit si, v jakých místech má těleso nulovou potenciální energii. Když se ptáme na potenciální energii v jiném místě, je potřeba vztahovat ji vůči tomuto referenčnímu bodu.

Vraťme se nyní k našim jednoduchým příkladům.

Příklad: Potenciální energie tělesa v homogenním gravitačním poli

Zkusme spočítat, jaká je potenciální energie určitého místa ve výšce h v homogenním gravitačním poli. Místo nulové potenciální energie si můžeme zvolit zcela libovolně. Nejlepší a nejmoc intuitivní bude zvolit místo na povrchu země. Pro jednoduchost se zatím budeme pohybovat pouze kolmo od povrchu země (později budou diskutovány i možnosti jiných trajektorií):

$$V = - \int \vec{F}_{pole} \cdot d\vec{s} = - \int_0^h \vec{F}_g \cdot d\vec{z} = - \int_0^h -mg\vec{e}_z \cdot d\vec{z} = mgh$$

Příklad: Potenciální energie tělesa v centrálním poli Země

Podobnou úlohu zkusme řešit v radiálním gravitačním poli Země. Kde položíme nulovou potenciální energii? V principu můžeme kdekoliv, my si zvolíme bod v nekonečnu. Budeme těleso přibližovat po přímce kolmo k Zemi na vzdálenost R od jejího středu (R je větší než poloměr Země).

$$V = - \int \vec{F}_{pole} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^R \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^R -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = -G \frac{mM}{R}$$

Záporné znaménko by nás nemělo děsit: pokud jsme nulovou potenciální energii umístili do nekonečna, je jasné, že těleso blíž k zemi potenciální energii menší (tedy zápornou).

Příklad: Pot. energie nabitého tělesa v elektrostatickém poli

Dalším příkladem pole, kde lze počítat potenciální energii tělesa, je pole elektrostatické. Uvažme, že těleso má náboj q a nachází se v elektrostatickém poli popsaném $E = E(\vec{r})$. Pak:

$$V = - \int \vec{F}_{pole} \cdot d\vec{s} = - \int q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Spočtěme postupně:

a) rovnoměrně nabitou sféru, tj. $\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon r^2} \vec{e}_r$. Vzdalujeme se od ní na vzdálenost d od jejího středu (přímo na sféře uměle dodefinujeme nulovou potenciální energii). Pak:

$$V_a = - \int q\vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_R^d q \frac{\sigma R^2}{\epsilon r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = q \frac{\sigma R^2}{\epsilon} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right)$$

b) rovnoměrně nabitou nekonečnou válcovou plochu, tj. $\vec{E} = \frac{\sigma R}{\epsilon r} \vec{e}_r$. Potenciální energii uměle definujeme přímo na této ploše. Opět se vzdalujeme z plochy po přímce kolmo k ose válce až na vzdálenost d od osy válce. Pak:

$$V_b = - \int q\vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_R^d q \frac{\sigma R}{\epsilon r} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = q \frac{\sigma R}{\epsilon} \ln \frac{R}{d}$$

c) rovnoměrně nabitou rovinu, tj. $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \vec{e}_z$. Nulovou hladinu potenciální energie definujeme přímo na této rovině. Vzdalujeme se na vzdálenost d od roviny (opět po přímce, kolmo od ní). Potom:

$$V_c = - \int q\vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_0^d \frac{\sigma}{2\epsilon} \vec{e}_z \cdot d\vec{z} = - \frac{\sigma}{2\epsilon} d$$

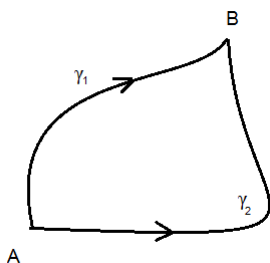
Příklad: Potenciální energie harmonického oscilátoru Zkusme ještě určit pot. energii harmonického oscilátoru ve vzdálenosti d od rovnovážné polohy. Nulovou hladinu potenciální energie definujeme přímo v rovnovážné poloze.

$$V = - \int \vec{F}_{pole} \cdot d\vec{s} = - \int_0^d -kz\vec{e}_z \cdot d\vec{z} = \frac{1}{2}kd^2$$

Nyní tedy víme, co to potenciální energie je a jak se dá (vůči danému referenčnímu bodu) v zadaném poli určovat. Na první pohled bychom mohli být spokojeni a tuto kapitolu už opustit. Nicméně bystré čtenáře jistě napadne tato

otázka: ve všech případech jsem se pohyboval pouze po přímce - tím jsem vynaložil určitou práci W a přesně o tuto hodnotu vzrostla potenciální energie V . Ovšem co kdybych se pohyboval po jiné trajektorii? Tím by se mohlo změnit i množství práce W , které jsem musel vynaložit! Má tedy vůbec smysl zavádět pojem jako "potenciální energie"?

Vezměme si určité pole a v něm dvě různé trajektorie γ_1, γ_2 , jejichž počáteční bod je stejný a koncový bod taky. Při přesunu po křivce γ_1 budeme vykonáme práci W_1 proti silám pole. Podobně při přesunu po křivce γ_2 vykonáme práci W_2 . Je zjevné, že pokud $W_1 \neq W_2$, pak pojem jako "potenciální energie" nedává dobrý smysl. Potenciální energie tělesa vůči danému poli by už nebyla závislá pouze na místě, ale i na trajektorii, po níž se těleso dostalo od referenčního bodu.



Jak je možné, že dvě stejná tělesa mají stejný počáteční a koncový stav, ale při přesunu po jedné křivce jsem vykonal více práce, než při přesunu po jiné křivce? Kde by se ztrácela energie? Ve skutečnosti se energie neztratí, pouze se rozptýlí do prostředí (třeba jako neúčinná forma tepla, vznikající při tření o podložku).

My se budeme zajímat pouze o taková silová pole, ve kterých k podobným ztrátám energie nedochází - kde se energie zachovává. Takovým polím budeme říkat konzervativní pole. Platí pro ně, že součet kinetické a potenciální energie systému musí být v každém okamžiku stejná, tj. $T + V = konst.$. Lze to napsat i jinak: $\Delta T = -\Delta V$, což má význam, že kinetická energie systému vzroste právě o tolik, o kolik poklesne potenciální energie.

Jak si takový systém představit? Uvažme například jednoduché kyvadlo s nehmotným závěsem. Položme potenciální energii rovnou nule v místě, kde je nejnižší bod kyvadla (rovnovážná poloha). Takové kyvadlo se vyhoupne vždy do stejné výšky ($V = max., T = 0$). A když prochází nejnižším bodem, má vždy stejnou rychlost ($V = 0, T = max.$). Důvodem je fakt, že součet $T + V$ se nemění.

Nabízí se přirozená otázka: jak o daném silovém poli rozhodnout, zda je konzervativní, či nikoliv? Zkusme tedy předpokládat, že pole je konzervativní a uvažme, že se s tělesem pohybujeme po uzavřené křivce γ . Protože je těleso na začátku i na konci pohybu ve stejném stavu, tak by celková vykonaná práce měla být nulová. (na části dráhy jsme konali práci my, na jiné části dráhy nám

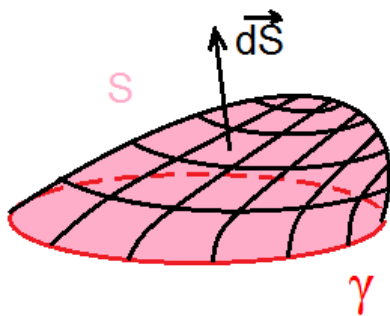
energii naopak vrátilo pole). Jinak by došlo k disipaci energie nebo k porušení zákona zachování energie. Mělo by tedy platit:

$$W_{my} = \oint_{\gamma} -\vec{F}_{pole} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (24)$$

Zde provedu trochu "podvod" a zbaběle se odkážu na Stokesovu větu vektorové analýzy, aniž bych provedl její důkaz. Podle ní pro každé vektorové pole $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a pro každou plochu S s hraniční křivkou γ platí následující identita:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

kde symbol $d\vec{S}$ značí diferenciální element plochy ve směru normály k ploše S (naměřený směrem ven z plochy). Na plochu S jsou kladeny nároky, aby byla jednoduše souvislá, dostatečně hladká a aby sama sebe neprotínala.



Stručně řečeno, díky Stokesově větě můžeme vztah (24) přepsat na:

$$W_{my} = \int_S -(\nabla \times \vec{F}_{pole}) \cdot d\vec{S} = 0$$

Má-li být silové pole konzervativní, musí poslední rovnice platit pro trajektorie křivky γ a pro všechny příslušné plochy S , což lze splnit, jen pokud

$$\nabla \times \vec{F}_{pole} = \vec{0}$$

neboli po složkách

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = (0, 0, 0)$$

Jedná se vlastně o trojici podmínek:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (25)$$

Pokud je pole konzervativní, musí tyto tři vztahy platit. A naopak: pokud vztahy platí, pole je nutně konzervativní. Máme tedy poměrně jednoduchý recept, jak zjistit, zda je pole konzervativní, či nikoliv.

Příklad: Ověření, zda Newtonovské gr. pole je potenciálové

Máme ověřit, zda je gravitační pole potenciálové. Vezměme jeho předpis: $\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$. Vidíme, že abychom mohli ověřit, zda naše trojice podmínek platí, budeme si muset tento vztah převést do kartézských souřadnic. To není příliš těžké provést: ve jmenovateli se zbavíme r^2 takto: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Dále radiální jednotkový vektor \vec{e}_r můžeme rozložit do kartézských složek jako $\vec{e}_r = \frac{x}{r} \vec{e}_x + \frac{y}{r} \vec{e}_y + \frac{z}{r} \vec{e}_z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \vec{e}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \vec{e}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \vec{e}_z$. Tohle všechno tedy dosadíme, abychom se zbavili radiální závislosti a dostali působení gravitačního pole v souřadnicích x, y, z :

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = \left(-G \frac{mMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -G \frac{mMy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -G \frac{mMz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Pokud si dáme tu práci a dosadíme do (25), uvidíme, že všechny tři vztahy jsou splněny. Skutečně - gravitační pole je polem konzervativním! Podobně všechna ostatní pole, která jsme v této kapitole uváděli - není nic těžkého to ověřit.

Uvažme nějaké silové konzervativní pole a objekt, který se v něm může pohybovat. Pro takové pole jistě platí, při přesunu z bodu A do bodu B nezávisí na konkrétní dráze, po které se vydám. Lze tedy jednoznačně definovat něco, čemu říkáme potenciální energie V . Představme si nyní, že není znám předpis pro silové působení, ale místo toho je zadáno, jaká je potenciální energie daného tělesa v každém bodě prostoru. Jinými slovy: bude známa funkce $V = V(\vec{r})$. Lze odtud určit, jak vypadá explicitní předpis pro silové působení $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$? Odpověď zní ano, a je dána velmi jednoduchým vzorcem:

$$\vec{F} = -\nabla V \tag{26}$$

Pravou stranu můžeme rozepsat podle vztahu (23):

$$-\nabla V = -\nabla \left(- \int F_x dx + F_y dy + F_z dz \right) = \nabla \int F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Integrál a gradient jsou vzájemně zaměnitelné. Aplijeme-li gradient na součet uvnitř integrálu, dostaneme:

$$-\nabla V = \left(\int \frac{\partial F_x}{\partial x} dx + \frac{\partial F_y}{\partial x} dy + \frac{\partial F_z}{\partial x} dz, \int \dots, \int \dots \right)$$

Protože je pole konzervativní, platí podmínky (22), a tedy můžu parciální derivace v předchozím vztahu nahradit:

$$-\nabla V = \left(\int \frac{\partial F_x}{\partial x} dx + \frac{\partial F_x}{\partial y} dy + \frac{\partial F_x}{\partial z} dz, \int \dots, \int \dots \right)$$

Avšak integrand u prvního integrálu není nic jiného, než totální diferenciál dF_x . Podobně druhý a třetí integrand jsou ve skutečnosti totální diferenciály dF_y, dF_z . Máme tedy:

$$-\nabla V = \left(\int dF_x, \int dF_y, \int dF_z \right)$$

Každou ze složek vektoru lze zvlášť vyintegrovat:

$$-\nabla V = (F_x, F_y, F_z) = \vec{F}.$$

Tím jsme výchozí vztah dokázali!

Příklad: Určení silového působení na objekt na základě znalosti jeho potenciální energie v silovém poli

Zkusme nyní tento jednoduchý vztah aplikovat třeba na příklad elektrostatického pole rovnoměrně nabitě nekonečné válcové plochy. Uvažme nabitě těleso o náboji q s potenciální energií, která je vně válcové plochy definovaná vztahem $V = q \frac{\sigma}{\epsilon} R \ln \frac{R}{d}$, kde d je vzdálenost od osy z , R je poloměr válcové plochy. Jak odtud určit silové působení $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ na tento nabitý objekt?

Pokud neumíme počítat gradient v křivočarých souřadnicích, je potřeba si předpis převést do souřadnic kartézských. Na to nám stačí si uvědomit, že $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, a tedy

$$V = q \frac{\sigma}{\epsilon} R \ln \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Příslušná elektrostatická síla se spočítá podle vztahu (23) jako:

$$\vec{F} = -\nabla V = -\nabla \left(q \frac{\sigma}{\epsilon} R \ln \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Po příslušném zderivování a algebraické úpravě:

$$\vec{F} = \left(q \frac{\sigma}{\epsilon} R \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad q \frac{\sigma}{\epsilon} R \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad 0 \right)$$

Vevnitř vidíme opakující se výraz $x^2 + y^2$, o kterém ale víme, že lze přepsat jako d^2 . Nic nám nebrání vytknout všechny konstanty z vektoru:

$$\vec{F} = q \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{R}{d^2} (x, y, 0)$$

Pokud chceme, můžeme si ještě uvědomit, že v cylindrických souřadnicích je vektor $(x, y, 0)$ totožný s vektorem $d \cdot \vec{e}_r$:

$$\vec{F} = q \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{R}{d} \vec{e}_r$$

12 Hamiltonův princip nejmenší akce

Základním problémem variačního počtu je extremalizovat funkcionály - tj. hledat takovou křivku $y = y(x)$, pro níž číslo $I = \int F(x, y, y') dx$ bude (lokálně) co nejmenší/největší. Proč potřebujeme takovou úlohu řešit? Motivace mohou být v principu dvě různé:

1) V konstrukci určitého experimentu máme volnou ruku. Každý experiment ale něco "stojí". A když už vynakládáme prostředky pro jeho realizaci, chtěli bychom z toho vytěžit maximum. Proto je výhodné, abychom nějakou situaci geometricky uspořádali tak, aby nějaká veličina byla co nejmenší/největší. Naše motivace je zde tedy pouhá optimalizace.

2) Příroda samotná se chová tak, že nějakou veličinu extremalizuje. V takovém případě nemáme volnou ruku - daný jev nastane právě jedním způsobem. My si sice můžeme v hlavě představit desítky jiných způsobů, jak by situace mohla proběhnout, jenže příroda není povinná řídit se podle našich představ. Na druhou stranu je to pro nás jistá výhoda - příroda daný jev provádí spontánně sama, my se nemusíme snažit. Pokud příroda určitou veličinu extremalizuje, dává nám to do rukou možnost, jak předpovídat její chování. Naše motivace je zde tedy předpověď jevů, které spontánně probíhají samy.

Připomeňme si určité příklady z obou možností:

1, a) Problém královny Dido, která zakládala Kartágo - její snaha ohraničit město tak, aby při dané délce hranice zaujímalo město co největší plochu.

1, b) Problém brachystochrony - snaha postavit dráhu takovou, aby po ní kulička sjela z bodu A do bodu B co nejrychleji.

V obojím případě šlo o umělé požadavky, které jsme kladli ve snaze něco optimalizovat. Nebylo to něco, co by se dělo samozřejmě, spontánně.

2, a) Bubliny tvořené z mýdlových blan zaujímají přirozeně takový tvar, aby jejich povrchové napětí bylo co nejmenší. To nastane tehdy, pokud povrch bubliny je minimální. Pokud tedy chceme vědět, jak bublina bude vypadat, musíme si v hlavě představit všechny možné bubliny a z nich vybrat tu, která má minimální povrch.

2, b) Fermatův princip - světelné paprsky se šíří tak, že pokud letí z bodu A do bodu B, urazí tuto dráhu za nejkratší možnou dobu. Pokud tedy chceme předpovědět, jak se světlo bude chovat, představíme si všechny možné dráhy, kudy by hypoteticky mohl paprsek letět, a vybereme tu, kde je doba letu paprsku nejmenší.

V obou těchto příkladech se vlastně snažíme předpovědět, jak určitá fyzikální situace bude vypadat.

Základním úhelným kamenem celé fyziky je mechanika. Představme si, jak mocný nástroj bychom měli k předpovídání nejrůznějších fyzikálních dějů, kdy-

bychom našli nějakou univerzální veličinu, kterou se příroda snaží extremalizovat! Mnozí vědci se snažili právě takovou veličinu najít. Abych se přiznal, kdybych žil v době těchto lidí, přišlo by mi jejich snažení trochu jako utopie. O to víc mě překvapuje, že taková veličina se skutečně našla! Říká se jí akce. Definujme ji nejprve jen velmi abstraktně, aniž by měla nějakou přímou souvislost s fyzikou. Bude se jednat o pouhý matematický konstrukt.

Uvažme tedy objekt v silovém poli s nějakou počáteční rychlostí. Zajímá nás, co se s objektem bude v tomto poli dít, jak se bude pohybovat - hledáme určitou předpověď. A priori předpokládáme, že objekt si pro pohyb vybere takovou trajektorii, na které se bude extremalizovat nějaká veličina. Označme si tedy tuto novou veličinu "S" a říkejme jí akce.

$$S = \int L dt$$

L je zde nějaká obecná funkce, jejíž konkrétní tvar se liší pro různé trajektorie. Je ovšem dobré ujasnit si, na čem tato funkce L bude záviset. Uvažme pro jednoduchost jako náš prostor, v němž se pohyb bude odehrávat, jako pouhou přímku. Později úvahy provedeme i ve více dimenzích, ale zatím se držme "při zemi".

Odvození Lagrangeovy funkce pro jednorozměrný pohyb

Na přímce je určitým způsobem rozloženo silové pole a nás zajímá, jak se objekt bude pohybovat - po jaké trajektorii?

Zde se rozumný člověk zamyslí a asi si řekne: proboha, co tady řešíme? Pokud náš prostor je přímka, tak je zřejmé, že trajektorií objektu bude přímka!

Zde bych chtěl upozornit na jednu důležitou věc: pod pojmem trajektorie si nepředstavujeme jenom konkrétní geometrickou dráhu, ale taky i informaci o tom, v kterém čase se objekt na ní kde nacházel. Představíme-li si pohyb po přímce, i ten lze provést mnoha způsoby. Třeba volný pád se určitě liší od rovnoměrného přímočarého pohybu, přestože se oba objekty pohybují po stejné přímce.

Naše funkce L tedy asi bude záviset jednak na čase, jednak na souřadnici na této přímce (označíme si ji x). Dokonce povolíme ještě i závislost na rychlosti objektu v daném místě - závislost na $x' = \frac{dx}{dt}$. Víme tedy, že $L = L(t, x, x')$.

Máme tedy nějakou abstraktní veličinu, zvanou jako "akci", která je definovaná záhadným předpisem

$$S = \int L(t, x, x') dt \tag{27}$$

Záhadná je zejména v tom smyslu, že pod funkcí L si neumíme představit nic moc konkrétního. Je to nějaká abstraktní funkce, která se liší pro každé konkrétní silové pole a pro každou trajektorii v něm zvolenou. Jak by něco tak abstraktního mohlo popisovat všechny různorodé jevy v klasické mechanice?

Pokud to bude fungovat, bude se to jevit skoro jako zázrak. Zkusme tedy na chvíli předpokládat, že vesmír z nějakých pro nás zatím záhadných důvodů chce minimalizovat akci. Zkusme tomu věřit a podívejme se, co by z toho vyplývalo a zde by něco takového mohlo být vůbec v souladu se starými dobrými pohybovými zákony Isaaca Newtona.

Matematicky vzato se nejedná o nám neznámý úkol: chceme extremalizovat funkcionál (27), kde uvnitř integrálu je funkce $L = L(t, x, x')$ s nezávislou proměnnou t a závislou proměnnou x . Musí tedy platit Euler-Lagrangeova rovnice:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) = 0$$

neboli

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) \quad (28)$$

Pokud tato rovnice má popisovat chování něčeho reálného, musí být v souladu s Newtonovy zákony pohybu. Zkusme tedy onu slavnou rovnici $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ nahlédnout v předchozím vztahu.

- Pokud člen vlevo má být skutečně síla \vec{F} , lze určitě přepsat do podoby $-\frac{\partial V}{\partial x}$. Integrací zjistíme, že záhadná funkce L by tedy měla být tvaru $L = -V + c$, kde c by nemělo explicitně záviset na x .
- Na pravé straně bychom zase rádi viděli člen $\frac{d}{dt}\vec{p}$. Hodilo by se tedy ztotožnit $\vec{p} = mx' = \frac{\partial L}{\partial x'}$. Po integraci zjistíme, že $L = \frac{1}{2}mx'^2 + d = T + d$. Funkce L by teda měla být tvaru $T + d$, kde d by nemělo explicitně záviset na x' .
- Zkusme spojit dvě předchozí úvahy a říct, že $L = T - V$. Protože $T \neq T(x)$, $V \neq V(x')$, uvedená funkce vyhovuje.

Pro jednorozměrný pohyb jsme tedy v kartézských souřadnicích našli integrand L uvnitř funkcionálu akce. Pro jakýkoliv pohyb po přímce tedy umíme najít pohybové rovnice tím, že se budeme snažit minimalizovat hodnotu akce $S = \int L(t, x, x')dt$, kde hodnotu L určíme jako $T - V$.

Odvození Lagrangeovy funkce pro třírozměrný pohyb v kartézských souřadnicích

Pochopitelně, pohyb po přímce není příliš zajímavý a ani zdaleka nevyčerpává bohatost a rozmanitost všech jevů, které se mohou odehrávat. Proto budeme chtít tento vztah zobecnit. Zkusme nyní přejít do trojrozměrného světa. Řekněme tedy, že máme třeba pohybující se částici podrobenou silovému působení jistého konzervativního pole (třeba gravitačního, elektrostatického, ...). A zajímá nás, jak se tato částice bude pohybovat. Naše hypotéza zní, že se bude pohybovat tak, aby akce

$$S = \int L(t, x, x', y, y', z, z')$$

byla minimální. A pokud to tak opravdu je, jaké závislosti $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ bychom měli zvolit? Představme si na chvíli, že zafixujeme závislosti $y = y(t), z = z(t)$ a ponecháme volnost pouze ve výběru závislosti $x = x(t)$. Přitom tato volnost zde opravdu zůstane, protože jak jsme řekli - poloha částice ve všech třech osách je navzájem nezávislá a neexistuje mezi nimi žádná vazbová podmínka. Jakou funkci $x = x(t)$ zvolit, aby akce byla minimální?

Zjevně musíme opět řešit rovnici (28). Otázka zní, pro jakou funkci L je požadavek minimálnosti funkce ekvivalentní s Newtonovými pohybovými zákony? Zkusme si tipnout a vzít (stejně jako minule) funkci $L = T - V$.

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial x'} - \frac{\partial V}{\partial x'} \right)$$

Abychom zjistili, zda tento vztah platí, musíme si vzpomenout na vzorce pro potenciální a kinetickou energii. V minulých dvou kapitolách jsme odvodili, že:

- Pro potenciální energii platí vztah $\nabla V = -\vec{F} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -F_x, \frac{\partial V}{\partial x'} = 0$.
- Pro kinetickou energii zase $T = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x'} = mx', \frac{\partial T}{\partial x} = 0$.

Po dosazení do předchozího vztahu vidíme, že:

$$F_x = \frac{d}{dt} mx' = mx''$$

To je však Newtonův zákon pro x -ovou složku. Na začátku našeho odvozování jsme řekli, že pohyb ve všech složkách je naprosto nezávislý - tudíž stejný výsledek dostaneme i pro ostatní složky. Soustava rovnic

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} \right),$$

pro funkci $L = T - V$ vede k nalezení pohybových rovnic a tento postup je naprosto ekvivalentní s použitím Newtonova zákona síly.

Odvození Lagrangeovy funkce pro třírozměrný pohyb ve zobecněných souřadnicích - bez závislosti na čase

Teď, když víme, že jak extremalizovat akci vyjádřenou v kartézských souřadnicích, budeme chtít totéž provést v souřadnicích zobecněných. Počet zobecněných souřadnic může být libovolný - řekněme, že to jsou souřadnice q_1, q_2, \dots, q_n . Mějme tedy akci

$$S = \int L(t, q_1, q_2, \dots, q_n, q'_1, q'_2, \dots, q'_n) dt$$

a tu se snažme minimalizovat. Protože po zobecněných souřadnicích požadujeme, aby byly nezávislé, tak hledané závislosti $q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_n = q_n(t)$ považujeme též za nezávislé - nemám mezi nimi žádnou vazbu. Při extremalizaci tedy můžeme postupovat tak, že všechny závislosti přikážu kromě jedné konkrétní $q_m = q_m(t)$. A pro tuto jednu souřadnici se budu snažit provést extremalizaci výběrem vhodné závislosti. Použiju opět (ne překvapivě) Euler-Lagrangeovu rovnici:

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_m} \right)$$

Nesmíme pouštět ze zřetele fyziku: tato rovnice by měla být v nějakém smyslu rovnocenná s Newtonovým zákonem síly - a to by rozhodně neplatilo pro každou funkci L . Výběr $L = T - V$ v kartézských souřadnicích fungoval, a jak si hned ukážeme, bude fungovat i ve zobecněných! Dosadme a podívejme se, co z rovnice plyne:

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial q_m} - \frac{\partial V^{(2)}}{\partial q_m} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^{(3)}}{\partial q'_m} - \frac{\partial V^{(4)}}{\partial q_m} \right) \quad (29)$$

Upozorňujeme, že indexy v závorkách zde zavádíme pro pozdější lepší orientaci. Kvůli kompaktnějšímu zápisu přeznačme $x \rightarrow x_1, y \rightarrow x_2, z \rightarrow x_3$. Než začneme cokoliv počítat, musíme si uvědomit, které veličiny závisí na kterých. Podíváme-li se do předchozího vztahu, budeme derivovat podle zobecněných souřadnic, zobecněných rychlostí a času. Musíme si tedy uvědomit, co na nich závisí a co nezávisí.

- $x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$
- $x'_i = x'_i(q_1, q'_1, q_2, q'_2, \dots, q_n, q'_n)$

To, co nyní chceme udělat, je dokázat, že předchozí rovnost platí nezávisle na konkrétním silovém (konzervativním) poli a konkrétních souřadnicích. Určíme si tedy jednotlivé členy (1) až (4) v předchozím vztahu.

- Člen (1):

$$\frac{\partial T}{\partial q_m} = \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 x_i'^2 \right) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_m} (x_i'^2) = m \sum_{i=1}^3 x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_m} = m \sum_{i=1}^3 x_i' \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m} \right)$$

- Člen (2):

$$\frac{\partial V}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} = - \sum_{i=1}^3 F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m}$$

- Člen (3) bez časové derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_m'} &= \frac{\partial}{\partial q_m'} \left(\frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 x_i'^2 \right) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_m'} (x_i'^2) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_m'} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q_k' \right)^2 = \\ &= m \sum_{i=1}^3 \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q_k' \right) \frac{\partial}{\partial q_m'} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q_k' \right) \right) = m \sum_{i=1}^3 \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q_k' \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta_{km} \right) \right) = \\ &= m \sum_{i=1}^3 \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q_k' \right) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_m} \right) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_m} \end{aligned}$$

Tím pádem vychází člen (3):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_m'} \right) = m \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m} \right) x_i' + m \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_m} x_i''$$

- Člen (4):

$$\frac{\partial V}{\partial q_m'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial q_m'} \right) = 0$$

Členy (1) až (4) dosadíme do rovnice (29):

$$m \sum_{i=1}^3 x_i' \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m} \right) + \sum_{i=1}^3 F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} = m \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m} \right) x_i' + m \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_m} x_i''$$

První člen nalevo a napravo jsou stejné, mohu je tedy od obou stran rovnice odečíst:

$$\sum_{i=1}^3 F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} = m \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_m} x_i''$$

V této rovnici však mohu nahlédnout Newtonův zákon síly. Ten mohu ve složkách napsat jako $F_i = m x_i''$, což mohu přenásobit výrazem $\frac{\partial x_i}{\partial q_m}$ a posčítat přes $i = 1, 2, 3$. Tím dostanu přesně minulou rovnici.

Pokud se čtenář prokousal těmito nepříjemnými výpočty až sem, stojí za to shrnout, co jsme vlastně dokázali.

Na začátku jsme předpokládali, že máme akci tvaru

$S = \int L(t, q_1, q_1', q_2, q_2', \dots, q_n, q_n') dt$, což je z matematického hlediska funkcionál. Zafixovali jsme všechny vstupní funkce $q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_n = q_n(t)$ kromě jediné - kromě funkce $q_m(t) = q_m(t)$. A pak jsme hledali funkci $q_m = q_m(t)$ takovou, aby pro ni zmíněný funkcionál byl co nejmenší. A akce je minimalizována, jen pokud platí rovnice $\frac{\partial L}{\partial q_m} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m'} \right)$.

Dosud se jednalo o čistě matematické úvahy, nemající s mechanikou nic společného. Poté ale jakožto fyzici požadujeme, aby splnění této rovnice bylo ekvivalentní Newtonovu pohybovému zákonu. A nevíme, jaký tvar má naše záhadná funkce L mít, abychom tomuto požadavku dostáli. Naším tipem bylo zkusit $L = T - V$. A právě pro tuto volbu jsme ukázali, že náš fyzikální požadavek je splněn. Podobnou úvahu bychom mohli provést i pro jiné zobecněné souřadnice, než jenom pro m -tou souřadnici. Celkově tak máme n diferenciálních rovnic $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i'} \right)$ pro indexy $1, 2, \dots, n$.

Poznamějme, že jsme celou dobu předpokládali, že v převodu mezi souřadnicemi nevystupuje čas jako proměnná: $x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \neq x_i(t)$. Tento předpoklad nemusí být splněn, pokud uvážíme takové zobecněné souřadnice, které se vůči těm kartézským pohybují (například souřadnice spojené s rozjíždějícím se vlakem). V takovém případě by už neplatilo, že $x_i' = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q_k'$, což jsme použili v důkazu na místech označených $=_p$. Důkaz by už tedy nebyl platný. Ve skutečnosti by ale volba $L = T - V$ fungovala i pro takové souřadnice, jenom by důkaz musel být modifikován - muselo by se použít, že $x_i' = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial x_i}{\partial t}$.

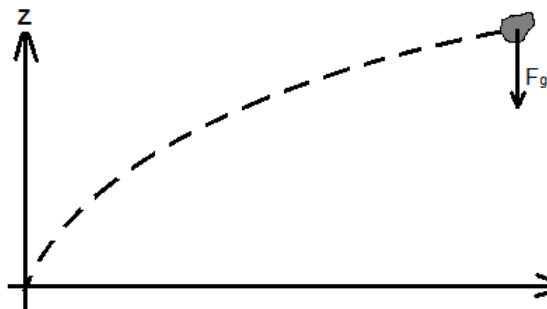
Pokud však převod mezi souřadnicemi nezávisí na čase, nezávisí na něm ani kinetická energie T . Protože pole je stacionární, musí i potenciální energie V být nezávislá na čase. Proto funkce $L = T - V$ též nezávisí na čase, a při minimalizaci akce je tedy možno použít Beltramiho identitu $L - q_i' \frac{\partial L}{\partial q_i'} = C$. V takovém případě říkáme, že systém má tzv. integrál pohybu.

Budeme odteď funkci L říkat Lagrangeova funkce nebo též lagranžián.

13 Hledání pohybových rovnic pomocí Hamiltonova variačního principu

Příklad: Pohyb kamenu v homogenním tíhovém poli

Zkusme si představit situaci, kdy někdo vyhodil z bodu $A[x_A, y_A, z_A]$ kámen, který se pohybuje v homogenním tíhovém poli a za dobu T doletěl do místa $B[x_B, y_B, z_B]$. Zajímalo by nás, po jaké trajektorii se pohyboval.



V této konkrétní úloze se vyplatí pracovat v kartézských souřadnicích. Navíc si všimněme, že bez újmy na obecnosti můžeme říct, že $y_A = y_B = 0$ a úlohu převést na dvourozměrnou.

Abychom mohli sestavit pohybovou rovnici, musíme určit kinetickou energii T a potenciální energii V letícího kamenu. Kinetická energie je daná výrazem $T = \frac{1}{2}m(x'^2 + z'^2)$, zatímco potenciální energie je v homogenním tíhovém poli rovna $V = mgz$. Odtud můžeme určit Lagrangeovu funkci:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(x'^2 + z'^2) - mgz$$

Teď už můžeme sestavit dvě Lagrangeovy pohybové rovnice:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}(mx') \Rightarrow 0 = x''$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} \right) \Rightarrow -mg = \frac{d}{dt}(mz') \Rightarrow -g = z''$$

Dvojitou integrací těchto dvou pohybových rovnic získáme explicitní závislost x a z na čase:

$$x = \alpha t + \beta \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + \gamma t + \delta$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou zatím neznámé integrační konstanty. Vyjádříme-li z prvního vztahu $t = \frac{x-\beta}{\alpha}$ a dosadíme do druhého vztahu, dostaneme z vyjádřené explicitně pomocí x , a tedy tvar trajektorie:

$$z = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x-\beta}{\alpha} \right)^2 + \gamma \left(\frac{x-\beta}{\alpha} \right) + \delta$$

To je evidentně kvadratická závislost vzhledem k x , takže kámen se pohybuje po parabolické trajektorii. Musíme však ještě najít vhodné konstanty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, aby byly splněny okrajové podmínky úlohy. Víme, že v čase $t = 0$ je poloha kamenu $[x_A, z_A]$, zatímco v čase $t = T$ je jeho poloha $[x_B, z_B]$. Odtud tedy získáme dvě podmínky pro každou souřadnici:

$$x_A = \beta \quad x_B = \alpha T + \beta$$

$$z_A = \delta \quad z_B = -\frac{1}{2}gT^2 + \gamma T + \delta$$

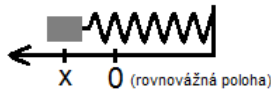
Z těchto rovnic můžeme zjistit hodnotu integračních konstant:

$$\alpha = \frac{x_B - x_A}{T}, \quad \beta = x_A, \quad \gamma = \frac{z_B - z_A}{T} + \frac{gT}{2}, \quad \delta = z_A$$

Tím je úloha zcela vyřešená.

Příklad: Kmitání lineárního harmonického oscilátoru

Další problém, který budeme řešit, je pohyb lineárního harmonického oscilátoru, jehož silové působení je dáno vztahem $\vec{F} = -kx$, kde k je nějaká konstanta (pokud je oscilátorem pružina, nazývá se toto číslo tuhost pružiny). Uvažme, že v čase $t = 0$ se oscilátor nachází v poloze x_A , v čase $t = T$ se oscilátor nachází v poloze x_B . Naším úkolem je zjistit, jak se v závislosti na čase oscilátor pohyboval.



Potenciální energii spočteme jako $V = -\int F dx = -\int (-kx) dx = \frac{1}{2}kx^2$ (integrační konstantu zde psát nebudeme, neb nemá fyzikálně žádný velký význam, jedná se jen o posouvání nulové hladiny energie). Kinetická energie se spočte jako $T = \frac{1}{2}mx'^2$. Odtud můžeme sestavit Lagrangeovu funkci:

$$L = T - V = \frac{1}{2}mx'^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Toto dosadíme do Lagrangeovy rovnice a získáme pohybovou rovnici pro harmonický oscilátor:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) \Rightarrow -kx = \frac{d}{dt}(mx') \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Charakteristický polynom pro takovou diferenciální rovnici je $\lambda^2 + \frac{k}{m}$ a jeho kořeny jsou ryze imaginární čísla $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}i$. Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic tedy vidíme, že

$$x_1 = \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad x_2 = \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

a obecné řešení $x = x(t)$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinace:

$$x(t) = \alpha \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \beta \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

V tomto tvaru je funkce naprosto obecná a mohli bychom s ní být spokojeni. Ve skutečnosti však můžeme nahlédnout, že tato superpozice dvou goniometrických funkcí lze ve skutečnosti zredukovat na jedinou goniometrickou funkci, která má určitou fázi. Jak to provedeme? Nejprve vytkneme faktor $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$:

$$x(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

Všimněme si, že teď pre-faktory u sinu a cosinu dávají v součtu kvadrátů číslo 1, jsou tedy nanormované. Teď mohou zavést substituci:

$$\cos \varphi_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \Rightarrow \sin \varphi_0 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Tuto substituci dosadíme do předchozího vztahu:

$$x(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\cos \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \sin \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

Ze součtových vzorců pak:

$$x(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0 \right)$$

Vidíme tedy, že pohyb harmonického oscilátoru je dán posunutou funkcí sinus. Koeficient $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ má roli maximální výchylky A , zatímco výraz $\sqrt{\frac{k}{m}}$ roli úhlové frekvence ω . Pohybová rovnice pak přejde do známého tvaru:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Poslední věc, kterou bychom měli určit, jsou neznámé konstanty α, β . Ty pochopitelně určíme z okrajových podmínek, že v čase $t = 0$ byl oscilátor v poloze x_A , v čase $t = T$ byl oscilátor v poloze x_B :

$$x_A = \beta \quad x_B = \alpha \sin \sqrt{\frac{k}{m}} T + \beta \cos \sqrt{\frac{k}{m}} T$$

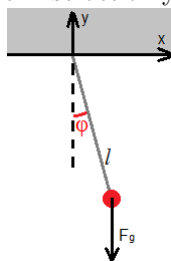
Odtud vyjádříme α, β :

$$\alpha = \frac{x_B}{\sin \sqrt{\frac{k}{m}} T} - \frac{x_A}{\tan \sqrt{\frac{k}{m}} T} \quad \beta = x_A$$

Tím je úloha zcela vyřešena.

Příklad: Pohyb kyvadla v homogenním tíhovém poli

Jako další úlohu zkusme vyřešit pohyb rovinného kyvadla (tj. takové, které kmitá v jedné rovině). Řekněme, že kyvadlo má hmotnost m a je zavěšeno na nehmotném závěsu o délce l . Pohyb probíhá v homogenním tíhovém poli. Předpokládejme, že na začátku v čase $t = 0$ bylo kyvadlo v bodě A , po určitém čase T se octlo kyvadlo v poloze B . Úkolem je určit, jak přesně se pohybovalo.



Především bude vhodné si zavést vhodné souřadnice. Počátek souřadnic zavedeme do místa, kde je bod závěsu, a osu y orientujeme proti gravitačnímu působení. Kyvadlo má pouze jeden stupeň volnosti - k popisu jeho pohybu by tedy měla stačit jediná zobecněná souřadnice. V tomto případě je výhodné si jako tuto souřadnici zvolit orientovaný úhel φ , který je svíráán závěsem a osou y (směrem doprava od osy y ho budeme brát jako kladný). Převod mezi souřadnicemi kartézskými a úhlovými zjistíme z obrázku:

$$x = l \sin \varphi \quad y = -l \cos \varphi$$

Abychom určili kinetickou energii kyvadla $T = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2)$ ve zobecněných souřadnicích, budeme muset naše souřadnice nejdříve zderivovat podle času:

$$x' = l \cos \varphi \varphi' \quad y' = -l \sin \varphi \varphi'$$

Odtud tedy víme, že kinetická energie kyvadla je v úhlových souřadnicích rovna $T = \frac{1}{2}ml^2\varphi'^2$. Potenciální energie v homogenním gravitačním poli je rovna $V = mgy$, což převedeme obratem do úhlových souřadnic: $V = -mgl \cos \varphi$. Protože už máme T i V v úhlových souřadnicích, můžeme sestavit Lagrangeovu funkci:

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\varphi'^2 + mgl \cos \varphi$$

Odtud už je jen krok k sestavení Lagrangeových pohybových rovnic:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi'} \right) \Rightarrow -mgl \sin \varphi = \frac{d}{dt} (ml^2 \varphi') \Rightarrow \varphi'' + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Poslední diferenciální rovnice se analyticky řeší jen velmi těžko. Proto se zpravidla zavádí zjednodušení, že Taylorův rozvoj $\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$ se vezme pro malé úhly φ vezme jen do prvního řádu, tj. $\sin \varphi \approx \varphi$. Dostaneme:

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

To je ale rovnice po formální stránce naprosto stejná, jako byla rovnice harmonického oscilátoru. Okamžitě tedy víme její řešení:

$$\varphi = \alpha \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t + \beta \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t$$

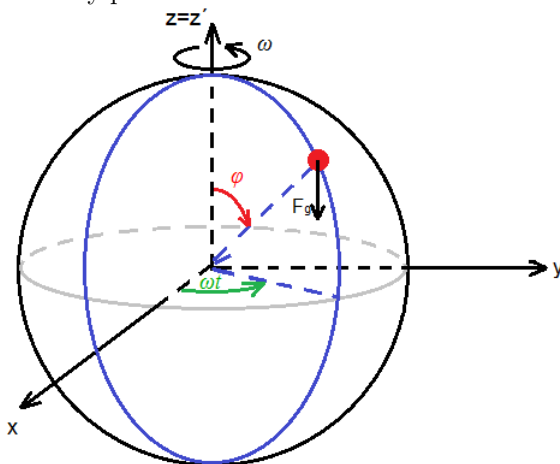
kde konstanty α, β by šly určit z počátečních podmínek. Pokud označíme φ_A, φ_B úhlovou souřadnici počáteční, respektive konečné polohy, tak by vyjádření konstant vypadalo takto:

$$\alpha = \frac{\varphi_B}{\sin \sqrt{\frac{g}{l}}T} - \frac{x_A}{\tan \sqrt{\frac{g}{l}}T} \quad \beta = x_A$$

Nicméně vzhledem k aproximativnímu charakteru řešení je i tyto okrajové podmínky potřeba brát jen přibližně.

Příklad: Pohyb kuličky navlečené na rotující kruhové obruči v homogenním tíhovém poli

Poslední příklad, na kterém demonstrujeme použití Hamiltonova principu, je pohyb kuličky navlečené na kruhové obruči, která se otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω . Osa, kolem které se obruč otáčí, je orientována ve směru (homogenního) tíhového pole, v němž se celý systém nachází (viz obrázek). Pro jednoduchost budeme předpokládat, že nedochází ke tření. Úkolem je určit pohyb kuličky po obruči v závislosti na čase.



Nejprve bychom měli vhodně zavést souřadnice. Bude výhodné souřadný systém $Oxyz$ umístit tak střed obruče splývá se středem souřadnic a osa z splývá s osou otáčení.

Přece jen však kartézské souřadnice nejsou příliš "šity na míru", chceme-li parametrizovat pohyb po otáčející se kruhové obruči. Kartézské souřadnice jsou tři, ale při pohybu mám k dispozici pouze jeden stupeň volnosti. Bude tedy výhodné přejít k nějakým zobecněným souřadnicím. Zavedeme-li úhlovou souřadnici φ jako na obrázku, vidíme, že se perfektně pro popis pohybu hodí.

Pochopitelně je snadné zavést nějaké souřadnice, ale vždy musíme být schopní najít převod mezi nimi a kartézskými souřadnicemi - jinak nebudeme schopní vyjádřit Lagrangeovu funkci v těchto nových souřadnicích. Naštěstí v tomto případě převody skutečně existují:

$$x = R \sin \varphi \cos \omega t \quad y = R \sin \varphi \sin \omega t \quad z = R \cos \varphi$$

Abychom nyní mohli vyjádřit kinetickou energii T , je potřeba zjistit nejdřív všechny kartézské komponenty rychlosti x', y', z' . Toho dosáhneme zderivováním předchozích vztahů:

$$\begin{aligned} x' &= R\varphi' \cos \varphi \cos \omega t - R\omega \sin \varphi \sin \omega t \\ y' &= R\varphi' \cos \varphi \sin \omega t + R\omega \sin \varphi \cos \omega t \\ z' &= -R\varphi' \sin \varphi \end{aligned}$$

Odtud tedy můžeme dostat kinetickou energii T :

$$T = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{1}{2}mR^2(\varphi'^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi)$$

Potenciální energie kuličky je $V = mgz$. Po převodu do úhlových souřadnic máme:

$$V = mgR \cos \varphi$$

Odtud už snadno sestavíme Lagrangeovu funkci:

$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2(\varphi'^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi) - mgR \cos \varphi$$

Podle Hamiltonova principu je nyní naší snahou extremalizovat funkcionál $S = \int L(t, \varphi, \varphi')$. Protože ale Lagrangeova funkce L nezávisí explicitně na čase, je možno použít pro extremalizaci Beltramiho identitu.

$$L - \varphi' \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = C$$

Po dosazení:

$$\frac{1}{2}mR^2(\varphi'^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi) - mgR \cos \varphi - mR^2\varphi'^2 = C$$

Můžeme se pokusit odtud vyjádřit φ' , abychom mohli provést separaci proměnných:

$$\varphi' = \sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi - \frac{2g}{R} \cos \varphi - \frac{2C}{mR^2}}$$

Odtud můžeme separovat proměnné a vztah integrovat:

$$t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi - \frac{2g}{R} \cos \varphi - \frac{2C}{mR^2}}}$$

Tento integrál lze spočítat jen velmi těžko (i když by to pomocí v vhodných substitucí principiálně šlo) a vynaložená námaha by nestála za to. Navíc by pak ještě výslednou závislost $t = t(\varphi)$ bylo potřeba invertovat, abychom dostali hledaný vztah $\varphi = \varphi(t)$.

V tuto chvíli úlohu opustíme.

14 Hledání vázaných extrémů funkcí více proměnných

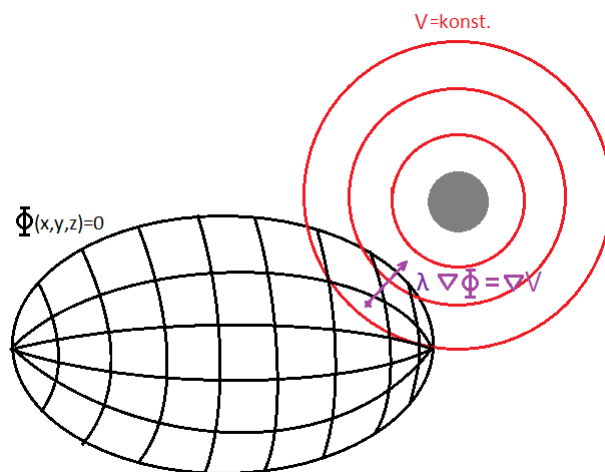
Čtenář už nyní dávno ví, že základním problémem variačního počtu je snaha extremalizovat funkcionály. Proč by nás teď najednou měly zajímat vázané extrémy funkcí více proměnných?

V tuto chvíli motivace vůbec není zřejmá! Poprosím čtenáře, aby jednu kapitolu vyčkal a neptal se "proč". Zatím od této otázky zbaběle uteču a řeknu prostě, že se jedná o jakousi přípravu před tím, než se vrhneme na řešení isoperimetrických úloh.

Představme si uzavřenou kovovou plochu a na ní malý náboj q . Plocha je umístěna do elektrostatického pole a potenciální energie náboje je popsána skalární funkcí $V = V(\vec{r})$. Řekněme, že nás zajímá, co se s nábojem bude dít. Je jasné, že náboj nemůže opustit vodič, bude tedy uvězněn na něm. Přemístí se tedy do místa s lokálně nejmenší potenciální energií a zůstane tam. Otázka zní, kde přesně to bude.

Z matematického hlediska se jedná o úlohu najít vázaný extrém funkce více proměnných. Potenciální energie V je funkcí tří souřadnic x, y, z . Nelze si však vybrat libovolnou trojici souřadnic, ale jen takovou, pro niž příslušný bod leží na zadané ploše. Samozřejmě je potřeba znát konkrétní tvar plochy - ten se zadá rovnicí $\Phi(x, y, z) = 0$.

Představme si například, že pole je sféricky symetrické podle nějakého bodu ležícího vně kovové plochy. Síločáry směřují od tohoto bodu. Na obrázku jsou červeně znázorněny ekvipotenciální plochy takového pole.



Ke každé hodnotě potenciální energie V (pro daný náboj q) existuje příslušná ekvipotenciální plocha. Zvolme nějakou ekvipotenciální plochu v blízkosti zdroje pole. Poté měňme spojitě hodnotu V , čímž ekvipotenciálu budeme "nafukovat". Pro určitou hodnotu V_{min} se ekvipotenciální plocha dotkne poprvé dotkne kovu.

Normála ke kovovému povrchu $\nabla\Phi$ má v tomto bodě stejný směr jako směr nejrychlejšího spádu potenciálu, tj. ∇V - jedno je násobkem druhého. Tuto rovnost můžeme schématicky vyjádřit tak, že řekneme, že existuje reálné číslo λ takové, že:

$$\nabla V(\vec{r}) = \lambda \nabla \Phi(\vec{r})$$

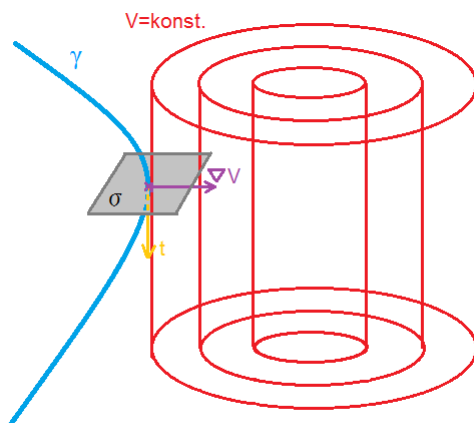
Tím jsme získali nutnou podmínku pro nalezení extrému funkce $V = V(\vec{r})$ podrobené vazbě $\Phi(\vec{r}) = 0$.

Úloha se nám tedy zredukovala takto: nalezni vektor \vec{r} a reálné číslo λ tak, aby platily vztahy:

$$\nabla V(\vec{r}) = \lambda \nabla \Phi(\vec{r}), \quad \Phi(\vec{r}) = 0$$

Zkusme úlohu zkomplikovat - řekněme, že funkce je podrobena ne jedné, ale rovnou dvěma vazbám - řekněme vazbám $\Phi_1(\vec{r}) = 0$ a $\Phi_2(\vec{r}) = 0$. Opět hledáme extrémální hodnoty funkce $V = V(\vec{r})$. Předpokládejme opět, že vazby mají charakter ploch, a navíc, že se tyto plochy protínají. Jejich průnikem bude nějaká křivka, pojmenujme ji γ . Hledáme tedy všechny lokální extrémy funkce V na této křivce.

Zkusme si situaci představit vizuálně. Místo kovové plochy $\Phi = 0$ teď máme kovový drát γ . Opět máme elektrostatické pole, které tvoří soustavu ekvipotenciálních ploch, pro každou hodnotu V jednu plochu. Zvolme velmi malou ekvipotenciální plochu (takovou, která neprotíná naši křivku γ). Poté ji "nafukujme" tím, že spojitě zvětšujeme hodnotu V , dokud se nedotkne našeho kovového drátu. V místě dotyku se zjevně nachází hledané potenciálové minimum.



V místě dotyku lze zavést vektor ∇V , mířící ve směru největšího spádu potenciálu, který je kolmý na ekvipotenciální plochu. Stejně tak lze v místě

dotyku zavést vektor tečný ke křivce γ , označme jej \vec{t} . Je zřejmé, že $\nabla V \perp \vec{t}$. Zavedeme-li v bodě dotyku rovinu σ kolmou k vektoru \vec{t} , pak

$$\nabla V \in \sigma \quad (30)$$

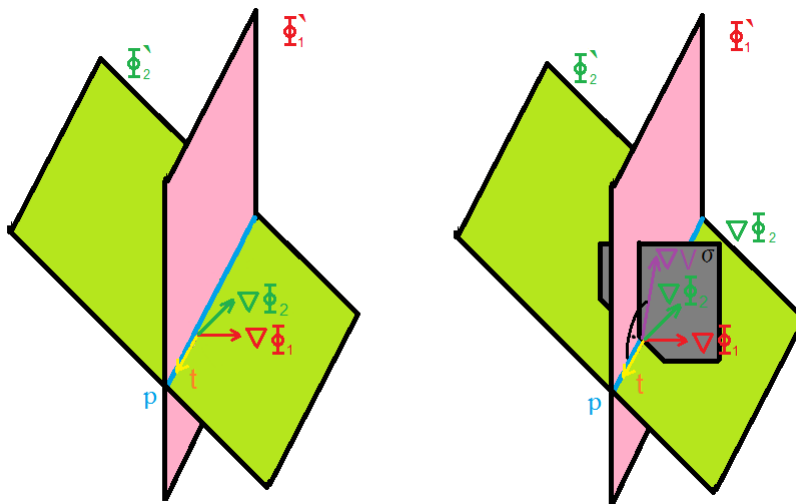
Bude potřeba se zamyslet, jak rovina σ vlastně souvisí s vazbami $\Phi_1 = 0, \Phi_2 = 0$. Zkusme si tedy představit, že máme dvě naprosto obecné plochy Φ_1, Φ_2 , které se protínají v křivce γ , tj.

$$\gamma := \Phi_1 \cap \Phi_2 \quad (31)$$

Rovina σ souvisí s určitou lokální kolmostí ke křivce γ . Proto v místě dotyku budeme obě vazby lokálně aproximovat tečnými rovinami. Označme tyto roviny Φ'_1, Φ'_2 . Chceme-li vyrobit normály k těmto rovinám, tak není nic snažšího než si vzít normály k samotným vazbám, tj. vektory $\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2$. Průnik vazeb - křivka γ - pak logicky bude aproximována průsečnicí rovin - přímkou. Označme tuto přímkou jakko p . V souladu s předchozím povídáním vidíme, že směrový vektor příčky p splyne s tečným vektorem \vec{t} ke křivce γ . Vztah (31) tedy lokálně přejde na:

$$p := \Phi'_1 \cap \Phi'_2 \quad (32)$$

Celá situace je shrnuta na obrázku vlevo. V předchozím povídání jsme zavedli rovinu σ jakožto kolmou na vektor \vec{t} . Nakresleme si tuto rovinu do obrázku i nyní - je dokreslena do obrázku vpravo.



Každý vektor ležící v σ lze zjevně nagenarovat jako lineární kombinace vektorů $\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2$. A protože vektor ∇V musí ležet v rovině σ - viz vztah (30) - tak zcela jistě lze i tento vektor nagenarovat pomocí $\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2$. Určitě tedy platí rovnost:

$$\nabla V(\vec{r}) = \lambda_1 \nabla \Phi_1(\vec{r}) + \lambda_2 \nabla \Phi_2(\vec{r}) \quad (33)$$

Celkově lze úlohu přeformulovat takto: chceme nalézt vektor \vec{r} a reálná čísla λ_1, λ_2 , aby byly splněny rovnice:

$$\nabla V(\vec{r}) = \lambda_1 \nabla \Phi_1(\vec{r}) + \lambda_2 \nabla \Phi_2(\vec{r}), \quad \Phi_1(\vec{r}) = 0, \quad \Phi_2(\vec{r}) = 0$$

Úlohu zkusme ještě dále zobecnit: představme si nyní, že naše funkce V už "nežije" v prostoru \mathbb{R}^3 , ale rovnou v \mathbb{R}^n . Dále si představme, že v tomto prostoru máme zadaných k vazeb $\Phi_1(\vec{r}) = 0, \Phi_2(\vec{r}) = 0, \dots, \Phi_k(\vec{r}) = 0$. A opět hledíme lokální extrémy podrobené všem těmto vazbám. Jak tuto úlohu řešit?

Pro naše účely se bude hodit, abychom zobecnili pojem gradientu 3-rozměrného prostoru ($\vec{r} = (x, y, z)$) na n -rozměrný prostor ($\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) způsobem

$$\nabla V := \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

Pak totiž lze vztah (33) lze zobecnit následujícím způsobem:

$$\nabla V(\vec{r}) = \lambda_1 \nabla \Phi_1(\vec{r}) + \lambda_2 \nabla \Phi_2(\vec{r}) + \dots + \lambda_k \nabla \Phi_k(\vec{r})$$

neboli zkráceně

$$\nabla V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla \Phi_i(\vec{r}) \quad (34)$$

To nám společně s vazbami $\Phi_1(\vec{r}) = 0, \Phi_2(\vec{r}) = 0, \dots, \Phi_k(\vec{r}) = 0$ dává soustavu jedné vektorové a k skalárních rovnic. Pokud si dáme tu práci a tuto soustavu vyřešíme, získáme neznámý vektor \vec{r} a neznámou k -tici čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, čímž úlohu vyřešíme.

Poznamenejme, že neznámým číslům $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ se říká Lagrangeovy multiplikátory.

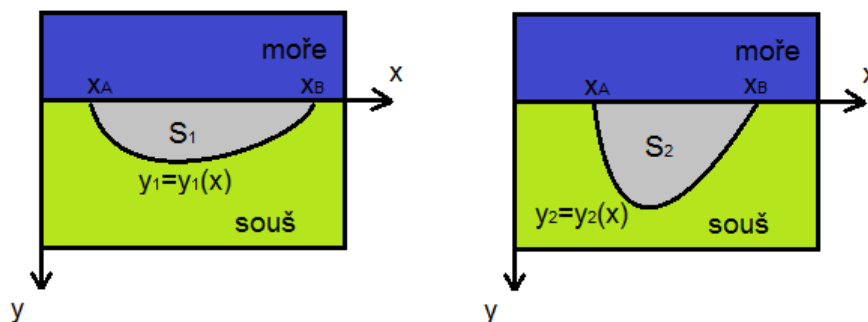
Dále bych chtěl, abychom si na tomto místě uvědomili jednu důležitou věc. Ač náš příklad spočíval původně v tom, že jsme hledali kartézské souřadnice bodu, kde se usídí náboj, tak ve skutečnosti jsme z ryze matematického hlediska vyřešili mnohem širší úlohu. Funkce $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nemusí totiž být považována pouze za závislost potenciální energie na poloze, ale za naprosto libovolnou funkci n reálných čísel, vůbec se nemusí jednat o kartézské souřadnice! Stejně tak vazby $\Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, \Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ se vztahují na tuto různorodou n -tici reálných veličin. Ano, v našem motivačním příkladě se jednalo o kartézské souřadnice. To však jen proto, abychom si naši metodu mohli hezky ilustrovat. Mám totiž za to, že v tomto případě nám geometrický vhled do situace výrazně ujednodušil snahu pochopit "podstatu věci", aniž bychom se utopili v matematických detailech. Jednalo se tedy o jakousi berličku. Každá berlička má však jen omezené využití a právě teď nadešla chvíle, abychom se

rozloučili s představou n -tice kartézských souřadnic a nahradili ji obecnou n -ticí čísel. Vektor \vec{r} pak budeme zkrátka vnímat jako tuto uspořádanou n -tici.

Matematicky korektnější odvození vztahu (30) najdeme například v knize Matematika pro fyziky od J. Kopáčka, popřípadě v knize Matematická analýza od V. Jarníka. Je třeba dodat, že aby odvození fungovalo, nesmí být vazbové podmínky degenerované (například že by splývaly, apod.).

15 Isoperimetrické úlohy s pevnými konci

Čtenář si jistě vzpomíná na zapeklitou úlohu královny Dido v 1. kapitole. Šlo v ní o to, abychom maximalizovali plochu města, byla-li zadána délka jeho hranice (na souši). Dva náhodné pokusy o volbu hranice jsou na tomto obrázku:



Úlohu jsme poněkud trikově sice vyřešili (řešením byla půlkružnice), ale přece jen bychom rádi měli zbraně, které nám umožní dostat se k řešení více systematicky. Úkolem této kapitoly bude tyto zbraně nalézt.

Připomeňme si formální zadání naší úlohy:

Hledáme dvě reálná čísla x_A, x_B a funkci $y = y(x)$ takovou, že:

$$1) s = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2} dx = L$$

$$2) S = \int_{x_A}^{x_B} y(x) dx = S_{max}$$

Abychom do řešení úlohy neskočili rovnou "po hlavě", zkusme pro jednoduchost teď ještě předpokládat, že čísla x_A, x_B jsou známá. Takovým úlohám budeme říkat úlohy s pevnými konci. Tím se situace trochu zjednodušila, nicméně úloha se stále jeví "nedobytně".

Samozřejmě se ale nechceme omezit jen na tuto jednu úlohu - rádi bychom uměli řešit mnohem širší spektrum úloh. Formulujme tedy teď úlohu trochu obecněji:

Pro dvě známá čísla x_A, x_B hledáme funkci $y = y(x)$ takovou, že:

$$1) K = \int_{x_A}^{x_B} E(x, y, y') dx = l$$

$$2) I = \int_{x_A}^{x_B} F(x, y, y') dx = I_{max} \text{ (nebo } I_{min})$$

To je obecná formulace isoperimetrických úloh s pevnými konci. Poznamenejme, že v naší konkrétní úloze máme $E(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$, $F(x, y, y') = y$.

Provedeme nyní trik a úlohu si hodně zjednodušíme: namísto spojitě diferencovatelné křivky $y = y(x)$ uvážme prostě jen poslupnost bodů $[x_0, y_0], [x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]$. Pro jednoduchost uvažme, že x -ové souřadnice těchto bodů

budou ekvidistantní (tj. $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{x_B - x_A}{n}$ pro všechna přípustná i). Dále samozřejmě musíme provést ztotožnění $[x_0, y_0] = A, [x_n, y_n] = B$. Tento postup diskretizace by nám měl být povědomý ze 3. kapitoly. Jistě tedy nepřekvapí, když si z téže kapitoly vypůjčím vztahy (4) a (5):

$$I = \sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, y'_k) \Delta x, \quad \text{kde } y'_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}$$

Když se nyní na úlohu podíváme, tak zjistíme, že už zde nemáme příliš mnoho proměnných, se kterými bychom mohli hýbat:

Hodnoty x_0, x_n jsou pevné díky fixaci krajních bodů A, B , zatímco x_1, x_2, \dots, x_{n-1} jsou pevné díky vlastnosti ekvidistantnosti.

Hodnoty y_0, y_n jsou pevné díky fixaci krajních bodů A, B . Hodnoty y_1, y_2, \dots, y_{n-1} jsou zatím proměnné. Ty tedy můžeme navolit libovolně. Tuto volbu nyní provedme.

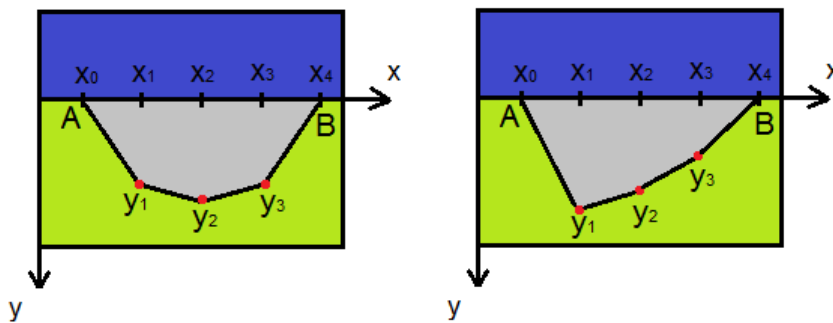
Hodnoty y'_1, y'_2, \dots, y'_n jsou pevné díky vztahu $y'_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}$ a díky tomu, že všechny hodnoty y_i už jsou zvolené.

Celkově tedy máme volnost už pouze ve volbě reálných čísel y_1, y_2, \dots, y_{n-1} . Odtud vyplývá, že funkcionály $K = \sum_{k=1}^n E(x_k, y_k, y'_k) \Delta x, I = \sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, y'_k) \Delta x$ (po diskretizaci vypadající jako sumy) jsou závislé pouze na těchto $n - 1$ číslech. Lze tedy psát:

$$K = K(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), \quad I = I(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$$

Jak tedy vypadá naše isoperimetrická úloha po diskretizaci? Hledáme takovou posloupnost libovolných reálných čísel $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, aby byla extremalizována funkce $I(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ za podmínky $K(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) - l = 0$.

Abychom si udělali trochu představu, co to znamená, zkusme zvolit třeba $n = 4$ a ilustrovat si to na problému Kartága. Naše vazbová podmínka $K(y_1, y_2, y_3) = l$ má v našem případě tvar $\sum_{k=1}^3 \sqrt{(\Delta x)^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = l$. Nemělo by nás to ani trochu překvapovat: ano, hranice města musí mít délku l . Na obrázku vidíme příklady dvou různých tvarů měst, které zmíněnou podmínku splňují. Z prvního města jsme vytvořili druhé prostě jen tím, že jsme hýbali s body y_1, y_2, y_3 nahoru a dolů tak, aby klikatice měla stále délku l . Jak jednoduché!



A co snaha o maximalizaci funkce $I(y_1, y_2, y_3)$ - odpovídá to snaze o maximalizaci plochy města? Skutečná plocha města S je dána součtem ploch jednotlivých lichoběžníků:

$$S = \frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x + \frac{y_2 + y_3}{2} \Delta x + \frac{y_3 + y_4}{2} \Delta x$$

Uvědomíme-li si, že $y_0 = y_4 = 0$, pak dostaneme:

$$S = (y_1 + y_2 + y_3) \Delta x$$

Funkce I dává:

$$I = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \Delta x$$

S vědomím, že $y_4 = 0$ máme:

$$I = (y_1 + y_2 + y_3) \Delta x$$

Skvělé, výraz I se shoduje s výrazem S , a proto I popisuje skutečnou rozlohu města a má tedy smysl ho maximalizovat.

Naše omezení $n = 4$ se však zdá příliš omezující. Proč nezvolit n mnohem větší? Čím větší ho totiž zvolíme, tím lépe budeme moci naší posloupností bodů aproximovat libovolnou křivku, která nás napadne! Důležité je pouze to, aby n bylo konečně velké přirozené číslo.

Problém královny Dido je velmi nározný a ilustrativní a člověk si díky němu udělá dobrou představu, o co v problému vlastně jde. Neměli bychom však kvůli tomuto jednomu problému ztrácet ze zřetelů náš obecný cíl. Připomeňme si tedy obecné znění isoperimetrické úlohy:

Hledáme takovou posloupnost libovolných reálných čísel $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, aby byla extremalizována funkce $I(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ za podmínky $K(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) - l = 0$.

Pokud má čtenář trochu "vyvinutý nos", tak by nám taková úloha měla být povědomá z minulé kapitoly. Nejedná se přece o nic jiného, než o extremalizaci funkce více proměnných, je-li požadováno splnění vazby. Zavedeme-li totiž funkci

$$J(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) := K(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) - l \quad (35)$$

máme jednoduchou vazbu $J(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = 0$. Není tedy nic jednoduššího než použít metodu Lagrangeových multiplikátorů. Ta nám říká, že:

$$\frac{\partial I}{\partial y_1} = \lambda \frac{\partial J}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial I}{\partial y_2} = \lambda \frac{\partial J}{\partial y_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial I}{\partial y_{n-1}} = \lambda \frac{\partial J}{\partial y_{n-1}} \quad (36)$$

Poslední dílek naší úvahy zdánlivě ze začátku "spadne z nebe", ale brzy si ho propojíme s tím, co už doposud víme. Tvrdím, že pokud je výraz $I - \lambda J$ extremalizován, je automaticky sada rovnic (36) splněna.

Ihned si provedeme důkaz. Pokud je výraz $I - \lambda J$ extremalizován, určitě platí:

$$d(I - \lambda J) = 0$$

$$dI = \lambda dJ$$

Totální diferenciály můžeme rozepsat do složek, ve kterých se výrazy mohou měnit:

$$\frac{\partial I}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial I}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial I}{\partial y_n} dy_n = \lambda \left(\frac{\partial J}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial J}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial J}{\partial y_n} dy_n \right)$$

Dva výrazy, kde se vyskytují diferenciály, se rovnají jen pokud se rovnají veškeré složky. Proto:

$$\frac{\partial I}{\partial y_1} = \lambda \frac{\partial J}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial I}{\partial y_2} = \lambda \frac{\partial J}{\partial y_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial I}{\partial y_{n-1}} = \lambda \frac{\partial J}{\partial y_{n-1}}$$

A tím jsme dokázali, že sada rovnic (36) je skutečně splněna.

Na začátku však nebyla řeč o žádných posloupnostech $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Chtěli jsme prostě jen nalézt funkci $y = y(x)$, která bude extremalizovat funkcionál při dané podmínce. Jak se tedy od posloupností vrátíme k funkcím? Snadno: provedeme to tak, že pošleme $n \rightarrow \infty$ a diskrétní index $i = 0, 1, \dots, n$ nahradíme spojitou proměnnou $x \in (x_A, x_B)$.

Naše předchozí povídání nyní zobecníme pro funkce: je-li pro nějakou funkci $y = y(x)$ funkcionál $I - \lambda J$ extremalizován a je splněna podmínka $J(x, y, y') = 0$ a okrajové podmínky, pak funkce $y = y(x)$ řeší naši isoperimetrickou úlohu.

16 Isoperimetrické úlohy s pevnými konci - příklady

Příklad: Založení Kartága při snaze maximalizovat jeho rozlohu

Nejprve se vypořádáme s naším dluhem: vyřešíme problém královny Dido. Ve skutečnosti bude tento problém zatím lehce zjednodušený tím, že máme zadané body x_A, x_B . Modifikovaná úloha zní takto takto:

Pro dvě známá čísla x_A, x_B hledáme funkci $y = y(x)$ takovou, že:

$$1) s = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2} dx = L$$

$$2) S = \int_{x_A}^{x_B} y(x) dx = S_{max}$$

V minulé kapitole jsme odvodili, že tento typ úlohy se řeší následujícím způsobem: zavedeme-li funkcionál $M = S(x, y, y') - \lambda s(x, y, y')$ pro dosud neznámé číslo λ , pak víme, že řešením naší úlohy může být jen taková funkce $y = y(x)$, která současně extremalizuje M . Po dosazení:

$$M = \int_{x_A}^{x_B} y - \lambda \sqrt{1 + y'^2}$$

Zkusme tedy extremalizovat tento funkcionál. Integrand nezávisí explicitně na x , takže se nabízí použít Beltramiho identitu:

$$\left(y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) - y' \frac{\partial}{\partial y'} \left(y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) = C$$

pro nějakou zatím blíže neurčenou konstantu C . Provedeme-li derivaci, obdržíme diferenciální rovnici:

$$y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

Jednoduchými algebraickými úpravami lze tuto rovnici převést do mnohem jednoduššího tvaru:

$$1 + y'^2 = \left(\frac{\lambda}{C - y} \right)^2$$

Můžeme zkusit provést separaci proměnných. Jako už mnohokrát, i teď nahradíme y' výrazem $\frac{1}{x'}$ (protože $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$).

$$1 + \frac{1}{x'^2} = \left(\frac{\lambda}{C - y} \right)^2$$

Vyjádříme odtud x' :

$$x' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{C - y} \right)^2 - 1}}$$

Nyní už stačí poslední vztah integrovat:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{C-y}\right)^2 - 1}} = \int \frac{\frac{C-y}{\lambda}}{\sqrt{1 - \left(\frac{C-y}{\lambda}\right)^2}} dy$$

V druhém integrálu by bylo výhodné zavést substituci:

$$z = \frac{C-y}{\lambda} \quad dz = -\frac{dy}{\lambda} \Rightarrow dy = -\lambda dz$$

Po dosazení substituce do našeho integrálu:

$$x = \int \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} (-\lambda dz) = \lambda \int \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}} dz = \lambda \sqrt{1-z^2} + D$$

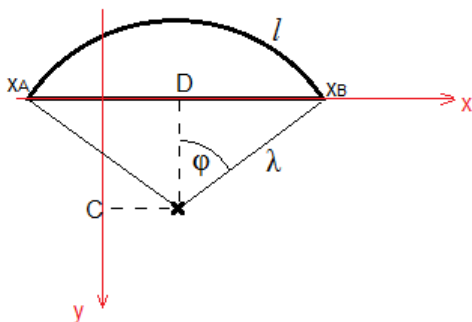
D je v našem vztahu integrační konstanta. Vraťme se zpětnou substitucí k původní proměnné y :

$$x = \lambda \sqrt{1 - \left(\frac{C-y}{\lambda}\right)^2} + D$$

Tuto rovnici je snadné převést do "hezčího" tvaru:

$$(x - D)^2 + (C - y)^2 = \lambda^2$$

Okamžitě je nám jasné, s čím máme co dočinění: to je přece rovnice kružnice! Řešením našeho problému je tedy kružnicový oblouk. Jedná se o zatím blíže nespecifikovaný oblouk nějaké kružnice. Samozřejmě nás ale zajímá, o kterou kružnici a který oblouk konkrétně se jedná.



K tomu použijeme podmínku, že délka oblouku musí měřit L : $L = 2\varphi\lambda$. Chybí nám však znalost úhlu φ , takže použijeme podmínku, že křivka musí procházet body $[0, x_A], [0, x_B]$: $\sin \varphi = \frac{x_B - x_A}{2\lambda}$. Soustava těchto dvou rovnic bohužel vede na neřešitelnou transcendentní rovnici, která lze řešit jen přibližně numericky.

Příklad: Určení tvaru prověšeného řetízku (řetězovka)

Další hezká isoperimetrická úloha má velmi jednoduché zadání: představme si homogenní neroztažitelný řetízek o délce L , který je zavěšen ve dvou koncových bodech $A[x_A, y_A], B[x_B, y_B]$ v homogenním tíhovém poli. Jakým způsobem se tento řetízek prověsí? (této křivce se říká řetězovka nebo též katenoida)

Ten, kdo někdy viděl nějaký zavěšený řetízek, nejspíš by neprotestoval, kdybych mu řekl, že řešením je parabola. Zda tomu tak ale doopravdy, se přesvědčíme výpočtem!

Řetízek bude v homogenním tíhovém poli prověšen tak, aby jeho potenciální energie V byla minimální. Rozřezáme-li řetízek na elementární kousky o hmotnosti dm a jim odpovídající potenciální energie bude $dV = gy dm$, protože jsme v homogenním tíhovém poli. Protože je řetízek vyroben jen z jednoho materiálu, jeho délková hustota (nazvěme ji ρ) je konstantní, takže $dm = \rho dl$. Elementární kousek délky je samozřejmě $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$. Celkovou potenciální energii dostanu vysčítáním potenciálních energií všech jeho elementárních částí. Teď tedy dejme všechny tyto úvahy na jednom řádku dohromady:

$$V = \int dV = \int gy dm = \int gy \rho dl = \int_{x_A}^{x_B} gy \rho \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Podmínka pro konstantní délku řetízku se formálně dá zapsat stejně jako u minulé úlohy:

$$s = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx = L \quad (37)$$

Aby nějaká křivka mohla $y = y(x)$ mohla řešit tuto úlohu, musí extremalizovat funkcionál $V(x, y, y') - \lambda s(x, y, y')$ pro nějaké zatím neurčené číslo λ . Tento funkcionál opět nezávisí explicitně na x , můžeme tedy použít Beltramiho identitu:

$$(V - \lambda s) - y' \frac{\partial}{\partial y'} (V - \lambda s) = C$$

pro nějakou konstantu C . Po dosazení získáme:

$$\left(gy \rho \sqrt{1 + y'^2} - \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) - y' \frac{\partial}{\partial y'} \left(gy \rho \sqrt{1 + y'^2} - \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) = C$$

Po zderivování a několika jednoduchých algebraických manipulacích dostaneme:

$$\left(\frac{gy \rho - \lambda}{C} \right)^2 = 1 + y'^2$$

Opět zkusíme provést separaci proměnných tím, že vyjádříme y' jako $\frac{1}{x'}$, kde apostrof značí teď derivaci podle y . To dosadíme do naší rovnice:

$$\left(\frac{gy\rho - \lambda}{C}\right)^2 = 1 + \frac{1}{x'^2}$$

Osamostatněme x' :

$$x' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{gy\rho - \lambda}{C}\right)^2 - 1}} \quad \Rightarrow \quad x = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{gy\rho - \lambda}{C}\right)^2 - 1}} dy$$

Kvůli snadnějšímu integrování si zavedu substituci:

$$z = \frac{gy\rho - \lambda}{C} \quad dz = \frac{g\rho}{C} dy \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{C}{g\rho} dz$$

Po dosažení substituce do našeho integrálu:

$$x = \int \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \frac{C}{g\rho} dz = \frac{C}{g\rho} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{C}{g\rho} \cosh^{-1} z + D$$

kde D je integrační konstanta. Zpětnou substitucí se vrátím k proměnné y :

$$x = \frac{C}{g\rho} \cosh^{-1} \frac{gy\rho - \lambda}{C} + D$$

Posledním krokem pak bude zpátky vyjádřit y jako $y = y(x)$:

$$y = \frac{C}{g\rho} \left(\cosh \left(\frac{\rho g}{C} (x - D) \right) + \frac{\lambda}{C} \right)$$

Funkce vypadá na první pohled trochu odpudivě, ale spousta "smetí" zde tvoří pouze konstanty, které si klidně můžeme přeznačit:

$$y = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x + \beta) + \gamma$$

Naše křivka tedy kvalitativně má tvar hyperbolického kosinu, podobně jako když jsme řešili, jaký tvar bude mít mýdlová bublina mezi dvěma kruhovými obručemi. Řetězovka je tedy hyperbolický kosinus.

Stále jsme však nesplnili podmínky okrajové podmínky (řetízek začíná a končí v pevně určených bodech) a také podmínku, že řetízek je neroztažitelný a měří právě L . Abychom to splnili, musíme vhodně nařítovat konstanty α, β, γ . Okrajové podmínky dávají dvě rovnice:

$$y_{A,B} = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x_{A,B} + \beta) + \gamma$$

pro indexy A, B . Abychom splnili podmínku neroztažitelnosti, budeme muset dosadit do vztahu (34) náš konkrétní předpis pro funkci y (resp. jeho derivaci). Lze snadno spočítat, že $y' = \sinh(\alpha x + \beta)$. Provedeme tedy dosazení:

$$\begin{aligned}
L &= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \sinh^2(\alpha x + \beta)} = \int_{x_A}^{x_B} \cosh(\alpha x + \beta) dx = \\
&= \left[\frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha x + \beta) \right]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{\alpha} \left(\sinh(\alpha x_B + \beta) - \sinh(\alpha x_A + \beta) \right)
\end{aligned}$$

Máme tedy soustavu tří rovnic pro tři neznámé α, β, γ :

$$y_A = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x_A + \beta) + \gamma$$

$$y_B = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x_B + \beta) + \gamma$$

$$L = \frac{1}{\alpha} \left(\sinh(\alpha x_B + \beta) - \sinh(\alpha x_A + \beta) \right)$$

Její vyřešením bychom získali konstanty α, β, γ a úlohu bychom tím zcela vyřešili. Bohužel řešit tuto soustavu analyticky není v našich silách, a tak pro každé konkrétní pětici parametrů x_A, x_B, y_A, y_B, L je potřeba užít numerických metod.

Poznamenejme, že tato úloha lze aplikovat nejen na řetězok, ale i například na dráty vysokého napětí. Zajímavé by bylo uvážit, kdyby délka vedení L byla časově proměnná a kdyby se mohla zmenšit pod kritickou hodnotu $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ - pak by vedení prasklo. K takovému problému by mohlo dojít, pokud by například při vysokých teplotách měla řetězovka tvar hodně blízký úsečce spojující body A, B . Při ochlazení by se řetězovka ochlazovala a smršťovala (tím by se ještě víc narovnávala a přibližovala k úsečce AB) a jakmile by teplota klesla pod jistou mez, vedení by prasklo.

17 Geodetiky - hledání nejkratších spojc na zakřiveném povrchu

Představme si, že máme zakřivený povrch - třeba sféru, rotační paraboloid, Möbiův list, nebo snad ještě šílenější útvary. Některý povrch si tedy vyberme a zvolme si na něm dva různé body - třeba body A a B .

A teď si představme mravence, který se nachází v bodě A . Náš mravenec neumí létat a může se pohybovat jen po našem zakřiveném povrchu. Řekněme, že se mu v bodě A nelíbí a rád by se po co nejkratší dráze dostal do bodu B . Kudy se má mravenec po zakřivené ploše vydat?

Hledání takové dráhy se nazývá problém geodetiky a přesně takový problém nás v této kapitole bude zajímat. V šesté kapitole už jsme se s jedním takovým problémem setkali. Šlo o nalezení nejkratší spojnice dvou bodů v rovině. Tam bylo předem jasné, že nejkratší spojnici bude úsečka. Teď se však podíváme i na plochy, kde řešení už tak zjevné není...

Jak takový problém budeme řešit? Dřív, než se pustíme do jakéhokoliv počítání, by bylo dobré si nějak označit pojmy, se kterými budeme pracovat.

Nejprve si nějak musíme parametrizovat povrch, na němž budeme pracovat. Asi nejjednodušší možnost je prostě říct, že povrch je taková množina bodů $[x, y, z]$, pro něž je splněna rovnice $\Phi(x, y, z) = 0$. Jaký povrch bude mít konkrétně tvar, to poznáme z toho, jak přesně bude vypadat funkce Φ . Uvedeme si zde čtyři příklady, abychom si udělali nějakou představu:

- Pro $\Phi(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$ se jedná o rovnici roviny.
- Pro $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$ máme rovnici nekonečného rotačního válce o poloměru R , jehož osa splývá s osou z .
- Pro $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0$ máme rovnici nekonečného dvojkuzelu o vrcholovém úhlu 2α , jehož osa splývá s osou z .
- Pro $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ se jedná o rovnici sféry o poloměru R jehož střed leží v počátku souřadnic.

Pomocí rovnice pro kartézské souřadnice tedy můžeme zadat nějakou zakřivenou plochu. Často je však výhodnější uvážit i jiné, než jen kartézské souřadnice. Pokud si totiž vybereme takové, které jsou ploše Φ "ušity na míru", může se rovnice výrazně zjednodušit.

Uvažme třeba válcové souřadnice r, φ, z . V nich mají válec i kužel velmi jednoduché rovnice: $\Phi(r, \varphi, z) = r - R = 0$, resp. $\Phi(r, \varphi, z) = r - z \tan \alpha = 0$.

Podobně ve sférických souřadnicích r, φ, θ mají sféra i kužel velmi jednoduché rovnice: $\Phi(r, \varphi, \theta) = r - R = 0$, resp. $\Phi(r, \varphi, \theta) = \theta - \alpha = 0$.

Obecně mám-li nějaký systém křivočarých souřadnic q_1, q_2, q_3 , který je s těmi kartézskými spojen převodem $x = x(q_1, q_2, q_3), y = y(q_1, q_2, q_3), z = z(q_1, q_2, q_3)$, mohou vždy rovnici naší plochy $\Phi(x, y, z) = 0$ snadno vyjádřit v nových souřadnicích: $\Phi(q_1, q_2, q_3) = 0$.

Proveďme nyní netriviální předpoklad, a sice že plocha má takový tvar, že její rovnice lze zapsat takto: $\Phi(q_1, q_2, q_3) = q_3 - q_3(q_1, q_2) = 0$, tj. že mohu jednu ze souřadnic vyjádřit jednoznačně pomocí zbylých dvou. Tento předpoklad není vůbec samozřejmý a právě proto je (mimo jiné) důležité si zvolit vhodný systém souřadnic.

Tím jsme tedy řekli něco o ploše Φ . Další krok v naší úvaze tedy bude zaměřit se na výběr optimální křivky $\gamma \subset \Phi$. Vzhledem k tomu, že souřadnice q_3 už je jednoznačně určena díky vztahu $q_3 = q_3(q_1, q_2)$, neposkytuje nám tato souřadnice už žádnou volnost ve výběru - a je tedy nezájímavá. Zajímavý je tedy pouze vztah mezi souřadnicemi q_1, q_2 . Problém hledání geodetiky se tedy redukuje na hledání závislosti $q_2 = q_2(q_1)$.

Teď by bylo dobré vyjádřit ve zvolených souřadnicích délku nějaké křivky γ . Kdybychom výpočet prováděli v kartézských souřadnicích, výpočet by byl snadný:

$$l = \int dl = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Abychom tedy vyjádřili element délky dl v nových souřadnicích, budeme v nich muset vyjádřit i diferenciály dx, dy, dz . Pochopitelně tedy budeme potřebovat převodní vztah mezi souřadnicemi q_1, q_2, q_3 a kartézskými souřadnicemi x, y, z . Nebudu to hned teď dělat obecně pro libovolný souřadný systém, protože mi to připadá příliš nenázorné. Zkusíme si to raději prakticky na dvou konkrétních příkladech:

Příklad: Určení délky křivky v cylindrických souřadnicích

Převodní vztahy mezi kartézskými a válcovými souřadnicemi jsou tyto:

$$x(r, \varphi, z) = r \cos \varphi, \quad y(r, \varphi, z) = r \sin \varphi, \quad z(r, \varphi, z) = z$$

Příslušné diferenciály jsou potom:

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi, \quad dz = dz$$

No a element délky dl spočítáme jako:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}$$

Zvolme třeba z -ovou souřadnici jako nezávisle proměnnou. Pak křivka vedoucí z bodu $[r_1, \varphi_1, z_1]$ do bodu $[r_2, \varphi_2, z_2]$ bude mít délku:

$$l = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2} = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + 1} dz \quad (38)$$

Příklad: Určení délky křivky ve sférických souřadnicích

Opět začneme tím, že si napíšeme převodní vztahy:

$$x(r, \varphi, \theta) = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y(r, \varphi, \theta) = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z(r, \varphi, \theta) = r \cos \theta$$

Prvním krokem opět bude spočítat si diferenciály $dr, d\varphi, d\theta$:

$$\begin{aligned} dx &= \cos \varphi \sin \theta dr - r \sin \varphi \sin \theta d\varphi + r \cos \varphi \cos \theta d\theta \\ dy &= \sin \varphi \sin \theta dr + r \cos \varphi \sin \theta d\varphi + r \sin \varphi \cos \theta d\theta \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Odtud určíme element délky dl :

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2}$$

Opět si zvolme souřadnici, kterou budeme považovat za nezávislou: třeba souřadnici θ . Potom délku křivky vedoucí z bodu $[r_1, \varphi_1, \theta_1]$ do bodu $[r_2, \varphi_2, \theta_2]$ můžeme napsat jako:

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta \quad (39)$$

Poznamenejme, že v obou našich příkladech se ve výrazu pro délku křivky vyskytují pod odmocninou pouze 2. mocniny derivací, ale ne součiny dvou různých derivací. To je charakteristické pro tzv. ortonormální souřadnice. Pro naše další úvahy má však tato skutečnost pouze okrajový význam, proto se tím nenechme rozptylovat. Nyní, když už jsme získali cit, jak se délka křivky dá spočítat pro různé souřadnice, zkusme to nyní udělat obecněji:

Z převodů $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$ získám diferenciály:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3 \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3 \end{aligned}$$

Element délky $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ získáme po sečtení 2. mocnin těchto výrazů a odmocnění. Výsledek bude určitě tvaru:

$$dl = \sqrt{\alpha_{11}dq_1^2 + \alpha_{12}dq_1dq_2 + \alpha_{13}dq_1dq_3 + \alpha_{22}dq_2^2 + \alpha_{23}dq_2dq_3 + \alpha_{33}dq_3^2}$$

$$dl = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^3 \alpha_{ij} dq_i dq_j}$$

kde α_{ij} jsou nějaké funkce souřadnic q_1, q_2, q_3 .

Integrací tohoto výrazu získáme celkovou délku křivky:

$$l = \int \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^3 \alpha_{ij} dq_i dq_j}$$

Teď bude potřeba si uvědomit, podle které proměnné vlastně budeme chtít integrovat. Zrekapitulujme si ještě jednou význam jednotlivých souřadnic v našem problému:

- q_1 je zcela nezávisle proměnná.
- q_2 je proměnná jen do té chvíle, než si vybereme konkrétní křivku γ .
- q_3 je souřadnice vázaná - je určena volbou plochy Φ a výběrem konkrétní křivky γ .

Je tedy přirozené, když se rozhodneme integrovat podle zcela nezávislé proměnné q_1 :

$$l = \int_A^B \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^3 \alpha_{ij} \frac{dq_i}{dq_1} \frac{dq_j}{dq_1}} dq_1 \quad (40)$$

Tím jsme tedy vyjádřili délku křivky v naprosto libovolných souřadnicích. Když se na tento výraz podíváme, jedná se o funkcionál, jehož vstupem je libovolná funkce $q_2 = q_2(q_1)$. A my se tento funkcionál snažíme extremalizovat. K tomuto účelu se samozřejmě bude používat Euler-Lagrangeova rovnice. Lépe si to ukážeme na konkrétních příkladech v následující kapitole.

18 Hledání geodetik na válci, kuželu a sféře

Příklad: Hledání geodetiky na válcové ploše

Jako první příklad budeme určovat geodetiku na nekonečné válcové ploše o poloměru R , vedoucí z bodu A do bodu B .

Bude výhodné si pro tento účel zavést válcové souřadnice. Rovnice válcové plochy bude mít velmi jednoduchý tvar: $r(\varphi, z) = R$. Body A, B ležící na ní budou mít souřadnice $[r_A, \varphi_A, z_A]$, resp. $[r_B, \varphi_B, z_B]$. Dále jsme ve vztahu (38) odvodili, že délka křivky bude v těchto souřadnicích dána integrálem:

$$l = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + 1} dz$$

Zaveďme zjednodušující značení: $r' := \frac{dr}{dz}$, $\varphi' := \frac{d\varphi}{dz}$. Můžeme tedy psát:

$$l = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{r'^2 + r^2 \varphi'^2 + 1} dz$$

Dále si uvědomme, že r vystupuje v roli závislé proměnné: je totiž dána závislost $r(\varphi, z) = R$. Díky tomu můžeme spočítat, že $r' = 0$. A teď směle dosadíme r i r' do našeho předchozího výrazu:

$$l = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{R^2 \varphi'^2 + 1} dz$$

Hledáme tedy nyní závislost $\varphi = \varphi(z)$ takovou, že tento výraz bude minimalizován. Jedná se o standardní extremalizaci funkcionálu, takže můžeme použít Euler-Lagrangeovu rovnici.

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \sqrt{R^2 \varphi'^2 + 1} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \sqrt{R^2 \varphi'^2 + 1} \right) = 0$$

Integrand v našem funkcionálu zjevně explicitně nezávisí na φ , takže první člen zmizí:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \sqrt{R^2 \varphi'^2 + 1} \right) = 0$$

Rovnici můžeme vyintegrovat:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi'} \sqrt{R^2 \varphi'^2 + 1} = C$$

Po výpočtu derivace na levé straně získáme:

$$\frac{\varphi'}{\sqrt{R^2 \varphi'^2 + 1}} = C$$

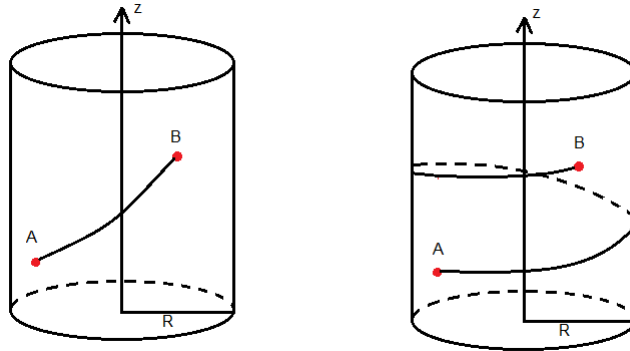
Odtud můžeme vyjádřit φ' :

$$\varphi' = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2 R^2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi' = D$$

Na pravé straně se vyskytovaly pouze konstanty, takže jsme pravou stranu přeznačili pro jednoduchost jako konstantu D . Abychom získali hledanou závislost $\varphi = \varphi(z)$, stačí už celou rovnici pouze vyintegrovat:

$$\varphi = Dz + E$$

Zjistili jsme tedy, že závislost úhlové souřadnice φ na výšce z je lineární. Když si představíme, jak taková křivka může vypadat, jedná se o šroubovici namotanou povrch válce.



Šroubovice by měla směřovat z bodu $A[r_A, \varphi_A, z_A]$ do bodu $B[r_B, \varphi_B, z_B]$. Abychom toto zajistili, musíme vhodně zvolit konstanty D, E , aby naše funkční závislost byla splněna i pro body A, B :

$$\varphi_A = Dz_A + E \qquad \varphi_B = Dz_B + E$$

Vyřešením této soustavy získáme neznámé konstanty D, E :

$$D = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{z_B - z_A} \qquad E = \frac{z_B \varphi_A - z_A \varphi_B}{z_B - z_A}$$

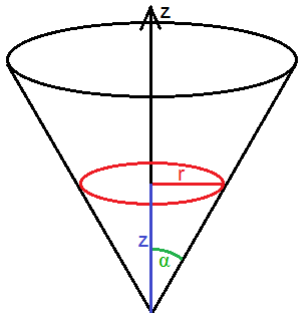
Všimněme si případu, kdy by někdo zadal $\varphi_A > \varphi_B$ taková, že $\varphi_B - \varphi_A > \pi$. V takovém případě bychom po křivce ještě navíc požadovali, aby se obtáčela kolem válcové plochy a tvořila závitů (viz obrázek vpravo). Číslo $\frac{\varphi_B - \varphi_A}{2\pi}$ zaokrouhleno na nejbližší spodní celé číslo nám říká počet závitů, který naše křivka γ bude obsahovat. Pokud se tedy má jednat skutečně o geodetiku (nejkratší spojnicí), je potřeba zadat počáteční podmínky tak, že $\varphi_B - \varphi_A \leq \pi$ (viz obrázek vlevo).

Poslední poznámka se týká toho, že naše závislost $\varphi = \varphi(z)$ je lineární. Ve skutečnosti tento fakt není zase tak překvapivý - válcová plocha lze totiž rozvinout do roviny. V rovině je nejkratší spojnicí dvou bodů úsečka. Pokud poté plášť válce zase svineme zpět, naše úsečka se zakříví právě do podoby šroubovice. Lineární závislost se při tomto svinutí zachovává, protože úhlová souřadnice φ na plášti válce je přímo úměrná horizontální souřadnici v rovině.

Příklad: Hledání geodetiky na kuželovém plášti

Zkusme podobným způsobem určit geodetiku na plášti kuželu, vedoucí z bodu A do bodu B . Vrcholový úhel kužele označme 2α .

Kužel je rotačně symetrický podle své osy, bude výhodné tuto osu ztotožnit s osou z a poté opět zavést válcové souřadnice. V tomto systému souřadnic budou mít body A, B souřadnice $[r_A, \varphi_A, z_A]$, resp. $[r_B, \varphi_B, z_B]$.



Nejprve si určíme rovnici pláště kuželu. Budeme-li rovina sekat kužel ve výšce z , řezem bude kružnice o poloměru r . Z obrázku plyne, že $r = \tan \alpha z$.

Než se pustíme do výpočtu, ujasněme si opět význam jednotlivých souřadnic. Souřadnici z považujeme za zcela nezávislou. Souřadnici φ považujeme za nezávislou, dokud nezvolíme konkrétní křivku γ na naší ploše. Volbou této křivky tedy zafixujeme závislost $\varphi = \varphi(z)$. Zbylá souřadnice r je pak už jednoznačně určena plochou kužele, tj. předpisem $r(\varphi, z) = \tan \alpha z$.

Používáme válcové souřadnice, takže použijeme výraz pro délku křivky (38):

$$l = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + 1} dz$$

Stejně jako v minulém příkladě zavedeme zjednodušující notaci: $r' := \frac{dr}{dz}$, $\varphi' := \frac{d\varphi}{dz}$. Předchozí vztah tedy bude vypadat takto:

$$l = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{r'^2 + r^2 \varphi'^2 + 1} dz$$

Protože r je v roli závislé proměnné, bude dobré spočítat $r' = \tan \alpha$ a dosadit za r i r' :

$$l = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha z^2 \varphi'^2 + 1} dz$$

Problém hledání geodetiky byl tedy zredukován na hledání funkce $\varphi = \varphi(z)$, aby extremalizovala funkcionál v předchozím vztahu. K tomuto účelu využijeme jako obvykle Euler-Lagrangeovu rovnici:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha z^2 \varphi'^2 + 1} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha z^2 \varphi'^2 + 1} \right) = 0$$

Integrand ve funkcionálu nezávisí explicitně na φ , takže první člen vypadne. U druhého členu ještě změňme znamínko:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha z^2 \varphi'^2 + 1} \right) = 0$$

Poté můžeme rovnici integrovat podle z a dostaneme:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi'} \sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha z^2 \varphi'^2 + 1} = C \Rightarrow \frac{\tan^2 \alpha z^2 \varphi'}{\sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha z^2 \varphi'^2 + 1}} = C$$

Odtud vyjádříme přímo φ' :

$$\varphi' = \frac{C \sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}{\tan \alpha z \sqrt{\tan^2 \alpha z^2 - C^2}}$$

Provedeme integraci a potom drobnou "kosmetickou" úpravu - vytkneme z odmocniny C a pokrátíme:

$$\varphi = \int \frac{C \sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}{\tan \alpha z \sqrt{\tan^2 \alpha z^2 - C^2}} dz \Rightarrow \varphi = \int \frac{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}{\tan \alpha z \sqrt{\frac{\tan^2 \alpha}{C^2} z^2 - 1}} dz$$

Ačkoliv integrand vypadá na první pohled odpudivě, vlastně se jedná o funkci tvaru $\frac{K}{z \sqrt{L^2 z^2 - 1}}$. Pro naši pohodlnost na si tedy můžeme zavést substituci:

$$K = \frac{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}{\tan \alpha} \quad L = \frac{\tan \alpha}{C}$$

Máme tedy spočítat:

$$\varphi = \int \frac{K}{z \sqrt{L^2 z^2 - 1}} dz$$

Abychom integraci provedli, bude se nám velice hodit pomocná substituce: $z = \frac{1}{L \cos t}$, $dz = \frac{\sin t}{L \cos^2 t} dt = \frac{\tan t}{L \cos t} dt$. Výraz pod odmocninou se potom totiž výrazně zjednoduší: $\sqrt{L^2 z^2 - 1} = \sqrt{L^2 \frac{1}{L^2 \cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\tan^2 t} = \tan t$. Toto všechno teď dosadíme do našeho integrálu:

$$\varphi = \int \frac{K}{\frac{1}{L \cos t} \cdot \tan t} \cdot \frac{\tan t}{L \cos t} dt = \int K dt = Kt + M$$

Zpětnou substitucí $t = \arccos \frac{1}{Lz}$ získáváme závislost:

$$\varphi(z) = K \arccos \frac{1}{Lz} + M$$

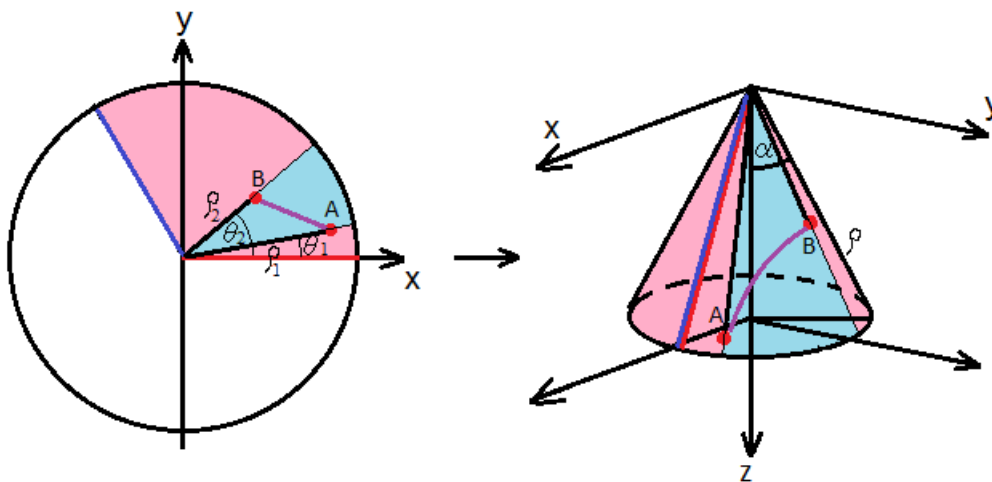
Odtud můžeme vyjádřit z :

$$z(\varphi) = \frac{\frac{1}{L}}{\cos\left(\frac{\varphi}{K} - \frac{M}{K}\right)}$$

$$z(\varphi) = \frac{\frac{1}{L}}{\cos\left(\frac{1}{K}\varphi\right) \cos\frac{M}{K} + \sin\left(\frac{1}{K}\varphi\right) \sin\frac{M}{K}} \quad (41)$$

Zkusme tvar geodetiky kuželu odvodit jiným způsobem. Pokud jste někdy byli na maškarním plese, možná jste viděli čepičky ve tvaru kužele, kterými si hosté rádi zdobí své hlavy. Zkoušeli jste si někdy takovou čepičku vyrobit? Je to snadné. Vystříhnete z barevného papíru kruhovou výseč, radiálně se rozbíhající okraje slepíte k sobě a jstě hotoví!

A proč to sem píšu? Protože tím pádem opět můžeme problém převést do roviny, kde ho umíme vyřešit (řešením je úsečka). Potom vezmeme úseč (společně s úsečkou) a svineme ji opět zpátky do kužele. A budeme zkoumat, jak se zdeformuje naše úsečka. To bude naše geodetika. Pokusil jsem se tuto proceduru naznačit na obrázku.



Rozviňme tedy kuželovou plochu do roviny a zaveďme v této rovině kartézské souřadnice Oxy tak, aby výsledná kruhová výseč měla střed v počátku souřadnic a její okraj byl zarovnan s osou x (viz obrázek). Úhel mezi radiálními okraji výseče označme θ_{max} . Řekněme, že naše dva body A, B mají v těchto kartézských souřadnicích polohu $[x_A, y_A]$, resp. $[x_B, y_B]$. Nejkratší spojnice dvou bodů v rovině je zjevně úsečka. Její předpis bude tvaru $y = Dx + E$, kde $x \in (x_A, x_B)$ pro vhodné konstanty D, E .

Nyní bychom tuto úsečku chtěli "zdeformovat" tím, že ji spolu se zbytkem výšeče svineme do podoby pláště kužele. S výšečí se dobře pracuje v souřadnicích polárních, navíc tyto souřadnice budou úzce spjaty s trojrozměrnou kuželovou plochou. Prvním krokem tedy logicky bude vyjádřit rovnici úsečky v polárních souřadnicích. Převod mezi kartézskými a polárními je tento:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

To můžeme dosadit do naší rovnice úsečky AB . Vyjde:

$$\rho \sin \theta = D\rho \cos \theta + E$$

Odtud nyní vyjádříme ρ :

$$\rho = \frac{E}{\sin \theta - D \cos \theta}$$

Teď, když máme vyjádřenou úsečku vyjádřenou v polárních souřadnicích, musíme namapovat každý bod z výšeče na příslušný bod na plášti kužele. To formálně provedeme pomocí převodu souřadnic. Z obrázku jde vidět, že vztah mezi z a ρ je tento:

$$\rho = \frac{z}{\cos \alpha}$$

Dále potřebujeme vztah mezi úhly θ a φ . Oblouk ohraničující kruhovou výšeč musí být stejně dlouhý, jako obvod podstavy kužele: $\theta_{max}\rho = 2\pi(\rho \sin \alpha)$, takže můžeme vyjádřit úhel θ_{max} jako $\theta_{max} = 2\pi \sin \alpha$. Díky tomu, jak jsme zavedli souřadnice, úhlu $\theta = 0$ odpovídá úhel $\varphi = 0$. Úhly θ, φ na sobě závisí přímo úměrou, takže interval $(0, \theta_{max})$ se lineárně zobrazuje na interval $(0, 2\pi)$.

$$\theta \in (0, \theta_{max}) \rightarrow \varphi \in (0, 2\pi)$$

Díky znalosti úhlu θ_{max} tedy víme, že:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\theta_{max}}\theta = \frac{1}{\sin \alpha}\theta \Rightarrow \theta = \varphi \sin \alpha$$

Převodní vztahy při deformaci z výšeče na plášť kužele jsou tedy $\rho = \frac{z}{\cos \alpha}$, $\theta = \varphi \sin \alpha$. Rovnici zdeformované úsečky dostaneme, pokud tyto převody dosadíme do výše odvozeného vztahu $\rho = \frac{E}{\sin \theta - D \cos \theta}$. Získáme:

$$\frac{z}{\cos \alpha} = \frac{E}{\sin(\varphi \sin \alpha) - D \cos(\varphi \sin \alpha)}$$

Odtud:

$$z(\varphi) = \frac{E \cos \alpha}{\sin(\varphi \sin \alpha) - D \cos(\varphi \sin \alpha)}$$

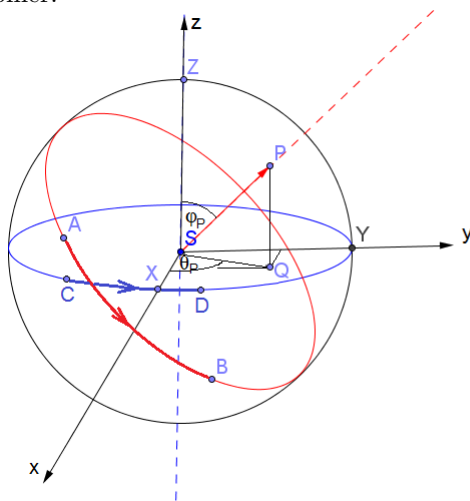
Vidíme, že tento výraz má stejný tvar, jako v rovnici (41). Zřejmě jsme tedy postupovali správně.

Příklad: Hledání geodetiky na sféře

Zkusme si ještě spočítat, jak bude vypadat geodetika na povrchu koule o poloměru R . Narozdíl od předchozích dvou příkladů - teď už nepůjde problém vyřešit pomocí finty, že si zakřivený povrch "narovnáme". Nepůjde to ne proto, že by to bylo matematicky těžké spočítat, ale proto, že to je fyzicky nemožné. Sféra je totiž v jistém smyslu jiná, než povrch válce nebo kužele - má jinou křivost.

S tímto problémem se ostatně potýkají kartografové, když se snaží věrně zobrazit povrch Země na rovnou mapu. Existují různá zobrazení, která mají různé výhodné vlastnosti: mohou být úhlojevná (zachovávají úhly), nebo plochojevná (zachovávají se poměry ploch). Délkojevné zobrazení ale třeba neexistuje - nemůžeme zobrazit povrch sféry do roviny tak, aby se vzdálenost mezi libovolnými dvěma body zachovaly.

Než se pustíme do řešení našeho problému, měli bychom si uvědomit, že řešení už intuitivně vlastně známe. Představme si, že stojíme na rovníku v nějakém bodě C a chceme se dostat na jiný bod na rovníku, třeba na bod D . Jakou nejkratší cestou se vydat? To je přece jasné - přímo po rovníku! A co to je rovník? Z ryze geometrického hlediska je to tzv. hlavní kružnice - kružnice, jejíž střed splývá se středem sféry. Každá hlavní kružnice má navíc taky tu vlastnost, že ze všech možných kružnic ležících na sféře, má maximální možný poloměr.



Dosud jsme předpokládali, že body C, D leží na rovníku. Co kdybychom si ale vybrali dva zcela náhodné bod A, B na povrchu sféry? Jaká bude nejkratší spojnice mezi nimi? Řekněme, že naše sféra má střed v bodě S . Uvažme, že rozřízneme sféru rovinou ABS . Pak řezem bude právě hlavní kružnice vedoucí skrze body A, B . A tato hlavní kružnice bude současně hledanou geodetikou!

Zkusme nyní formálně popsat rovnici této hlavní kružnice - resp. závislost mezi úhly φ, θ . Nejjednodušší asi bude vyjádřit ji jako průnik roviny ABS s naší

sférou. Rovnici sféry už známe - je to $r = R$. Stačí tedy zjistit rovnici roviny ABS . Než se dáme do jejího odvozování, zkusme nejprve sestrojít pomocný bod P . Definujeme jej tak, že vedeme kolmici k rovině ABS bodem S a průsečík této kolmice se sférou označíme právě jako P . Řekněme, že tento bod P má sférické souřadnice $[R, \varphi_P, \theta_P]$. Pak zjevně vektor \vec{SP} je normálový k rovině ABS , v níž leží naše zkoumaná hlavní kružnice. Stačí určit kartézské složky tohoto vektoru a rovnici roviny ABS z analytické geometrie už budeme umět určit.

Jaké budou kartézské souřadnice bodu P ?

Zjevně $[x_P, y_P, z_P] = [R \cos \varphi_P \sin \theta_P, R \sin \varphi_P \sin \theta_P, R \cos \theta_P]$. Vektor \vec{SP} má je tedy ve složkách zapsán takto:

$$\vec{SP} = (x_v, y_v, z_v) = (R \cos \varphi_P \sin \theta_P, R \sin \varphi_P \sin \theta_P, R \cos \theta_P) \quad (42)$$

Z analytické geometrie víme, že má-li normálový vektor složky (x_v, y_v, z_v) , pak rovina kolmá k němu má rovnici $x_v x + y_v y + z_v z + c = 0$. Navíc pokud rovina prochází počátkem, je $c = 0$. Naše rovnice roviny je tedy:

$$x_v x + y_v y + z_v z = 0$$

Nic nám ale nebrání převést si tuto rovnici do polárních souřadnic. Stačí použít převod mezi souřadnicemi x, y, z a r, φ, θ .

$$x_v r \cos \varphi \sin \theta + y_v r \sin \varphi \sin \theta + z_v r \cos \theta = 0$$

To tedy je naše rovnice roviny ve sférických souřadnicích. Abychom získali rovnici hlavní kružnice, bude potřeba protnout ji s naší sférou. Ta má jednoduchou rovnici $r = R$. Po dosažení:

$$x_v R \cos \varphi \sin \theta + y_v R \sin \varphi \sin \theta + z_v R \cos \theta = 0$$

Vydělme rovnici výrazem $R \sin \theta$:

$$x_v \cos \varphi + y_v \sin \varphi + z_v \cot \theta = 0 \quad (43)$$

Takto tedy vypadá hledaný vztah mezi úhly φ, θ na naší hlavní kružnici, kde konstanty x_v, y_v, z_v jsou vázané vztahem (42).

Nyní, když tedy víme, jak vypadá hlavní kružnice ve sférických souřadnicích, pokusme se dokázat, že se jedná o geodetiku!

Uvažme tedy nejprve naprosto obecnou křivku γ . Podle vztahu (39) lze ve sférických souřadnicích vyjádřit délku libovolné křivky jako:

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta$$

Přeznačme $r' := \frac{dr}{d\theta}$, $\varphi' := \frac{d\varphi}{d\theta}$ a dosadíme do předchozího vztahu:

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r'^2 + r^2 \sin^2 \theta \varphi'^2 + r^2} d\theta$$

Protože pracujeme na povrchu sféry, naši křivku γ omezíme podmínkou $r = R$. Díky tomu $r' = 0$. Po dosazení:

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} R \sqrt{\sin^2 \theta \varphi'^2 + 1} d\theta$$

Chceme, aby délka křivky byla minimální, takže použijeme Euler-Lagrangeovu rovnici. Ve skutečnosti stačí, aby výraz $\frac{l}{R}$ byl minimální, čímž se výhodně výrazu R zbavíme a nebudeme se s ním muset už "tahat" při dalších výpočtech:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \sqrt{\sin^2 \theta \varphi'^2 + 1} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \sqrt{\sin^2 \theta \varphi'^2 + 1} \right) = 0$$

Funkcionál explicitně nezávisí na φ , takže první člen zmizí. Stejně tak funkcionál nezávisí explicitně na θ , takže pokud rovnici lze velmi jednoduše integrovat podle θ :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi'} \sqrt{\sin^2 \theta \varphi'^2 + 1} = C$$

Spočítáme-li parciální derivaci na pravé straně, dostaneme:

$$\frac{\sin^2 \theta \varphi'}{\sqrt{\sin^2 \theta \varphi'^2 + 1}} = C$$

Vyjádříme odtud φ' :

$$\varphi' = \frac{C}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - C^2}}$$

Abychom získali závislost $\varphi = \varphi(\theta)$, bude potřeba tento vztah integrovat:

$$\varphi = \int \frac{C}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - C^2}} d\theta = \int \frac{C}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - C^2 \frac{1}{\sin^2 \theta}}} d\theta$$

Spočítat tento integrál nebude snadné. Nejprve si proto zavedeme výhodnou substituci $t = \cot \theta$. Tato substituce má tyto vlastnosti:

- $\frac{1}{\sin^2 \theta} = \cot^2 \theta + 1$, což je goniometrická identita.
- Výraz pod odmocninou v našem integrandu přejde do tvaru: $\sqrt{1 - C^2 \frac{1}{\sin^2 \theta}} = \sqrt{R^2 - C^2(\cot^2 \theta + 1)} = \sqrt{1 - C^2 - C^2 t^2}$
- $d\theta = -\sin^2 \theta dt$, což získáme zdiferencováním naší substituce.

Poslední dvě poznámky použijeme při dosazení do integrálu:

$$\varphi = \int \frac{C}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - C^2 - C^2 t^2}} (-\sin^2 \theta) dt = \int \frac{-dt}{\sqrt{1 - C^2 - C^2 t^2}}$$

Pod odmocninou bychom chtěli mít něco tvaru $1 - u^2$, tak to tam zkusme vytvořit:

$$\varphi = \int \frac{-C dt}{\sqrt{1 - C^2 - C^2 t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - C^2}} \int \frac{-C dt}{\sqrt{1 - \frac{C^2}{1 - C^2} t^2}} = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \int \frac{-dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} t\right)^2}}$$

Substitucí $u = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} t \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{1 - C^2}}{C} du$ dostáváme:

$$\varphi = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \int \frac{-\frac{\sqrt{1 - C^2}}{C} du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1 - u^2}} = -\arcsin u + D$$

Zpětnou substitucí $u \rightarrow t \rightarrow \theta$ dostaneme závislost $\varphi = \varphi(\theta)$:

$$\varphi = \arcsin \frac{1 - C^2}{C} \cot \theta + D$$

neboli

$$\sin(\varphi - D) = \frac{1 - C^2}{C} \cot \theta$$

$$\sin \varphi \cos D - \cos \varphi \sin D - \frac{1 - C^2}{C} \cot \theta = 0$$

Uvědomíme-li si, že C, D jsou pouze jakési konstanty, ihned vidíme, že tato rovnice je ekvivalentní s rovnicí (43):

$$x_v \cos \varphi + y_v \sin \varphi + z_v \cot \theta = 0$$

což je rovnice hlavní kružnice. Podařilo se nám tedy dokázat, že geodetikou je právě hlavní kružnice! Protože rovina ABS je jednoznačně určena výběrem bodů A, B , tak je jednoznačně určena i příslušná hlavní kružnice. Jedinou výjimkou je případ, kdy body A, B leží na sféře "naproti sobě" (například severní a jižní pól) - pak body A, B, S leží na přímce a neurčují tedy jednoznačně rovinu. Proto by ani příslušná hlavní kružnice nebyla jednoznačně určena. V takovém případě by ale každá kružnice procházející body A, B byla hlavní. V případě severního a jižního pólu by se jednalo o soustavu poledníků.

19 Dodatek 1: Podstata světla

Paprsky světla mají jednu pozoruhodnou vlastnost: pokud paprsek projde z bodu A do bodu B , musí je šířit po takové dráze, že ji urazí za nejkratší možný čas (extremální možný čas, chceme-li být přesní). Této skutečnosti si poprvé všiml francouzský právník (a "amatérský" matematik) Pierre Fermat a dokázal z této skutečnosti odvodit celou řadu doposud nesourodých jevů. Na jeho počest se zmíněný zákon nazývá Fermatův princip.

Měli bychom si však uvědomit, že sebekrásnější matematický zákon je pouze modelem nějaké fyzikální reality. V našem případě je touto fyzikální realitou světelný paprsek a jeho šíření. Pokud si světelný paprsek představíme jako proud světelných částic (fotonů), evokuje to v hlavě přirozeně představu šířícího se proudu částic - paprsku.

Je tu však jeden problém: jak foton "ví", že pokud cestuje z bodu A do bodu B skrze nějakou optickou soustavu, že si má vybrat dráhu takovou, aby to zvládl za nejkratší možný čas? Mají snad fotony něco jako "vědomí"?

A je vůbec světlo vůbec proudem fotonů? Experimenty s úzkými štěrbinami vykazují chování, které nelze pomocí tohoto modelu vysvětlit. Naše částice zahýbají i do míst, kudy by se podle našeho modelu neměly vůbec šířit - dochází k ohybu světla. Vezmeme-li štěrbinu dvě, dochází k dokonce jevu zvanému interference světla. Tyto experimenty naznačují, že světlo není ve skutečnosti proudem jakýchsi částic ("kuliček"), ale spíše vlnami.

Pokud se však jedná o vlnění, tak co se vlastně vlní? Hodíme-li doprostřed rybníku kámen, vidíme kruhově šířící se vlny. Ano, vlny ... vlny tvořené z vody. Pokud začneme foukat na flétnu, šíří se zvuk, což je také jakási forma vlnění - jedná se o zřetřování a zhušťování molekul vzduchu. Opět je to ale vlnění něčeho ... vlnění vzduchu. Ovšem pokud je světlo vlnění, co se teda vlastně vlní?

James Clerk Maxwell se zabýval teorií elektromagnetismu. Shrnuj ji do čtyř rovnic, které popisují široké spektrum elektrických a magnetických jevů. Co však bylo velkým překvapením, které málokdo čekal: z jeho teorie vyplynula existence elektromagnetických vln. Pokusy vědců, jako například Heinricha Hertze, vedly k experimentálnímu potvrzení, že tyto vlny opravdu existují a přenáší se prázdným prostorem. To spustilo řetězec snah o vybudování bezdrátové komunikace - a to se také skutečně povedlo.

Maxwellova teorie nám však dala víc, než jen toto - z jeho rovnic lze odvodit, že tyto vlny se šíří rychlostí $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, což pro vakuum dává hodnotu zhruba $3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$. Zajímavé shoda okolností ... vyšlo stejné číslo, jako pro rychlost šíření světla. Inu, ta shoda okolností byla až příliš podezřelá ... Maxwella napadlo, že ono záhadné světelné vlnění nějak hluboce s elektřinou a magnetismem souvisí. A to sice takto: světlo je speciální druh elektromagnetického vlnění (s vlnovou délkou mezi 390 a 760 nm). Jeho hypotéza byla potvrzena mnoha experimenty -

jmenujme například Faradayův jev, který způsobuje polarizaci světla uvnitř magnetického pole.

Maxwellovy rovnice se tedy staly teoretickým základem pro optiku. Ukázalo se, že světlo je elektromagnetické vlnění. Dobrá, ale vlnění čeho? Fyzici přišli s představou jakéhosi neviditelného média - éteru - jehož vlnění představuje šíření světla. Tato představa přirozeně vedla ke snaze prozkoumat různé vlastnosti tohoto záhadného éteru - například určit jeho klidovou soustavu, vůči níž je éter v klidu. Snaha o nalezení této soustavy vyústila ve slavný Morley-Michelsonův experiment. Jeho výsledek však byl naprostým šokem: nic jako éter neexistuje a rychlost světla je ve všech inerciálních soustavách a ve všech směrech stejná, šířilo se světlo ve vakuu. Bude tedy lepší, když si elektromagnetické pole nebudeme představovat jako vlnění nějakého média. Jak si tedy ono "elektromagnetické vlnění" představit?

Ještě než definujeme, co to je vlnění, seznámíme se nejdříve s pojmem pole.

Snad nepřijatelnější představu o elektrickém poli získáme, pokud každému bodu v prostoru přiřadíme určitou vlastnost: pokud do něj umístíme nabitý nabitý objekt, začne na něj působit elektrická síla. Tato vlastnost však v daném místě prostoru existuje, aniž by tam fyzicky nějaký náboj byl.

Podobně magnetické pole - každému bodu prostoru přiřadíme tuto vlastnost: pokud tam umístíme pohybující se nabitý objekt (a směr pohybu nebude různoběžný se směrem magnetických siločar), tak na něj bude působit magnetická síla. Opět zdůrazněme, že existence magnetického pole není podmíněna přítomností náboje - pole existuje nezávisle na jeho přítomnosti.

Dobrá, to jsme vysvětlili pojem elektromagnetického pole. Dále by se hodilo vědět, co to je vlnění. Zkusme si představit dvojrozměrné pole jakožto hladinu rybníku. Pro každou dvojici souřadnic x, y a každý čas t mohu zavést funkci $z = z(x, y, t)$, která mi popisuje, jak vysoko se hladina vody nachází. Upozorněme zde, že vlnu si nemusíme nutně vždy předstávat jako sinusoidu: periodičnost funkce z vůbec není nutná. O této funkci budeme předpokládat pouze to, že je spojitá a diferencovatelná - pak se jedná o vlnu. Jednoduché, ne? Vlnění není nic jiného, než pole, které se spojitě s časem mění.

Inu, elektromagnetické vlnění je tomu velmi podobné - akorát místo závislosti výšky hladiny vody $z = z(x, y, t)$ budu popisovat závislost elektrické intenzity $E = E(x, y, z, t)$ a magnetické indukce $B = B(x, y, z, t)$. A ještě jednou - elektrická intenzita a magnetická indukce nejsou něco fyzicky představitelného (jako výška hladiny vody), je to spíš jakási skrytá vlastnost prostoru, která se může a nemusí projevit.

Budeme se tedy teď držet představy světla jakožto elektromagnetických vln (i když kvantová mechanika ukazuje, že i tato představa není zcela správná). Vlnová teorie předpovídá široké spektrum optických jevů - jako například difrakci světla, interferenci, polarizaci nebo disperzi. Aby to neznělo tak suše,

připomeňme si důsledky těchto jevů, jež vidíme občas kolem sebe:

Když jdeme do 3D kina, nasadíme si polarizační brýle - levý filtr propustí obraz pouze pro levé oko, zatímco pravý filtr propustí obraz pouze pro pravé oko. Tím vzniká iluze trojrozměrného vidění.

Díky interferenci dokážeme vytvářet hologramy, které zachycují trojrozměrnou informaci o obraze na dvojrozměrný povrch. Tuto informaci pak můžeme kdykoliv zrekonstruovat. Hologramy mají použití například na bankovkách jako ochrana proti padělání.

Díky difrakci rentgenového záření (což je také elektromagnetické vlnění, jen s kratší vlnovou délkou) umíme zjišťovat něco o struktuře krystalů a velikosti krystalové mřížky. Je neuvěřitelné, že dokážeme zjistit něco o něčem tak malém, jako je $10^{-10}m$! Princip je založen na tom, že záření o přesně definované vlnové délce se na daném krystalu odráží jen pod přesně danými úhly. Za pomoci Braggovy difrakční podmínky pak dokážeme zpětně určit vzdálenosti atomů v krystalu.

I s disperzí se běžně setkáváme: stačí si vzpomenout na úžasnou povídanou na obloze, když svítí slunce a přitom prší - dochází k lomu světelných paprsků a různé barvy (různé vlnové délky) se lámou pod různými úhly. Výsledkem je pestrobarevný oblouk zvaný duha.

Tím vším chci jen dokumentovat, že představa světla jakožto elektromagnetických vln je velmi dobrá a vysvětluje spoustu věcí kolem nás. Bohužel, v jiných experimentech (jako je třeba fotoelektrický jev) tento popis selhává. A ve fyzice platí pravidlo, že pravdivé je pouze to, co se shoduje s experimentem. Neberme to tedy prosím tak, že světlo je zcela jen elektromagnetické vlnění tak, jak o popisují Maxwellovy rovnice. To totiž bohužel není pravda.

V případě fotoelektrického jevu se více hodí si představit světlo jako proud částic - fotonů. Přitom víme, že představa fotonů není příliš blízká realitě, pokud se provede jiný experiment - třeba difrakci světla. Světlo tedy nejsou ani částice, ani vlny, ale tak nějak obojí dohromady. Pokud se s tímto mlhavým popisem nespokojíme (a ano, na to má každý právo), je potřeba šáhnout hlouběji: do kvantové elektrodynamiky. To je však nad rámec této práce.

Na závěr tohoto dlouhého povídání (ano, historie zkoumání světla je bohatá, nepřišlo by mi fér odbýt ji pár slovy) bych tedy rád řekl, že v příští kapitole světlo považuji za elektromagnetické vlnění, vědom si toho, že můj model reality nebude zcela přesný.

20 Dodatek 2: Fermatův princip šíření světla - odvození z Maxwellovy teorie

Jak už jsme zmínili v minulé kapitole, světlo má jednu záhadnou a pro člověka netriviální vlastnost: pokud se šíří z bodu A do bodu B , pak se šíří takovým způsobem, aby danou dráhu urazilo za (lokálně) nejkratší možný čas. Také jsem v minulé kapitole zmiňoval, že světlo má dost často charakter elektromagnetického vlnění, které je kompletně popsáno Maxwellovými rovnicemi. Cílem této kapitoly bude spojit tyto dvě netriviální tvrzení dohromady a ukázat tak, že Fermatův princip není "magie", ale nutný důsledek něčeho velmi fundamentálního. Pokusíme se tedy tento princip vyvodit přímo z Maxwellových rovnic.

Náš důkaz bude mít 3 hlavní části:

- 1) Z Maxwellových rovnic odvodíme vlnovou rovnici světla (pro izotropní prostředí bez nábojů a proudů)
- 2) Z vlnové rovnice světla odvodíme paprskovou rovnici (aneb zavedeme pojem paprsku, který je v jistém smyslu duální k pojmu vlnoplochy)
- 3) Ukážeme ekvivalenci paprskové rovnice a Fermatova principu

Paradoxně ve našem důkazu začneme "od konce", tj. od bodu 3. Ještě, než se do důkazu pustíme, pokusím se vysvětlit, proč chci vést postup právě tímto na první pohled podivným způsobem.

Představte si, že navštívíte vystoupení kouzelníka. Každý dobrý kouzelník má vždycky připravené kouzlo, které vás něčím překvapí a uchvátí. A vy, jakožto zvědaví jedinci, se snažíte přijít na to, jakým trikem to ten kouzelník jenom mohl provést. A když nad tím přemýšlíte, vycházíte z toho, co jste viděli a slyšeli a pokoušíte si v hlavě představit skryté mechanismy, které probíhají v pozadí. Některé z těchto představ jsou nesmyslné, a tak je zavrhnete. Jiné vypadají nadějně, a tak o nich začnete přemýšlet hlouběji a seriózněji. A třeba se nakonec treffíte a navrhnete mechanismus, kterým byste byli dané kouzlo schopni zrealizovat i vy sami.

Na Fermatův princip se teď díváme jako na magii, které nerozumíme a snažíme se ji vysvětlit na základě něčeho, co už známe. Bylo by ale dobré trochu si nejprve promyslet, k čemu vlastně chceme dospět - co má vlastně náš "mechanismus" být schopen "vyčarovat". A to bez zbytečných slov "abakadabra", které slouží jen pro pobavení diváků a větší teatrální efekt. Jinými slovy, princip minimalizace (resp. lokální extremalizace) času je filosoficky impozantní, ale je tu ještě něco v pozadí, co nevidíme. Podívejme se tedy nejprve, s čím je Fermatův princip ekvivalentní.

Důkaz ekvivalence paprskové rovnice a Fermatova principu

Předpokládejme tedy, že prostředí, jehož optické vlastnosti jsou popsány spojitou funkcí $n(x, y, z)$. Tato funkce nám udává, kolikrát se světlo šíří v

daném bodě pomaleji, než by se šířilo ve vakuu. Této funkci se říká index lomu. A v tomto prostředí máme paprsek světla, který se šířil z bodu A do bodu B . Představme si na chvíli by se světlo mohlo šířit po naprosto libovolné dráze. Čas potřebný k uražení této dráhy označme T . Příslušná dráha je nějaká křivka ve třírozměrném prostoru, a taková křivka lze určitě popsat trojicí závislostí $x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau)$ pro nějaký reálný parametr τ . Jaký čas to tedy světlu potrvá, než se dostane z bodu A do bodu B ? Zjevně to bude:

$$\begin{aligned} T &= \int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\frac{c}{n}} = \frac{1}{c} \int n ds = \frac{1}{c} \int n \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \\ &= \frac{1}{c} \int n \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2} d\tau = \frac{1}{c} \int n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} d\tau \quad (44) \end{aligned}$$

V tomto vztahu jsem zavedl značení $x' := \frac{dx}{d\tau}$, analogicky pro zbylé souřadnice. Všimněme si, že v průběhu odvozování se zde vyskytl diferenciál délky ds , který jsem postupně upravil do tvaru $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} d\tau$. Odtud plyne, že platí rovnost

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (45)$$

Ve vztahu (44) jsem získal vyjádření času T v závislosti na konkrétní dráze: $T = \frac{1}{c} \int n(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} d\tau$. A podle Fermatova principu má být tento čas co nejmenší - snažím se tedy vybrat vhodnou křivku, aby toto platilo. Jinými slovy se snažím extremalizovat zmíněný funkcionál. Výběr vhodné křivky je ale totéž jako výběr závislostí $x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau)$. A protože volím tyto závislosti naprosto nezávisle na sobě, mohu dvě z nich zafixovat a jako volnou závislost mohu na chvíli považovat jen jednu. Zvolme si tedy třeba závislost $x = x(\tau)$ a extremalizujme náš funkcionál vzhledem k ní:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(n(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \left(n(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) \right) = 0$$

Odtud po provedení parciálních derivací dostáváme:

$$\frac{\partial n}{\partial x} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - \frac{d}{d\tau} \left(n \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) = 0$$

Jak už jsme výše ve vztahu (45) jednou zmínili, výraz pod odmocninou je roven $\frac{ds}{d\tau}$. To nám předchozí vztah značně zjednodušuje:

$$\frac{\partial n}{\partial x} \frac{ds}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} \left(n \frac{x'}{\frac{ds}{d\tau}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} \frac{ds}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(n x' \frac{d\tau}{ds} \right)$$

Operátor derivace $\frac{d}{d\tau}$ vpravo můžeme podle řetízkového pravidla přepsat jako $\frac{ds}{d\tau} \frac{d}{ds}$. V dalším kroku pak pokrátíme obě strany rovnice výrazem $\frac{ds}{d\tau}$:

$$\frac{\partial n}{\partial x} \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} \frac{d}{ds} \left(nx' \frac{d\tau}{ds} \right) \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d}{ds} \left(nx' \frac{d\tau}{ds} \right)$$

Rádi bych se v této rovnici zbavil jakékoliv závislosti na parametru τ , protože ten je v této situaci z fyzikálního hlediska umělý a nepopisuje nic reálného. To se nám podaří, pokud si uvědomíme, že x' má vlastně význam $\frac{dx}{d\tau}$. Po dosazení a následném použití řetízkového pravidla se proměnné τ skutečně zbavím:

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} \right) \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right)$$

Poslední odvozený vztah jsem odvodil pro souřadnici x , totéž bych ale samozřejmě mohl odvodit i pro souřadnice y, z . Pokud bychom tyto tři vztahy sloučili do jediného vektorového, dostali bychom:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y}, \frac{\partial n}{\partial z} \right) = \frac{d}{ds} \left(n \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) \right)$$

$$\nabla n = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \quad (46)$$

kde \vec{r} je polohový vektor paprsku. Rovnici (46) říkáme paprsková rovnice. Když se na tento vztah, vidíme že zde vystupuje index lomu n a polohový vektor r . Tento vztah nám tedy dává do souvislosti vlastnosti optického prostředí a trajektorie paprsků. Mohli jsme samozřejmě postupovat i obráceně a ze paprskové rovnice odvodit Fermatův princip. Každopádně vidíme ekvivalenci obou tvrzení a bod 3) můžeme v našem důkazu považovat za hotový.

Vyvození vlnové rovnice z Maxwellovy teorie

Dobrá, zatím jsme si jen hráli s geometrií paprsků, ale co s tím má co společného světlo? Kdybychom tytéž úvahy prováděli pro rybky plovoucí v akváriu, mělo by to asi stejnou vypovídající hodnotu. To, co nám zatím v naší úvaze chybí, je fyzika. Jak už jsme řekli v minulé kapitole, světlo je speciálním případem elektromagnetického vlnění. A toto vlnění je popsáno soustavou čtyř elegantních rovnic:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \nabla \times \vec{H} - \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E}\end{aligned}$$

Samozřejmě je potřeba těmto symbolům dát konkrétní fyzikální význam:

\vec{E} ... intenzita elektrického pole
 \vec{D} ... elektrická indukce
 \vec{H} ... intenzita magnetického pole
 \vec{B} ... magnetická indukce
 ρ ... hustota elektrického náboje
 \vec{j} ... hustota elektrického proudu

Dále okomentujme Maxwellovy rovnice z hlediska jejich významu:

rovnice vlevo nahoře ... určuje počáteční stav elektrického pole
rovnice vpravo nahoře ... určuje časový vývoj elektrického pole

rovnice vlevo dole ... určuje počáteční stav magnetického pole
rovnice vpravo dole ... určuje časový vývoj magnetického pole

Všechny tyto rovnice dohromady krásně fungují a popisují (téměř) veškeré elektrické a magnetické jevy, které mohou nastat ve vakuu. To je ovšem pro praktické použití těchto rovnic často málo, neb obvykle se zabýváme experimenty i mimo vakuum. Poslední věc, kterou je k těmto úžasným rovnicím potřeba doplnit, jsou tzv. materiálové vztahy, které nám říkají, jak se šíří a jaký vliv má elektrické a magnetické pole v nějakém konkrétním prostředí:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E}, & \text{kde } \epsilon & \text{ je tenzor permitivity daného prostředí.} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}, & \text{kde } \mu & \text{ je permeabilita daného prostředí.} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E}, & \text{kde } \sigma & \text{ je měrná elektrická vodivost.}\end{aligned}$$

Všechny potřebné vztahy a veličiny máme zavedené. Nyní bychom tedy rádi nahlédli, že světlo je elektromagnetické vlnění - aneb odvodili vlnovou rovnici. Nezapomeňme však při tomto odvozování na povídání z předchozí kapitoly, že pod písmeny, jako je \vec{E} nebo \vec{B} si nemáme představovat nic fyzického, ale prostě jen pole. Ale teď už dost povídání a pusťme se do výpočtů!

Vezměme rovnici popisující vývoj magnetického pole a aplikujme na obě její strany diferenciální operátor rotace:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \nabla \times \vec{E}$$

Na pravé straně použiju (snad) známou vektorovou identitu, že pro každou (matematicky) rozumnou vektorovou funkci \vec{F} platí $\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$. Rovnice přejde do tvaru:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \Delta \vec{E}$$

Na levé straně mohu prohodit operátor rotace a časové derivace:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \Delta \vec{E}$$

Mezi magnetickou indukcí \vec{B} a magnetickou intenzitou \vec{H} existuje jednoduchý převod - materiálový vztah $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Po dosazení a vytknutí μ dostáváme:

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) = -\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \Delta \vec{E}$$

Všimněme si, že člen $\nabla \times \vec{H}$ se vyskytuje v rovnici určující vývoj elektrického pole. Můžeme odtud vyjádřit $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$ a dosadit do minulé rovnice:

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) = -\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \Delta \vec{E}$$

Protože se pohybujeme v prostředí bez proudů, je zjevně $\vec{j} = 0$:

$$\mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = -\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \Delta \vec{E}$$

Nyní už v našem vztahu figurují jen elektrické veličiny - elektrická intenzita a indukce. Zbavme se elektrické indukce použitím druhého materiálového vztahu $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Tím nalevo získáme:

$$\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \Delta \vec{E}$$

Jedna z Maxwellových rovnic říká, že $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$. Prostředí je ale bez nábojů, takže $\nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0$, proto a celý první člen na pravé straně minulé rovnice zmizí:

$$\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Tím jsme odvodili tzv. vlnovou rovnici. Klidně ji můžeme rozdělit na jednotlivé kartézské složky. Vybereme si třeba x -ovou složku: $\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$

Z matematiky je známo, že rovnici tvaru $\frac{\partial f^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ řeší každá funkce f , která je závislá pouze na argumentu $x - vt$. Geometricky si lze takové řešení představit jako funkci šířící se rychlostí v ve směru osy x .

Pokud tedy ztotožníme $\epsilon\mu = \frac{1}{v^2}$, dostaneme odtud, že elektromagnetické vlny se šíří rychlostí $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. Pro vakuum, ale i pro izotropní nevodivé materiály experimenty ukazují, že rychlost šíření světla je stejná jako je tato rychlost elektromagnetických vln. Vše tedy napovídá, že světlo není nic jiného než elektromagnetické vlny. Tím jsme tedy splnili část důkazu 1).

Cesta od vlnové rovnice k rovnici paprskové

Nyní jsme tedy v pozici, kdy už víme, že světlo jsou vlny (víme z části 1), a přitom se ale snažíme na něj nahlédnout jakožto na paprsky (k čemuž nás motivuje paprsková rovnice odvozená v části 3). Dobrá, zkusme tyto dva pohledy nyní propojit. Abychom to mohli udělat, musíme se více zamyslet nad tím, jak ony světelné vlny vypadají.

Ačkoliv vlnovou rovnici splňuje každá funkce závislejší pouze na argumentu $x - vt$, ve skutečnosti je světlo velmi specifický typ vln: jedná se o vlny harmonické, mající velmi malou vlnovou délku (mezi 390 a 790 nm) a obrovskou frekvenci kmitání. Takové vlny můžeme popsat rovnicí $E_x = E_0 \cdot \cos(\omega(t - \frac{x}{v}))$. V komplexní symbolice závislost vypadá takto:

$$E_x = E_0(x, y, z) \Re(e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{v_x} x})$$

$$E_x = E_0(x, y, z) \Re(e^{-i\omega t} e^{ik_x x})$$

kde k_x je definováno jako $k_x := \frac{\omega}{v_x}$. Obdobně bych mohl definovat k_y, k_z . Vektoru $k = (k_x, k_y, k_z)$ se říká vlnový vektor. Často se však pracuje čistě jen v komplexních číslech a teprve když nás zajímá konkrétní fyzikální hodnota, určí se reálná část. Proto můžeme psát:

$$E_x = E_0(x, y, z) e^{-i\omega t} e^{ik_x x}$$

Složka elektrického pole E_x lze také psát ve tvaru

$$E_x = E_0(x, y, z) e^{-i\omega t} e^{i\frac{k_x}{n} S(x, y, z)}$$

kde n je index lomu daného prostředí a $S(x, y, z)$ je tzv. eikonál. Množina všech bodů s konstantní hodnotou eikonálu tvoří světelnou vlnoplochu. Označíme-li $A := E_0(x, y, z) e^{-i\omega t}$, pak dosazením do vlnové rovnice dostanu tzv. Helmholtzovu rovnici:

$$\Delta A + k^2 A = 0$$

Chceme tedy spočítat ΔA , takže postupně počítejme parciální derivace:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x} e^{i\frac{k_x}{n} S} + i \frac{k_x E_x}{n} \frac{\partial S}{\partial x} e^{i\frac{k_x}{n} S}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + 2i \frac{k_x}{n} \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + i \frac{k_x E_x}{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{k_x^2 E_x}{n^2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right) e^{i \frac{k_x}{n} S}$$

Podobný výpočet bych mohl provést i pro y -ovou a z -ovou složku. Dosadíme-li do Helmholtzovy rovnice a následně ji přenásobíme zlomkem $\frac{n^2}{k_x^2 E_x}$, dostaneme vztah:

$$\frac{n^2}{k_x^2 E_x} \Delta E_x + 2i \frac{n}{k_x E_x} (\nabla E_x \nabla S) + i \frac{n}{k_x} \Delta S - (\nabla S)^2 + n^2 = 0$$

Protože vlnová délka $\lambda \rightarrow 0$, roste k_x do nekonečna. Předchozí vztah se tedy redukuje na:

$$-(\nabla S)^2 + n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\nabla S| = n$$

Poslední vztah se nazývá základní rovnice optiky a dává do souvislosti index lomu a eikonál. Geometricky tento vztah můžeme interpretovat tak, že index lomu určuje, jak vzdálené jsou od sebe jednotlivé vlnoplochy (a tedy jak rychle se šíří světlo).

Od vlnoploch k paprskům už vede velmi krátká cesta. Aplikují-li gradient na vztah $|\nabla S| = n$, dostanu:

$$\nabla n = \frac{d}{ds} (\nabla S)$$

Když se nyní zamyslíme, co to je paprsek, mohou nás napadnout dvě interpretace. Zavedu-li směrový vektor paprsku $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$, pak si stačí uvědomit fakt, že paprsek musí nutně být kolmý k vlnoploše, a tedy $\vec{s} = \frac{\nabla S}{n}$ a srovnáním mohu dostat, že $\nabla S = \frac{d\vec{r}}{ds} n$. V předchozím vztahu mohu tedy nahradit výraz ∇S :

$$\nabla n = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right)$$

To je však přesně rovnice (46), kterou jsme chtěli dostat! Ukázali jsme tedy, že z vlnové rovnice se dá vyvodit Helmholtzova rovnice a ta má při limitě $\lambda \rightarrow 0$ řešení, jen pokud platí tzv. základní rovnice geometrické optiky. Pokud však platí ta, lze ukázat z vlastností eikonálu, že místo vlnoploch můžeme efektivně pracovat s paprsky a získáme paprskovou rovnici. No a ta je přece ekvivalentní Fermatovu principu nejkratšího času.

Závěr:

V práci jsem vysvětlil použité matematické metody variačního počtu a i fyzikální principy, o které se opírám. Poté jsem řešil mnoho fyzikálních úloh, k jejichž řešení se variační metody hodí. Jsem si vědom toho, že jsem zdaleka neobsáhl všechny témata, jichž se variační počet týká – například problém minimálních ploch v kontextu s tvarem bublin, nebo hledání trajektorie v gravitačním poli jakožto geodetiky v zakřiveném časoprostoru.

Seznam použité literatury a jiných pramenů

Použitá literatura:

- [1] Teoretická mechanika – M.Brdička, A.Hladík - Academia kapitoly 10 až 13
[2] Optika – P.Malý - Nakladatelství Karolinum kapitola 20
[3] Všeobecná fyzika 3 – optika – Nakladatelství ALFA kapitola 20
[3] Matematická analýza I, II, III – J.Kopáček – Nakladatelství Karolinum kapitoly 14 a 15
[4] Úvod do integrálního počtu - V. Jarník - Academia kapitoly 14 a 15
[5] Variační počet – L.E.Elsogle - Státní nakladatelství technické literatury kapitoly 2 až 8
[6] Kurs variačního počtu - M.A.Lavrentjev, L.A.Ljusternik – Přírodovědecké nakladatelství kapitoly 2 až 8
[7] Feynmanovy přednášky z fyziky I, II - R. Feynman, M. Gottlieb, R. Leighton – Fragment kapitola 10, 12 a 19
[8] Geometry of Conics (Mathematical World) – A.V.Akopyan, A Zaslavsky kapitola 9

Dále jsem čerpal z webů:

- Web J.Podolského a J.Langerera o teoretické mechanice kapitola 12
<http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/OFY003/>
Web, kde jsou uvedeny početní triky pro výpočet geodetiky na sféře kapitola 18
<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/reh10/lectures/>

Tvorba obrázků:

Obrázky jsem kreslil v programech Malování, Gnuplot nebo GeoGebra

