Kospočetná topologie a míra

A

1. $X \neq \emptyset$. $\tau_X = \{ U \subseteq X \mid U = \emptyset$ nebo $X \setminus U$ spočetná $\}$

↳ U se nazve kospočetná

a) X spoč. $\Rightarrow \tau_X = 2^X$ } tj. $U = \emptyset$ nebo U kospoč.

b) τ_X je topol.: de Morgan (ukázat podrobně)

"Těžší" snad je jen: $A, B \in \tau_X$. Pak $X \setminus A \cap B =$ $X \setminus A \cup X \setminus B$. $A \vee B$ prázdná $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \in \tau_X$

A i B neprázdná $\Rightarrow X \setminus A \wedge X \setminus B$ spočetné.

Sjednocení spoč. je spočetná. $\square$

2. Buď B Borelova pro lib. top. P_X. Pak B je minimální σ-alg. obsahující P_X. Pokud B' je minimální obsahující P_X, je Borelova.

Dk.: a) B je nejmenší $\Rightarrow$ B je minimální.

b) Nechť B' je minimální. Chci je Borelovu, tj. nejmenší.

Prospor: $\exists B''$ $B'' \not\supseteq B' \Rightarrow B' \neq B'' \Rightarrow B' \cap B'' \subsetneq B'$, tj. B' není min. ↯. Celkem B' je Borelova.

Použili jsme: $B' \cap B''$ je σ-alg. (obsahující P_X). Průnik σ-alg. je σ-alg. (snadné). $\square$

- Bod 2 umožňuje Borelovu (σ-)algebru definovat ekv. jako minimální σ-algebru obsahující P_X.

3. $\Sigma_X := \{ A \subseteq X \mid A$ spočetná $\vee$ A kospočetná $\}$ je Bor. σ-algebrou pro kospoč. topologii na X

Dk.: Opět snadné: $\emptyset, X \in \Sigma_X$. Rozdíl snadné: i) A spoč. ii) A kospoč. a $A = X \setminus (X \setminus A)$. Sjednocení snad těžší.

A_i, $i \in I$ (spoč.), $A_i \in \Sigma$ i) A_i $\forall$ spočetné. Pak $\bigcup_{i \in I} A_i$ spoč. (spoč. sjedn. spoč.), tj. $\in \Sigma_X$

ii) $\exists j$, A_j kospočetné. $A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \;/X \setminus \Rightarrow X \setminus A_j \supseteq$ spoč. $\supseteq X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ kospoč.

$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow$

tj. $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Sigma_X$.

Dále: Σ_X je minimální. Sporem. Nechť $\exists \Sigma' \subsetneqq \Sigma_X$. Zjednodušme si: Σ' vznikla vynětím, spočetné nebo kospočetné, množiny nebo množin ze Σ_X. (B)

α) X spoč. $\Rightarrow \tau_X = 2^X$. Jelikož Borelova alg. je σ-alg. na $X \Rightarrow \subseteq \Sigma_1^X$, tak $\underline{\Sigma' \subsetneqq \Sigma \subseteq 2^X} \Rightarrow \Sigma'$ neobsahuje τ_X

β) X nespoč. i) Ze Σ_X vyjmu kospoč. A_0, tj. $X \setminus A_0$ spoč.

$\Rightarrow A_0 \in \tau_X \Rightarrow$ po vynětí algebra neobsahuje τ_X, tj. není Borelova pro uvažovanou τ_X

ii) Ze Σ_X vyjmu spoč. A_0. „Zkoumám" $X \setminus A_0$. $X \setminus (X \setminus A_0) = A_0$, spoč.

tj. $X \setminus A_0$ kospoč. $\Rightarrow X \setminus A_0 \in \tau_X \Rightarrow X \setminus A_0$ musí přísl. Borelově patřit $\xRightarrow{\text{def } \sigma\text{-alg.}}$ $X \setminus (X \setminus A_0)$ také. Ale $X \setminus (X \setminus A_0) = A_0$ jsem vyňal i ↯.

<u>Def</u>: Σ_X buď Borelova pro kospoč. topologii na $X \neq \emptyset$.

<u>+ tvrzení</u> Pak $\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{spoč.} \\ 1 & \text{kospoč.} \end{cases}$ (kospoč. míra) je míra na Σ_X

Dk.: 1) X spoč.: $A, B \in \Sigma_X \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow A, B$ spoč. $\Rightarrow$ $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ triv. (sj. spoč. je spoč.)

2) X nespoč.: α) $A, B \in \Sigma_X$, $A \cap B = \emptyset$, obě spoč., viz 1)

β) A spoč., B nespoč. $\in \Sigma_X$, $A \cap B = \emptyset$. Pak $A \cup B$ nespoč. a ném $\mu(A \cup B) = 1 = 0 + 1 = \mu(A) + \mu(B)$

γ) $A, B \in \Sigma_X$, $A \cap B = \emptyset$, obě nespoč. Nemůže nastat. Pakud totiž $A \cap B = \emptyset$, pak $X = X \setminus A \cap B = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. A, B nespoč. $\Rightarrow X \setminus A$ a $X \setminus B$ spoč. (def Σ_X). Shrnuto nespoč. = spoč. $\cup$ spoč. ↯

Pozn.: Obdobnými metodami zjistíme: X nespoč. $\Rightarrow \tau_X$ kospočetná není Hausdorffova. ©
(Namísto Morganových pravidel malu použít i (zmíněné) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq X \setminus B$ nebo $B \subseteq X \setminus A$ a pak BÚNO, triviální.)

Ad čtvrtek: Pro $X = \mathbb{R}$ s kospoč. $\wedge$ U otevřená $\wedge$ $U \supseteq \mathbb{Q}$ jsem řekl U obsahuje interval. To jsem byl ale opět u X s Eukleidovou... Pro kospoč. to nepotřebuji, jak jsme se zmínili: U ot. $\Rightarrow$ $U = \emptyset$ nebo $\mathbb{R} \setminus U$ spoč. $\Rightarrow$ • $U = \emptyset$ nenastane ($\mathbb{Q} \subseteq U$)
• U nespoč., jinak by $\mathbb{R} \setminus U$ nespoč.

Ale U nespoč $\Rightarrow \mu(U) = 1$. (Toto jsme chtěli.)

• Kospoč. míra je lok. kon. ($\mu \leq 1$), tj. našli jsme lok. kon., jež není Radonova.

• Přesný protipříklad na: $U \subseteq \mathbb{R}$ otevř. v kospoč. $\wedge$ $U \supseteq \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ U obsahuje interval: $U := T \cup \mathbb{Q}$, kde T jsou transcendentní. ($U = I$ nefunguje: $I \not\supseteq \mathbb{Q}$; $U = I \cup \mathbb{Q}$ ($= \mathbb{R}$) intervaly má, tj. také nef.).
$T \cup \mathbb{Q}$ intervaly nemá. Každý (a,b) obsahuje číslo, jež není transcendentní, ani racionální [nějakou n-tou odm. z racio]

• Obrázek: ~~× × ×( )×~~ očísluji $\mathbb{Q}$ pomocí $\mathbb{N}$ a vezmu interval. To nefunguje, neboť „předpokládám", že očíslování $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ respektuje uspořádání.
↯ Nechť $\varphi(1) := q_1 \wedge \varphi(2) := q_2$. $1 < 2 \Rightarrow q_1 < q_2$. Ale $\exists$ q_3: $q_1 < q_3 < q_2$. φ očíslování $\mathbb{Q} \Rightarrow \varphi$ surj. $\Rightarrow \exists$... jasné.