Principy harmonické analýzy

OBSAH

Literatura

Deitmar, A; Echterhoff, S. : Principles of harmonic analysis.

Dixmier, J.; C*-algebras and their representations.

Segal, I.; the group algebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc. 61, 1947.

Principy harmonické analýzy

① PROLOG

(~ Four. ≈ 1822)

1. Rovnice vedení tepla

$$\Delta u = \partial_t u, \quad u : I \times U \to \mathbb{C}, \quad I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$$

U otevřená v $\mathbb{R}^n$, $\quad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

u je $\mathcal{C}^2$ vůči x a u je $\mathcal{C}^1$ vůči t … $u(t,x)$

Příklad: $\partial_x^2 u = \partial_t u$, tj. v $\mathbb{R}^1$, $t \in (0,\infty)$, $U = (0,2\pi)$ pro jednoduchost.

Předpokládejme, že $u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) e^{inx}$,

tj. „existenci Fourierovy řady" $\forall t \in (0,\infty)$ (vůči x).

Variace Dirichlet-Jordan kritéria

• Existence $\partial_x^2 u$ abs. spojité a $\partial_x^3 u \in L^2(0,2\pi)$
$\Rightarrow$ stejnom. konvergence $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) (e^{inx})^{(k)}$
$k = 0,1,2$ k $\partial_x^k u(t,x)$.

[[Pro $k=0$ dostáváme i existenci F. řady zmíněné výše. „Existence F. řady „v L^2" je snažší, ale neříká nic o konvergenci derivací. (Ex. v L^2 míníme konvergenci řad v L^2-normě.)]]

Důležité připomenutí: Je-li $f \in L^2(a, a+\ell)$, $a \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, pak $a_n := \frac{1}{\ell} \int_a^{a+\ell} f(x) e^{\frac{-2\pi i n x}{\ell}} dx$ nazýváme Four. koeficientem f a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{\frac{2\pi i n x}{\ell}}$ Fourierovou řadou f, bez ohledu na to zda (řada) konverguje k f. (Proto sousloví ‚existence F. řady…' jsou v uvozovkách.)

F. Řada f nemusí konvergovat pro ‚žádné' x (natož k f :-))

Předpokládejme tedy, zpět k rovnici vedení tepla, že $\forall t$ je $\partial_x^2 u$ abs. spojitá a $\partial_x^3 u \in L^2(0,2\pi)$. Počítejme

$$\partial_x^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t) e^{inx} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{stejn. konv. pro } k=2\\ \text{zmíněná výš.}}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \partial_x^2 a_n(t) e^{inx} = \boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2 a_n(t) e^{inx}}.$$

Předpokládejme stejnoměrnost konvergence $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{(p)}(t) e^{inx}$ (p-tá der. v t) pro $p=0,1$ (tj. v $\underline{\underline{t}}$ a i pro derivaci).

Můžeme počítat $\partial_t \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t) e^{inx}\right) =$

$$\boxed{= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \partial_t a_n(t) e^{inx}}.$$

Srovnáním a díky jedn. Four. řad ($\partial_x^2 u$ i $\partial_t u$ jsou z L^2, neb u splňuje rci vedení tepla) je $-n^2 a_n(t) = \partial_t a_n(t)$, tj. $a_n'(t) + n^2 a_n(t) = 0$.

Asociov. rovnice (charakteristická) je $\lambda + n^2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda = -n^2$ a $a_n(t) = C_n e^{-n^2 t}$, kde C_n je konstanta vzhledem ke t. Máme vzoreček

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}}.$$

Nevíme, ale že $u(t,x)$ „skutečně řeší rci vedení tepla" (záměna vůči ∂_t a Σ).

!! ZABÝVEJME SE JEN ZÁMĚNOU !!

- Pro pevné $\underline{x}$ stačí odhadnout $|C_n e^{-n^2 t} e^{inx}| \le D_n(x)$ nezávislým na t, příp. závislým na x, tak aby $\sum_{n\in\mathbb{Z}} D_n(x)$ konvergovala (princip Weierstrassova krit. stejn. konvergence). Počítejme $|C_n e^{-n^2 t} e^{inx}| = |C_n e^{-n^2 t}|$.

Nejmenší horní odhad je ~~to~~ nejmenší horní závora, tj.

supremum. Ale $\sup_{t\in(0,\infty)} |C_n e^{-n^2 t}| = |C_n| \sup_{t\in(0,\infty)} e^{-n^2 t} = |C_n|$ 3

Nyní (pro použití Weierstrasse) je nutné aby $\sum |C_n|$ konvergovala. To je jistě postačující.

„Trikem" lze ale dosáhnout i více možností (širší třídu) pro C_n. Zvolme $\delta > 0$.

Odhadneme $|C_n e^{-n^2 t}|$ na (δ, ∞).

$e^{-n^2 t}$ klesá na $(0,\infty)$, tj. $|C_n e^{-n^2 t}| \leq |C_n| e^{-n^2\delta}$.

Pokud $C_n = p(n)$, kde p je polynom

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n| e^{-n^2\delta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p(n) e^{-n^2\delta}$ konverguje, neb

$\forall p\ \exists n_0 \exists C\ \forall n \geq n_0\ p(n) \leq C e^{n^2\delta_1}$, $\boxed{\delta_1 < \delta}$

$|p(n) e^{-n^2\delta}| \leq C e^{n^2(\delta_1-\delta)} \leq C e^{n(\delta_1-\delta)}$

(geom. řada $\wedge$ < konv.). $\sum C_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ konv. stejnom na (δ,∞) $\forall \delta > 0$. ~~Konverguje tedy stejnom na~~ ~~$(0,\infty)$~~. % Konečně $\boxed{u(t,x) = \sum C_n e^{-n^2 t} e^{inx}}$ pro C_n polynom řeší $(\Delta - \partial_t) u = 0$. záměny v $t_1 > 0$ $(t_1 \in (\frac{t_1}{2}, \infty))$

v x_0 ... n. m. $\Rightarrow$ za $\tilde{C}_n$ vezmu $C_n n^2$

(„Realifikace" A_n, B_n polynomy v n $\Rightarrow$

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2 t} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$ řeší vedení tepla.)

Otázka jednoznačnosti ani za dodat. podm. na $\partial_x^2 u, \partial_x^3 u$ nejasná ... (v této úvaze!)

Skončili jsme na str. 3 poznámek u: CHYBNÉ ~~V~~YSV. 3 (3')

Pro c_n ~~je~~ polynom v proměnné n $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-n^2 t} e^{inx_0}$ konverguje stejnoměrně ~~na~~ vůči t na $(\delta, +\infty)$.

[A to $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ a $\forall \delta > 0$.]

→ Tvrdíme, že konverguje stejnoměrně (vůči t) i na $(0, +\infty)$

Tj. $\forall \varepsilon\ \exists n_0\ \forall t \in (0, \infty)\ \forall n \geq n_0\ |S_n(t) - S(t)| < \varepsilon$.

Dk. Sporem. Předp. tedy negaci:

$\exists \varepsilon_0\ \forall n\ \exists t_0^{(n)} \in (0, \infty)\ \exists n_0 \geq n\ |S_{n_0}(t) - S(t)| > \varepsilon_0$

Pokud toto platí, pak $t_0^{(n)} \in (\delta_0^{(n)}, +\infty)$ pro nějaké $\delta_0^{(n)} > 0$, a tedy $\exists \varepsilon_0\ \forall n\ \exists t_0^{(n)} \in (\delta_0, +\infty)\ \exists n_0 \geq n$

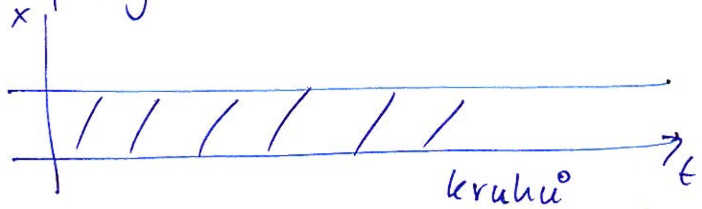
$|S_{n_0}(t) - S(t)| > \varepsilon_0$, ale to je přesně negace výroku o tom, že $\sum c_n e^{-n^2 t} e^{inx_0}$ konv. stejnoměrně vůči t na $(\delta_0, +\infty)$. Tento výrok jsme ale již dokázali, že platí. Dokázali jsme tedy stejn. konv. (vůči t) na $(0, +\infty)$.

DŮKAZ TOHOTO PROBÍHÁ JAKO ↑

Pozn.: Někdy se něco o záměnách „limitních procesů" na otevř. intervalech „unáší" ne snění s předpoklady o lok. st. konvergenci. Mám-li st. konv. na $(\delta, +\infty)$ $\forall \delta > 0$, mám lok. st. konv. na $(0, +\infty)$.

Nechť $t_0 \in (0, +\infty)$, pak vezmi $\left(\frac{t_0}{2}, +\infty\right)$, kde mám st. konvergenci. ~~Vokolí~~ $\forall t_0 \in (0, +\infty)$ ~~tedy~~ existuje tedy okolí t_0, kde je suma st. konv. ⇒ jde o lok. st. konv

• Uvědomme si, že jsme řešili $\Delta u = \partial_t u$ jen na pásu



. Jak je to na jiných oblastech (kruh, vnějšky kruhu, prstence, koule, sféry, válce). Především jak adaptovat konvergenční kritéria ($\in L^2$, $\partial^3 \in L^2$, Jord-Dir, stejnom. konv. atd)

• Zda $u(t,x)$ řeší "$\Delta = \partial$": zabývali jsme se jen zám. $\sum a\partial_t$, ale ONO TO JE POSTAČUJÍCÍ $\forall t$ pro A_n, B_n polynomy.

2. Rovnice vedení tepla podruhé

Fourierovou transformací: $(\mathcal{F}f)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx$

„Fourierova transformace zaměňuje derivaci s násobením $2\pi i x$."

Nutno říct jak, kde. Proto Schwartzův prostor

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid f$ je $\mathcal{C}^\infty \wedge \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n$
$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial_\alpha f(x)| < \infty \}$, kde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$,

$\partial_\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$.

• Nechť $\partial_x^k u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ a $\partial_t u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ a $\partial_x^2 u - \partial_t u = 0$
$k = 0,1,2$ ← Přirozeně stačí $k=0$ (z def. Schw. prostoru). Pak

$\mathcal{F}(\partial_x^2 u - \partial_t u) = 0 \underset{\mathcal{F} \text{ lineární zobrazení}}{\Longrightarrow} \mathcal{F}\partial_x^2 u - \mathcal{F}\partial_t u = 0 \underset{\substack{\mathcal{F} \,\&\, \text{der} \\ + \text{der. Leb. int. dle parametru}}}{\Longrightarrow}$

$(2\pi i x)^2 \mathcal{F}u - \underbrace{\partial_t \mathcal{F}u}_{\text{(der. Leb.) zde}} = 0$

Označme $v = \mathcal{F}u$ $(v(t,x) = (\mathcal{F}u)(t,x))$.

---

*) To se ukáže ex post; respektive vztahů pro der. podle x.

$$-4\pi^2 x^2 v(t,x) - \partial_t v(t,x) = 0 \Rightarrow -4\pi^2 x^2 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -4\pi^2 x^2 \quad \text{a} \quad v(t,x) = C(x)\, e^{\underbrace{-4\pi^2 x^2}_{\lambda} t}.$$

$$u(t,x) = \mathcal{F}_x^{-1}\left(C(x)\, e^{-4\pi^2 x^2 t}\right).$$ Silně závisí na $C(x)$.

Většinou víme rozložení tepla na počátku, $t \to 0^+$ (myslíme). Nechť $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = u_0(x)$. Tj.

$$\lim_{t\to 0^+} \mathcal{F}^{-1}\left(C(x)\, e^{-4\pi^2 x^2 t}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(C(x)\right) = u_0(x) \Rightarrow$$

$$C(x) = \mathcal{F} u_0(x).$$ Celkem $u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F} u_0(x)\, e^{-4\pi^2 x^2 t}\right)$.

Celkem dogmatu: $\exists$, $\exists!$ ~~ALE~~ pro ... $u_0 \in \mathcal{S}$.

To je trochu nevýhodné ($\mathcal{S} \subseteq L^1$; fce v $\mathcal{S}$ nesmí růst atd...)

$\boxed{\text{ZOBECNĚNÍ}}$, TEORIE DISTRIBUCÍ

3. Jeden z motivů

$\Delta = \partial_t$:

a) $$f(x) \,\text{"}{\simeq}\text{"} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \text{ kde } c_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

b) $$(\mathcal{F} f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y}\, dx$$ vede k podobnému cíli. $\boxed{\text{Proč?}}$

Nebo:

a) $$f(x) \,\text{"}{\simeq}\text{"} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \int_{\mathbb{Z}} e^{inx} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx\, d\mu_{discr}$$

b) $$(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = \int f(y) e^{+2\pi i x y}\, dy.$$ (Proč? je techn. celkem obtížné.) Celkem

$$f(x) \underset{\text{na } \mathcal{S}(\mathbb{R})}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i x y}\, dx\right) e^{-2\pi i x y}\, dy$$

Podobné vzorce. Proč?

Tento ústí v tzv. Pontrjaginovu dualitu, jež se snaží tento, řekněme, údiv vysvětlit.

Vysvětlení je zajímavé: to bylo totiž později (L. Schwartz) ...

- Je nutné studovat (nejen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) různé $L^p(\mathbb{R}^n)$, ale i $L^p(G)$, později ? 50 kde G je topologická grupa, stačí lokálně kompaktní (nebo jen Lieova :-))
- Definovat Fourierovu transformaci na onom $L^p(G)$.
- Zabývat se dualitou... třeba $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$; ve fyzice také je (mřížky, duální mřížky; prostor souřadnic, prostor hybností).

Proč by to mělo „jít"? Proč je možné vybudovat teorii Fourierových transformací na $L^p(G)$ a spojit ji s teorií Fourierových řad (kde?)? Neřku-li řešit rce vedení tepla na příslušných pstorech – zřejmě G.

Odpověď: V důkazech inverznosti $\mathcal{F}$ a transf. inverzní $f \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{2\pi i xy}dy \leftarrow x\right)$, jež se od $\mathcal{F}$ liší jen znaménkem u e, v identitách s tzv. konvolucí používáme jen $[x+(y+z)=(x+y)+z]$ & $[x+(-x)=0]$ & $[x$ je jednoznačný $\forall x]$ $\rightsquigarrow$ grupové vlastnosti.

4. Další zobecnění

Teorie Banachových algeber = asociativních algeber A nad tělesem $\mathbb{k}$ s normou a s izometrickou involucí $\bar{\ }$, především $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, či $\overline{\mathbb{F}_p}$ (alg. uzávěry kon. těles), která je vybavena normou $\| \ \| : A \to \mathbb{k}$, že $\|ab\| \leq \|a\| \|b\| \ \forall a, b \in A$ a $(A, \|\cdot\|)$ je Cauchyovsky úplný.

$\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$
$|\lambda|^2 = \bar{\lambda}\lambda$

Nebo teorie C^*-algeber (von Neumann, Gelfand).

$\rightsquigarrow$ $\forall$ komutativní C^*-algebra je izomorfní $\mathcal{C}_0(X)$, kde X je lok. komp. t. pstor a C_0 pstor spojitých funkcí klesajících v nekonečnu. X $\exists!$ až na homeo.

— podobnost s alg. geometrií (souřadnicový okruh variety $\rightsquigarrow$ varieta)

— podnícení vzniku nekom. geometrie (Co pro A je nekom. C^*-algebra?)

$\Longrightarrow$ Teorie reprezentací lok. komp. grup, především Lieových (prekurzor věta Petera-Weyla)

$\rightsquigarrow$ Harmonická analýza na homogenních prostorech

$$\mathcal{F}(e^{-\pi x^2})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2 - 2\pi i x \xi} = ?$$

$\xi > 0$, Cauchy

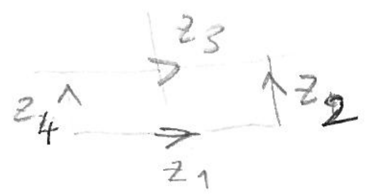
$$0 = \oint_{C_R} e^{-\pi z^2 - 2\pi i z\xi}\,dz = \oint_{C_R} e^{-\pi(z^2+2\pi i z\xi - \xi^2)} e^{-\pi\xi^2}\,dz = \oint_{C_R} e^{-\pi(z+i\xi)^2} e^{-\pi\xi^2}\,dz$$

$C_R: z_1 = t - i\xi,\ t\in[-R,R]$

$z_2 = R+it,\ t\in[-\xi,0]$

$z_3 = t,\ t\in[-R,R]$

$z_4 = -R+it,\ t\in[-\xi,0]$



$$= e^{-\pi\xi^2}\oint_{C_R} e^{-\pi(z+i\xi)^2}\,dz$$

$$= e^{-\pi\xi^2}\Big[\underbrace{+\int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2}\,dt}_{I_1} \underbrace{+\, i\int_{-\xi}^{0} e^{-\pi(R+it+i\xi)^2}\,dt}_{I_2} + \underbrace{-\int_{-R}^{R} e^{-\pi(t+i\xi)^2}\,dt}_{I_3} \underbrace{-\, i\int_{-\xi}^{0} e^{-\pi(-R+it+i\xi)^2}\,dt}_{I_4}\Big]$$

$R\to\infty$:

$$\lim_{R\to\infty} I_1 = e^{-\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,dt \to \text{Laplaceův integrál} = e^{-\pi\xi^2}\ \left|\frac{\text{subst}}{\text{Fubini}}\right|$$

$$\lim_{R\to\infty} I_2 = \lim_{R\to\infty}\int_{-\xi}^{0} e^{-\pi R^2} e^{2Ri(t+\xi)} e^{-(t+\xi)^2}\,dt = \int_{-\xi}^{0} 0 = 0$$

PP: majoranta $\left|e^{-\pi R^2}e^{2Ri(t+\xi)}e^{-(t+\xi)^2}\right| = \left|e^{-\pi R^2}e^{-(t+\xi)^2}\right| \le e^{-\pi R^2}$ integrab.

$$\lim_{R\to\infty} I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2 - 2\pi i\xi t + \pi\xi^2}\,dt = e^{\pi\xi^2}\mathcal{F}(e^{-\pi x^2})(\xi)$$

$$\lim_{R\to\infty} I_4 = \lim_{R\to\infty}\int_{-\xi}^{0} e^{-\pi(-R+it+i\xi)^2}\,dt = \int_{-\xi}^{0} 0\,dt = 0$$

PP: majoranta $e^{-\pi R^2}e^{\pi\xi^2}$

$$0 = -e^{-\pi\xi^2} + e^{-\pi\xi^2}e^{\pi\xi^2}\mathcal{F}(e^{-\pi x^2})(\xi)$$

$$\boxed{e^{-\pi\xi^2} = \mathcal{F}(e^{-\pi x^2})(\xi)}$$

$h_0(x) = e^{-\pi x^2}$ $\quad \mathcal{F}(h_0) = h_0$

h_n

$\mathcal{F}(h_n) = h_n i^n$ (Wiener)

$\mathcal{F}^4 = Id$

2. Opakování některých pojmů z topologie a teorie míry

Po zopakování někl. pojmů z topologie a teorie míry se budeme věnovat příkladům Haarových měr. Podstatným pojmem je lokální kompaktnost.

Topologický prostor na X:

1) $X \neq \emptyset$

2) topologie na X $\underbrace{}_{\tau_X}$ = podmnožina potenční množiny 2^X splňující

a) $\emptyset, X \in \tau_X$

b) I množina, $(A_i)_{i \in I}$ systém množin indexovaný I. $(\forall i \in I)(A_i \in \tau_X) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_X$

c) $A, B \in \tau_X \Rightarrow A \cap B \in \tau_X$

Pozn.: Systém množin je zobrazení. Sjednocení je však jen přes obrazy (těchto zobr.)

$I = \mathbb{N}$ $(A_1, A_2, \ldots)$ je zobr. $a : I \to \tau_X$

Nesjednocuji $\underline{a}$, ale $\mathrm{Rng}(a)$.

Prvkům τ_X říkáme otevřené. V uzavřená $\iff V = X \setminus U$, kde $U \in \tau_X$. (Otevřená množina $\neq$ uzavřená. Uzavřené nejsou doplněk τ_X (ve 2^X).)

Def: <u>Topologická grupa</u> = Hausdorffův top. prostor G, že $\cdot : G\times G \to G$, $^{-1} : G \to G$, $e \in G$ definují strukturu grupy a $\cdot$ a $^{-1}$ spojité.

Pozn.: Na $G\times G$ součinová topologie.

Pozn.: $^{-1} : G \to G$ je homeomorfizmus, neboť $^{-1}$ je spojitá a involuce ($f^2 = Id$).

Př.: 1) Každá grupa s diskrétní topologií!

2) Každá grupa s aspoň dvěma prvky a triviální top. není!

3) Grupa $U(1) \subseteq \mathbb{C}$, $U(1) = \{ e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi) \}$ abelovská.

4) Každá podgrupa $GL(n, \mathbb{C}) = \{ A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A$ invertibilní$\}$; 3) a 4) s top. indukovanou podmnožinami (<u>podmn. top.</u>)

5) $(\mathbb{R}, +, 0)$ s Eukleidovou normou. Obecněji $(\mathbb{R}^n, +, 0)$.

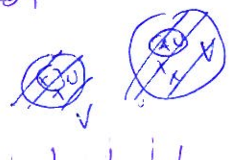
6) $(\mathbb{Z}, +, 0)$ s Eukleidovou normou; totéž co diskrétní.

7) $(\mathbb{Q}, +, 0)$ s Eukleid; $(\mathbb{Q}, +, 0)$ s diskrétní; $(\mathbb{Q}^+, \cdot, 1)$ diskr. Eukleid; $(\mathbb{R}^+, \cdot, 1)$ diskr. Eukleid.

8) G nekonečná s kofinitní topologií není!

<u>Připomenutí</u>:

<u>Def</u>: $x \in X$, X top. prostor. $V \subseteq X$ se nazývá <u>okolí x</u>, pokud $x \in V$ & $\exists U$ otevřená, že $x \in U$ a $U \subseteq V$.



<u>Pozn.</u>: • Tj. každá nadmnožina otevřené množiny U, která obsahuje x, je okolí x. (Spec. $\forall$ otevř. mny obsahující x jsou okolí.)

$x \in U$

• Okolí nemusí být otevřené: $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ okolí 0; $[0, 1]$ není ok. 0

<u>Def.</u>: X se nazývá <u>lokálně komp. top. prostor</u>, pokud $\forall x \in X$ existuje okolí, jehož uzávěr je kompaktní.

<u>Pozn.</u>: Pokud každý bod x je obsažen v otevřené množině, jejíž uzávěr je kompaktní, pak je příslušný prostor lokálně kompaktní. (To je ~~sto~~ totéž...)

Pozn.: X kompaktní, pokud ∀ otevřené pokrytí $(U_i)_{i\in I}$ má kon. podpokrytí. Tj. $\forall i \in I$ U_i otevř. v X, $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ & $\exists J \subseteq I : \# J < \infty$, že $\bigcup_{j\in J} U_j = X$.

Př.: 1) Každý kompaktní je lokálně kompaktní, $V = X$

2) X s diskrétní topologií je lok. kompaktní: singleton je otevřený i uzavřený.

3) X s triviální topologií je lok. komp. top. prostor, dokonce kompaktní

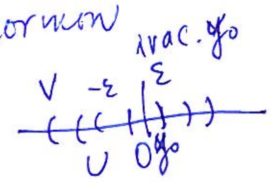
4) V...TVS a $\dim V = \infty$ není lok. komp. (je známo)

$\mathbb{R}^n$...TVS je lok. kompaktní.

Př.: $(\mathbb{Q},+,0)$ s diskr. je lok. komp., ale $(\mathbb{Q},+,0)$ s indukovanou topologií $\hookrightarrow \mathbb{R}$ není lokálně kompaktní / tedy ani $\mathbb{Q}$ s indukovanou není lok. komp. jako t.p.

s Euklid. normou

D.k. { Vezmi $x_0 = 0$ a komp. okolí V bodu x_0. V obsahuje U ot. v $\mathbb{Q}$, $0 = x_0 \in U$. U je otevřená v $\mathbb{Q}$ $\Leftrightarrow$ $U = U' \cap \mathbb{Q} \wedge U'$ ot. v $\mathbb{R}$ $(0 \in U')$. Známe: $U' \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Vezmi iracionální $y_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Existuje.

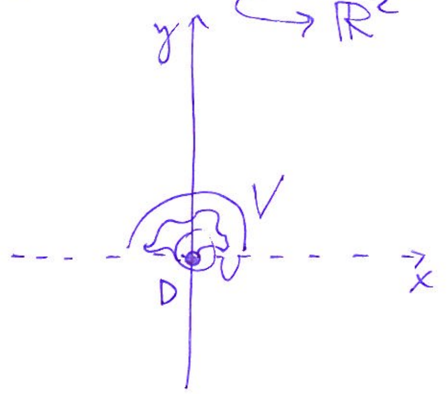


$V \supseteq U$

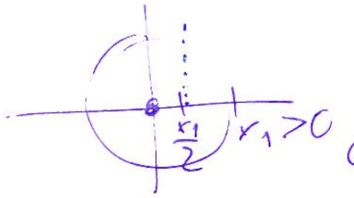
Uvažme: $\mathbb{Q} \ni a_n = \frac{\lfloor 10^n y_0 \rfloor}{10^n} \longrightarrow y_0 (\in \mathbb{R})$ a $a_n \in U$ pro dost velká n. $(a_n)_{n \geq n_0}$ je cauchyovská v U, a tedy i ve V, ale nekonverguje ve V. Tj. V není kompaktní. [Uzávěr přirozeně v $\mathbb{Q}$, být s indukovanou topologií / normou.]

$[\bar{V} \subseteq \mathbb{Q}!]$

Př.: $M = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cup \{(0,0)\} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ není lok. kompaktní, neboť nula nemá přísl. okolí. Pro spor (⚡)



- Nechť komp. V je okolí $(0,0)$ – obsahuje tedy otevřenou U, že $(0,0) \in U$. Chceme najít posloupnost ve ~~$\bar V$~~ V, jež je Cauchyovská, ale „vykonverguje" (nekonverguje ve V)
- $U = U' \cap M$, U' otevřená v $\mathbb{R}^2$ a U' obsahuje $(0,0)$ $\xrightarrow{\text{konec } \mathbb{R}^n}$ „U' obsahuje ot. kruh D (dist) se středem v $(0,0)$. Nechť $\bar D$ protne ~~$\hat x$~~ osu v bodě x_1, $x_1 > 0$.



Uvažme posloupnost

$$a_n = \left(x = \frac{x_1}{2},\ y = \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Od jistého členu je a_n v D, tj. i v $U \subseteq V$ ~~$\subseteq \bar V$~~.

Zjevně $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \left(\frac{x_1}{2}, 0\right) \notin V$; uzávěry opět jen v M. $(a_n)_{n > n_0}$ cauchyovská – zřejmě $|a_n - a_m| = \dots$ (dále ...). Limita není ve V $\Rightarrow$ V není komp. (komp $\Rightarrow$ sekv. komp. – platí v $\mathbb{R}^n$)

Idea: Sjednocení lok. kompaktních A_1, A_2 v lok. komp. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ nemusí být lok. komp., pokud je uvažováno s topologií indukovanou z M.
[Disj. sjednocení je jiný problém.]

Pozn.: Namísto cauchyovská mohu říct konvergující v $\mathbb{R}^2$ posl. ve V.

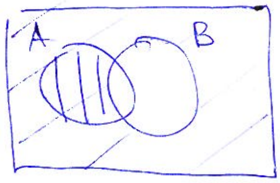
Totiž stačí. [konv. $\Rightarrow$ cauchyovská]

Def: σ-algebra na $X \neq \emptyset$ $\equiv$ $\Sigma \subseteq 2^X$ taková, že

2. $\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

3. $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$

1. $\emptyset \in \Sigma$



Pozn.: 1) $\Sigma \neq \emptyset$: $\emptyset$ a $X \in \Sigma$.

2) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{(X \setminus A_i)}_{\in \Sigma}}_{\in \Sigma} \in \Sigma$

3) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B = A \cap \underbrace{(X \setminus B)}_{\in \Sigma} \in \Sigma$

4) $A \cup B = A \setminus B \cup A \cap B \cup B \setminus A$

Míra a topologie

X topol. prostor a $\mathcal{T}_X \subseteq 2^X$ topologie na X.

Borelova σ-algebra (na $(X, \mathcal{T}_X)$) = σ-algebra Σ na X obsahující $\mathcal{T}_X$ a nejmenší taková.

Připomeňme nejmenší: $\forall \Sigma'$ σ-algebra na X obsahující $\mathcal{T}_X$ je $\Sigma' \supseteq \Sigma$.

((Minimální := neexistuje menší))

Existence Borelovy σ-algebry

• $A_{\mathcal{T}_X} := \{\Sigma \mid \Sigma$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{T}_X\}$ klasický trik; $2^X \in A_{\mathcal{T}_X} \Rightarrow A_{\mathcal{T}_X} \neq \emptyset$.

• $\Sigma_0 := \bigcap A_{\mathcal{T}_X}$ → a) Σ_0 je σ-algebra obsahující $\mathcal{T}_X$

b) je nejmenší (↯): $\exists \Sigma' \not\supseteq \Sigma_0 \Rightarrow \Sigma' \neq \Sigma_0$. $\Sigma_0 \cap \Sigma' \subsetneq \Sigma_0$. Navíc $\Sigma_0 \cap \Sigma' \in A_{\mathcal{T}_X}$.

$\Sigma_0 = \bigcap A_{\mathcal{T}_X} \subseteq \Sigma_0 \cap \Sigma'$, což je spor, neboť odtud $\Sigma_0 = \Sigma_0 \cap \Sigma' \Rightarrow \Sigma_0 \subseteq \Sigma'$.

Unicita

Nejmenší je jediný! $\left(\begin{matrix} \Sigma_0^1 \leq \Sigma_0^2 \\ \Sigma_0^2 \leq \Sigma_0^1 \end{matrix} \right\}$ slabá antisymetrie $\Sigma_0^1 = \Sigma_0^2$ ... $)$

Označení: Pokud $X \neq \emptyset$ a Σ je σ-algebra na X, nazveme (X, Σ) měřitelný prostor.

Def: $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ nazveme míru na měř. prostoru (X, Σ), pokud
a) $\mu(\emptyset) = 0$
b) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ $\forall (A_i)_{i=1}^{\infty}$
$A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$ (σ-aditivita na disj. systému)

Pozn.: 1) g schodovitá, $g : X \to \mathbb{R}$. $\int_X g \, d\mu := \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$

$g = \sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i}$

$i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$, $A_1, \dots, A_m \in \Sigma$

2) $\overline{\int_X f \, d\mu}^{\,f \geq 0} := \underline{\sup} \left\{ \int g \, d\mu \mid g \leq f, g \text{ schodovitá a } g \geq 0 \right\}$

Std. postup je definovat

- Nechť $f = f_+ - f_-$, pak $\int_X f \, d\mu := \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu$, kde

$f_+(x) := \max\{f(x), 0\} \geq 0$
$f_-(x) := -\min\{f(x), 0\} \geq 0$, pokud pravá strana má smysl v rámci aritmetiky na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$\mathcal{L}^1(X) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid \int_X f \, d\mu < +\infty \right\}$, $L^1(X) = \mathcal{L}^1(X) / \simeq$

$f \simeq g \Leftrightarrow f - g = 0$ s.v. $\Longleftrightarrow \mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Pozn.: $(L^1(X), \| \, \|)$, kde $\|f\| = \int_X |f| \, d\mu$, je Banachův $\forall (X, \Sigma)$ měřitelný prostor a míru μ na něm.

(Není nutná „topologizace".)

Př.: 1) $X \neq \emptyset$, $\Sigma \subseteq 2^X$, $\mu(A) = \begin{cases} \infty & A \text{ nekonečná} \subseteq X \\ \# A & A \text{ konečná} \subseteq X \end{cases}$

libovolná σ-algebra na X

tzv. počítací míra

2) $X = \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \{A \subseteq X \mid A$ je lebesgueovsky měřitelná $\}$. Σ je Borelova pro topologii indukovanou Eukleidovou normou na $\mathbb{R}^n$.

Známe: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená $\Rightarrow$ U je lebesgueovsky měřitelná.

Terminologie (konvence): (X, Σ) měřitelný prostor a μ míra na něm. Pak (X, Σ, μ) nazveme prostor s mírou. Pokud X topologický prostor a Σ je Borelova, pak μ nazveme Borelovou mírou.

Def: $\mu: \Sigma \to [0, \infty]$ buď Borelova míra na X. μ slyje lokálně konečná $\Leftrightarrow \forall x \in X \ \exists U \in \mathcal{T}_x$, že $\mu(U) < \infty$.

Pozn.: $\mathcal{T}_x \subseteq \Sigma$, def. má smysl.

Př.: 1) Lebesgueova míra je lok. konečná

2) $X = \mathbb{R}$, top. daná Eukleidovou normou, Σ Borelova a μ počítací. Pro $x = 0$ má existovat otevřená U (nejen měřitelná!)

$\Rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$ pro vhodné ε.

Pak ovšem $\mu(U) = \mu(-\varepsilon, \varepsilon) + \mu(U \setminus (-\varepsilon, \varepsilon))$

$\geq \mu(-\varepsilon, \varepsilon) = \infty$.

Počítací na $\mathbb{R}$ není lok. konečná!

Definice: Borelova lokálně konečná míra sluje Radonova, if 1) $\mu(A) = \inf_{\substack{U \supseteq A \\ \text{otevř}}} \mu(U)$ $\forall A$ měřitelnou [μ silně vnější reg.]

Std. je i $\forall A$ jen otevřenou. 2) $\mu(A) = \sup_{\substack{K \subseteq A \\ \text{kompaktní}}} \mu(K)$ $\forall A$ měřitelnou [μ slabě vnitřně reg.]

Pozn.: 1) Lebesgueova na $\mathbb{R}^n$ je Radonova

2) $X = \mathbb{R}$ s kóspoč. mírou. Co je to kospočetná míra? Nechť $\emptyset \neq X$ je množina.

Cvičení a) Kospočetná topologie: $\emptyset \in \tau_X$ a pro $\emptyset \neq A \subseteq X$ je $A \in \tau_X$ iff $X \setminus A$ je spočetná.
(Kofinitní je podmna kospočetné!)
Proč je to topologie? 1) $\emptyset \in \tau_X$. 2) $A, B \in \tau_X \Rightarrow$
$\Rightarrow X \setminus A \wedge X \setminus B$ spočetné $X \setminus (A \cap B) =$
$= \underbrace{(X \setminus A)}_{\text{spoč.}} \cup \underbrace{(X \setminus B)}_{\text{spoč}}$ spoč. 3) $(A_i)_{i \in I}$ lib. systém
z $\tau_X \Rightarrow X \setminus A_i$ spočetná $\forall i \in I$

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \underbrace{(X \setminus A_i)}_{\text{spočetné}} \quad \text{(de Morgan)}$$

Průnik spočetných je spočetná, tj. $\bigcup_{i \in I} A_i$ je τ_X.

PODROBNĚ VIZ DODATKY → (A) (B) (C)

b) Vezměme Borelovu σ-algebru pro kospoč. topologii na X. Spc. každá mna se spoč. doplňkem je měřitelná.

Polož $\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ spočetná} \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$

Kospoč. míra. (Není zřejmé, že je to dokonce míra.)

Ad příklad: $X = \mathbb{R}$, Vezmi $A := \mathbb{Q}$ měřitelná a $\mu(\mathbb{Q}) = 0$

Uvažme $\mathbb{R}$ s kospoč. topologií a kospoč. mírou.

$U \supseteq \mathbb{Q}$ buď otevřená, tj. $\mathbb{R} \setminus U$ je spočetná $\Longrightarrow$ (9)

$\Longrightarrow$ U je nespočetná $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $\mu(U) = 1$. Je tedy $\inf\limits_{\substack{U \supseteq \mathbb{Q} \\ \text{ot.}}} \mu(U) = \inf\limits_{\substack{U \supseteq \mathbb{Q} \\ \text{ot}}} \{1\} = 1$

$\mu(\mathbb{Q}) = 0$

Závěr:

$\mathbb{R}$ s kospočetnou mírou tedy není Radonova.

Definice: Nechť G je topologická grupa a μ je Borelova míra na ní. Tuto nazvu levou Haarovou, pakud je Radonova, nenulová a $\forall g \in G$ $\forall U$: otevřenou v G je $\mu(gU) = \mu(U)$, kde $gU = \{gu \mid u \in U\}$.

Pozn.: Analogicky pro pravou Haarovu.

Cílem je konstrukce Haarovy míry pro lokálně kompaktní grupy.

$\boxed{\text{s. 10 není}}$

Co slabá vnitřní regularita? protipř.

Pozn.: Př. s kospoč. (top.) a mírou se „opírá" X ~~triv~~. spoč. triv

X nespoč. → A spoč. ↓!

→ A nspoč (ALE)

$\Longleftrightarrow$ A je kospoč.

spoč. je negace kospočetnosti

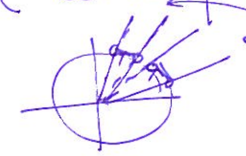
ZDE!

Lze ale i snáze, viz hodina.

Cvičení:

1. $U(1) := \{e^{2\pi i\varphi} \mid \varphi \in [0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ s indukovanou topologií.
Násobení a inverze z $U(1) \subseteq \mathbb{C}^\times (= \mathbb{C}\setminus\{0\})$. Dokažte, že $U(1)$ je top. grupa

a) $U(1)$ je Hausd., neboť $\mathbb{R}^2$ je Hausd. a top. $U(1)$ je indukována inkluzí $U(1) \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ ($\cos 2\pi\varphi + i\sin 2\pi\varphi \mapsto$ $\mapsto (\cos 2\pi\varphi, \sin 2\pi\varphi)$).



b) $U(1) = \{e^{2\pi i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$

$\cdot : (z_1, z_2) \longmapsto z_1 z_2$ je spojité!

c) $^{-1} : z = e^{2\pi i\varphi} \mapsto e^{-2\pi i\varphi}$ $\quad \varphi \mapsto -\varphi$ spoj. a $\exp : x \mapsto e^x$ je spoj.

2. $GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M(n,\mathbb{C}) \mid A$ je regulární$\} \subseteq M(n,\mathbb{C})$ $\simeq \mathbb{C}^{2n}$ s Euc. top.,
Nás. a inverze matic je topologická grupa

a) $M(n,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2n}$ Hausd; $GL(n,\mathbb{C})$ s ind. je Hausd.

b) $(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$ polynom

c) $(A^{-1})_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j} \det A_{\hat{j}\hat{i}}}{\det A}$ ← A s vynechaným j-tým ř. a i-tým sl.

podíl polynomů

3. $(\mathbb{Q}^+, \cdot, 1)$ je topologická grupa pro diskrétní i eukleidovskou topologii

a) Hausd. zřejmé v obou

b) $\mathbb{Q}^+$ má diskrétní $\rightsquigarrow$ $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ má diskrétní $\Rightarrow$ násobení je spojité. Spojitost inverze z diskr. $\mathbb{Q}^+$.

Ad $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ diskrétní. Buď $U \subseteq \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ podmnožina. Chceme U je otevřená. $U = \bigcup\limits_{x \in U} \{x\} = \bigcup\limits_{(x,y) \in U} \{(x,y)\}$.

Stačí $\{(x,y)\}$ je otevřená, ale jde o $p_1^{-1}(x) \cap p_2^{-1}(y)$, kde $p_i : (\mathbb{Q}^+)^2 \to \mathbb{Q}^+$ jsou projekce na příslušné faktory součinu $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$. $\{x\}, \{y\} \subseteq \mathbb{Q}^+$ otevřené $p_1^{-1}(\{x\}) \wedge p_2^{-1}(\{x\})$ otevřené (p_i spojité při součinové topologii). Průnik otevřený, tj. jsme hotovi.

Předpokládáme ale, že součinová topologie existuje. (Min. top. „obsahující" $\{ p_i^{-1}(U_i) \mid U \text{ ot } v\ X_i,\ p_i : \underset{i \in I}{\times} X_i \to X_i,\ i \in I \}$, pak vezmu průniky.)

c) Spojitost nás. a inverze v $\underset{\text{Eukleidova}}{\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{R}}$. Plyne ze spojitosti nás. a inverze pro $\mathbb{R}$ (vezmu jen průniky příslušných okolí z $\mathbb{R}$ s $\mathbb{Q}^+$).

4. Nechť X je množina. Uvažujme X s topologií kofinitní, tj. U otevřená iff $X \setminus U$ je konečná nebo $U = \emptyset$. Dokažte, že kofinitní topologie je „skoro" topologie Hausdorffův, „skutečné" topologie. Ukažte, že X s touto topologií není Hausdorffův, pokud X má nekonečný počet prvků.

Snadné: top. prostor i Hausd.

a) $A, B \in \tau_X \Rightarrow X \setminus A$ konečná $\wedge$ $X \setminus B$ konečná

b) $X \setminus (A \cap B) = X \setminus A \cup X \setminus B$ konečná

$A_i \in \tau_X$ $X \setminus \bigcup_i A_i = \bigcap_i \underbrace{X \setminus A_i}_{\text{konv.}}$ konečná.

c) $X \setminus X$ konečná,

d) $\# X \geq \infty$ $x \neq y$ oba z X. Pp. $\exists U_x \ni x$ $\exists U_y \ni y$. Pak ale z def ($U_x, U_y \neq \emptyset$)

$U_x, U_y \in \tau_X \wedge U_x \cap U_y = \emptyset$.

$\# X \setminus U_x < \infty \wedge \# X \setminus U_y < \infty$

$X = X \setminus (U_x \cap U_y) = \underbrace{(X \setminus U_x)}_{\# < \infty} \cap \underbrace{(X \setminus U_y)}_{\# < \infty} \Rightarrow < \infty$ ↯ $\# X \geq \infty$

$\# X \geq \infty$.

5. p-adická grupa $\mathbb{Q}_p$

Uvažme na $\mathbb{Q}$ pro každé prvočíslo p funkci $|\ |_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_0^+$ def. $|\pm \frac{a}{b} p^n|_p = p^{-n}$, kde $p \nmid a \wedge p \nmid b$ $a, b \in \mathbb{N}$ a $|0|_p = 0$. (Mohu požadovat navíc i $(a,b) = 1$)

Tvrzení: $|\,|_p$ je valuace na $\mathbb{Q}$, tj.

1) $|a+b|_p \leq |a|_p + |b|_p$ 2) $|ab|_p = |a|_p |b|_p$ 3) $|a|_p = 0 \Rightarrow a = 0$

Dk.: 1) Počítejme $\left| \frac{a_1}{b_1} p^n + \frac{a_2}{b_2} p^m \right|_p = \left| \frac{a_1 b_2 p^n + a_2 b_1 p^m}{b_1 b_2} \right|_p =$

$a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $p \nmid a_i$ $p \nmid b_i$, $i = 1,2$

a) $n < m$ $= \left| \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1 p^{m-n}}{\underbrace{b_1 b_2}_{p \nmid b_1 b_2}} p^n \right|_p = p^{-n} = |a|_p \leq |a_p| + |b|_p$ (z nezáp. $|\,|_p$)

$p \nmid a_1 b_2 + a_2 b_1 p^{m-n}$, neb prvoč.

by nutně muselo dělit $a_1 b_2$, tj. i a_1 nebo b_2,

ale ani jedno dle předpokladu nedělí!

b) Pokud $m = n$, pak $\left|\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} p^n\right|_p$ musím testovat

jinak: Nechť $p / a_1 b_2 + a_2 b_1$, tj. $a_1 b_2 + a_2 b_1 = k p^\alpha$

α největší možné. Pak $\left|\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} \cdot p^n\right|_p = p^{-(n+\alpha)}$.

Ovšem $|a|_p = p^{-n}$. Celkem $|a+b|_p \le |a|_p$,

tj. i $|a+b|_p \le |a|_p + |b|_p$

c) $a = 0 \vee b = 0$ triviální.

2) $\left|\pm\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} p^{+n+m}\right|_p = p^{-n-m} = |a|_p |b|_p$ ✓

3) $|x|_p = p^{-n} = 0$ iff $x = 0$ ✓

Def: Těleso $\mathbb{k}$ s valuací $|\ |_v$ (někdy abs. hodn.) ← Absolutbetrag

slujé archimedovské pakud:

$\forall x \in \mathbb{k} \setminus \{0\}\ \forall y \in \mathbb{k} : |x| \le |y| \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$

$|nx| > |y|$. Jinak sluje nearchimedovské.

Př.: $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ ⇔ s normou $|\ |$ ← klas. abs. hodnotou jsou archimedovská.

Dk. d.cv.

Př.: Dokažte, že $(\mathbb{Q}, |\ |_p)$ není archimedovské.

$|nx| = |\underbrace{x + \cdots + x}_{n\text{-krát}}| \le \max\{|(n-1)x|, |x|\} = \cdots = \max\{|x|\}$

$= |x|$.

$\exists x \in \mathbb{k} \setminus \{0\}, x = 1, y = 1$ $\quad \underset{|nx| =}{|n1|} = 1 \not> |y| = |1|$.

Lze $y > 1$. Použili jsme $N(x+y) \le \max\{N(x), N(y)\}$, jiz nyní dokážeme. $N = |\ |_p$.

Kospočetná topologie a míra

Dodatek A, B, C.

(A)

1. $X \neq \emptyset$. $\tau_X = \{ U \subseteq X \mid U = \emptyset$ nebo $X \setminus U$ spočetná $\}$

↳ U se nazývá kospočetná

a) X spoč. $\Rightarrow \tau_X = 2^X$ } tj. $U = \emptyset$ nebo U kospoč.

b) τ_X je topol.: de Morgan (ukažte podrobně)

„Težší" je snad jen: $A, B \in \tau_X$. Pak $X \setminus A \cap B = X \setminus A \cup X \setminus B$. $A \vee B$ prázdná $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \in \tau_X$

A i B neprázdná $\Rightarrow X \setminus A \wedge X \setminus B$ spočetné.

Sjednocení spoč. je spočetné. $\square$

obecná „poznámka"

2. Buď B Borelova pro lib. top. $\mathcal{T}_X$. Pak B je minimální σ-alg. obsahující $\mathcal{T}_X$. Pokud B' je minimální obsahující $\mathcal{T}_X$, je Borelova. Tj. Borelova $\equiv$ minimální obsahující τ_X

Dk.: a) B je nejmenší $\Rightarrow B$ je minimální (triv.)

b) Nechť B' je minimální. Chci je Borelova, tj. nejmenší.

Prospor: $\exists B''$ $B'' \not\supseteq B' \Rightarrow B' \neq B'' \Rightarrow B' \cap B'' \subsetneq B'$, tj. B' není min. ↯. Celkem B' je Borelova. $\neq \emptyset$

[Průnik σ-alg. je σ-alg.]

Použili jsme: $B' \cap B''$ je σ-alg. (obsahující $\mathcal{T}_X$). Průnik σ-alg. je σ-alg. (snadné). $\square$

- Bod 2 umožňuje Borelovu (σ-)algebru definovat ekv. jako minimální σ-algebru obsahující $\mathcal{T}_X$. $\supseteq \tau_X$

3. $\Sigma_X := \{ A \subseteq X \mid A$ spočetná $\vee$ A kospočetná $\}$ je Bor. σ-algebrou pro kospoč. topologii na X. 1) X spoč. ... TRIV (nedokazuji) 2) X nespoč. ?

Dk.: Opět snadné: $\emptyset, X \in \Sigma_X$. Rozdíl snadné: i) A spoč. ii) A kospoč. | $A = X \setminus (X \setminus A)$. Sjednocení snad těžší.

$A_i, i \in I$ (spoč.), $A_i \in \Sigma$ i) A_i $\forall$ spočetné. Pak $\bigcup_{i \in I} A_i$ spoč., tj. $\in \Sigma_X$ (spoč. sjedn. spoč.)

ii) $\exists j$, A_j kospočetné. $A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ / $X \setminus$ $\Rightarrow X \setminus A_j \supseteq X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow$

spoč. $\supseteq X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ kospoč.

tj. $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Sigma_X$.

Dále: Σ_X je minimální! Sporem. Nechť $\exists \Sigma' \subsetneq \Sigma_X$. ~~Jednoduš-~~
~~meji~~: Σ' vznikla vynětím, spočetné nebo kospočetné, množiny (B
nebo množin ze Σ_X.

$=\Sigma_X$ $\quad \Sigma'$

Opět: α) X spoč. $\Rightarrow \tau_X = 2^X$. Jelikož Borelova alg. ~~je σ-alg~~ na $X \Rightarrow \supseteq 2^X$,
~~tak $\Sigma' \subsetneq \Sigma \subseteq 2^X \Rightarrow \Sigma'$ neobsahuje τ_X~~

β) X nespoč. (i) Ze Σ_X vyjmu kospoč. A_0, tj. $X \setminus A_0$ spoč.

$\Rightarrow A_0 \in \tau_X \Rightarrow$ po vynětí algebra Σ' neobsahuje τ_X, tj.
není Borelova pro uvažovanou τ_X

(ii) Ze Σ_X vyjmu spoč. A_0. „Zkoumám" $X \setminus A_0$. $X \setminus (X \setminus A_0) = \underset{\text{spoč.}}{A_0}$,
tj. $X \setminus A_0$ kospoč. $\Rightarrow X \setminus A_0 \in \tau_X \Rightarrow X \setminus A_0$ musí
příl. Borelově patřit $\xRightarrow{\text{def } \sigma\text{-alg.}} X \setminus (X \setminus A_0)$ také. Ale $X \setminus (X \setminus A_0)$
$= A_0$ jsem vyňal! ↯.

<u>Def</u>: Σ_X buď Borelova pro kospoč. topologii na $X \neq \emptyset$.
<u>+ tvrzení</u> Pak $\mu(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ spoč.} \\ 1 & A \text{ kospoč.} \end{cases}$ (tzv. kospoč. míra) je míra na Σ_X

Dk.: 1) X spoč.: $A, B \in \Sigma_X \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow A, B$ spoč. $\Rightarrow$
$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ triv. (sj. spoč.
je spoč.)

2) X nespoč.: α) $A, B \in \Sigma_X$, $A \cap B = \emptyset$, obě spoč., viz 1)

β) A spoč., B kospoč. $\in \Sigma_X$, $A \cap B = \emptyset$. Pak $A \cup B$ nespoč.
a mám $\mu(A \cup B) = 1 = 0 + 1 = \mu(A) + \mu(B)$

γ) $A, B \in \Sigma_X$, $A \cap B = \emptyset$, obě kospoč. Nemůže nastat.
Pokud totiž $A \cap B = \emptyset$, pak $X = X \setminus A \cap B = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.
A, B kospoč. $\Rightarrow X \setminus A$ a $X \setminus B$ spoč. (def Σ_X).
Shrnuto nespoč = spoč. $\cup$ spoč. ↯

Pozn.: Obdobnými metodami zjistíme: X nespoč. $\Rightarrow \tau_X$ (C) kospočetná není Hausdorffova.

$a \in A \in \tau_X$
$b \in B \in \tau_X$
$A \cap B = \emptyset$

(Namísto Morganových pravidel málo použít i (zmíněné) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq X \setminus B$ nebo $B \subseteq X \setminus A$ a pak BÚNO, triža.)

$\overset{\times}{a}$ $\overset{\times}{b}$

Ad čtvrtek: Pro $X = \mathbb{R}$ s kospoč. $\wedge$ U otevřená $\wedge$ $U \supseteq \mathbb{Q}$ ~~jsem řekl U obsahuje interval. To jsem byl ale opět u X s Euklidovou~~... Pro kospoč. to neplatí, jak jsme se zmínili: U ot. $\Rightarrow$ $U = \emptyset$ nebo $\mathbb{R} \setminus U$ spoč. $\Rightarrow$
- $U = \emptyset$ nenastane ($\mathbb{Q} \subseteq U$)
- U nespoč., jinak by $\mathbb{R} \setminus U$ nespoč.

$\mu(\mathbb{Q}) = 0$

Ale U nespoč. $\mu(U) = 1$.

- Kospoč. míra je lok. kon. ($\mu \leq 1$), tj. našli jsme lok. kon., jež není Radonova.

- „Přesný" protipříklad na: $U \subseteq \mathbb{R}$ otevř. v kospoč. $\wedge$ $U \supseteq \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ U obsahuje interval: $U := T \cup \mathbb{Q}$, kde T jsou transcendentní. ($U = I$ nefunguje: $I \not\supseteq \mathbb{Q}$; $U = I \cup \mathbb{Q}$ ($= \mathbb{R}$) interval má, tj. také nef.). $T \cup \mathbb{Q}$ interval nemá. Každý (a,b) obsahuje číslo, jež není transcendentní, ani racionální [nějakou tu odm. z racio]
- Obrázek: ~~x x x ( ) x~~ očísluji $\mathbb{Q}$ pomocí $\mathbb{N}$ a vezmu interval. To nefunguje, neboť „předpokládám", že očíslování $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ respektuje uspořádání. Ale $\exists$ ...
Nechť $\varphi(1) := q_1 \wedge \varphi(2) := q_2$. $1 < 2 \Rightarrow q_1 < q_2$. φ očíslování $\mathbb{Q} \Rightarrow \varphi$ surj. $\Rightarrow \exists \ldots$ $q_3: q_1 < q_3 < q_2$. jasné.

3. Tychonovova věta a konstrukce Haarovy míry

Tychonovova věta: Součin kompaktních prostorů je kompaktní prostor.

Haarova míra: Radonova (lok. konečná, Borelova + „konvergence") a invariantní: $\mu(gU)=\mu(U)\ \forall U\in\Sigma$

Požaduje se nenulová. $\forall g\in G$ (levoinv.)

Pozn.: Pravoinvariantní obdobně $\mu(Ug)=\mu(U)$.

Př.: $X=G=\mathbb{R}$, λ Lebesgueova: $\mu(x+U)=\mu(U)$ transl. inv.,

Definice ~~symboly~~ Lebesg. míry
a) $\lambda(U):=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|b_i-a_i| \;\middle|\; \bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\subseteq U\right\}$

b) Nebo $\lambda(U):=\int_X \chi_U\,d\lambda$, kde $\int_X d\lambda$ se definuje pomocí schodovitých funkcí (viz minule). $\lambda(x_0+U)=\int_X \chi_{x_0+U}\,d\lambda$

$$=\left|\begin{matrix} y=x-x_0 \\ \text{Fubini}\end{matrix}\right| = \int_X \chi_U\,d\lambda=\lambda(U).$$

Lok. kon. zřejmá: $\forall x\in X$ vezmu $U=(x-\delta,x+\delta)$, $\lambda(U)=2\delta$

regularita (konvergence): $K_n\subseteq U$, $\bigcup K_n=U$, $K_n\subseteq K_{n+1}$

$$\Rightarrow \int_{K_n} f\,d\lambda \to \int_U f\,d\lambda$$

Tj. Lebesgue je levoinv. (i pravoinv.) Haarova.

Př.: Počítací: $\mu(Mg)=\#Mg=\#M=\mu(M)$. Lokální konečnost $\Leftrightarrow$ M diskrétní.

Konstrukce Haarovy míry

Označení: 1. $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$, $f: X \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$

X top. prostor

(Může „$\exists x_0 \in \operatorname{supp}(f)$, $f(x_0) = 0$")

$x_0 \in \operatorname{supp} f \Leftrightarrow f(x_0) \neq 0$

2. $\|f\| := \sup\{|f(x)|, x \in X\}$ norma na $C_c(X)$.

3. $C_c^+(X) := \{f: X \to \mathbb{R} \mid f$ spojitá, $\operatorname{supp}(f)$ kompaktní, $f \geq 0 \wedge \|f\| > 0\}$

Dále G grupa: 4. $L_x y := xy \quad \forall x, y \in G$

$R_x y := y x^{-1}$. Výhoda $R_{x_1} R_{x_2} = R_{x_1 x_2}$

[Pozn.: R_x není hom: $G \to G$ $\quad R_x(yz) = yzx^{-1} \neq R_x(y) R_x(z) = y x^{-1} z x^{-1}$]

• $f: G \to \mathbb{C} \quad L_x f := f \circ L_{x^{-1}}$

$R_x f := f \circ R_{x^{-1}}$

5. $(L_x f)(y) = (f \circ L_{x^{-1}})(y) = f(x^{-1} y)$

[$(R_x f)(y) = (f \circ R_{x^{-1}})(y) = f(yx)$]

Pozn.: R i L (na G) jsou homomorfismy G do $\operatorname{Bij}(G)$, tj. $x \mapsto R_x : G \to G$.

Pro konstrukci Haarovy míry je podstatné

$$\forall f, \varphi \in C_c^+(G): C_{f,\varphi} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, c_1, \dots, c_n > 0, x_1, \dots, x_n \in G, f \leq \sum_{i=1}^{n} c_i L_{x_i} \varphi \right\}$$

$(f:\varphi) := \inf C_{f,\varphi}$ $\quad (C_{f,\varphi} \subseteq \mathbb{R}_0^+)$. Je však $C_{f,\varphi} \neq \emptyset$?

Dále buď G topologická grupa a zabýváme se korektností $(f:\varphi)$

Lemma: $\forall f, \varphi \in C_c^+(G)\ \exists x_1, \dots, x_n \quad f \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} \sum_{j=1}^{n} L_{x_j}\varphi$

Dk.: 1. $U = \{x \in G \mid \varphi(x) > \frac{\|\varphi\|}{2}\}$. $\varphi \in C(G)$, $\operatorname{supp}(\varphi)$ kpt.
$\Rightarrow \varphi$ má (konečné) supremum ($\Leftrightarrow$ $\|\varphi\| < \infty$).

- $\|\varphi\| > 0 \Rightarrow \|\varphi\| > \frac{\|\varphi\|}{2} \Rightarrow \forall y > \frac{\|\varphi\|}{2}$, $\|\varphi\| \geq y$ $\exists x$ $y = \varphi(x)$,
  tj. $U \neq \emptyset$
- U otevřená: $x_0 \in U \Rightarrow \varphi(x_0) > \frac{\|\varphi\|}{2} > 0$. Na nějakém okolí x_0 je $\varphi > \frac{\|\varphi\|}{2}$ (spojitost φ)($\varepsilon := \varphi(x_0) - \frac{\|\varphi\|}{2}$).

2. $\{gU\}_{g \in G}$ je otevřené pokrytí G
   1) otevřené: Nás. g je homeo
   2) Pokrytí: $z \in G$, $h \in U$. Hledám g_0, aby $z = g_0 h$
   Zvol $g_0 = zh^{-1}$ (pak $z \in g_0 U \in \{gU\}_{g \in G}$)
   3) Spec. $\{gU\}_{g \in G}$ pokrývá $\operatorname{supp}(f)$, jenž je kpt.
   $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_m$, že $\{x_i U\}_{i=1}^{m}$ je pokrytí $\operatorname{supp}(f)$.

3. $\frac{\|\varphi\|}{2} \leq \varphi(y) \quad \forall y \in U \ \Big/ \cdot\frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} \Rightarrow \|f\| \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|}\varphi(y) \Rightarrow$
$f(x) \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|}\varphi(y) \quad \forall x$

4. $x \in G \Rightarrow \exists x_j \quad x \in x_j U$ ($\{x_i U\}_{i=1}^{n}$ pokrývá).
$y := x_j^{-1}x \in U$. Použiji bod 3.: $f(x) \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|}\varphi(x_j^{-1}x) =$
$= 2\frac{\|f\|}{\|\varphi\|}(L_{x_j}\varphi)(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nezápornost } \varphi}}{\leq} 2\frac{\|f\|}{\|\varphi\|}\sum_{j=1}^{m} L_{x_j}\varphi(x)$ $\square$

P A B C

<u>Pozn.</u>: $f, \varphi \in C_c^+(G)$. Dle lemmatu $\exists\, x_1, \dots, x_n \in G$

$$f \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} \sum_{j=1}^{n} L_{x_j}\varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} L_{x_j}\varphi \,.\ \text{tj. pro } c_1 = \dots = c_n = \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|}$$

mám $f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j \in C_{f,\varphi}$, tj. $\boxed{C_{f,\varphi} \neq \emptyset}$.

Navíc $C_{f,\varphi}$ je zdola omezená, tj. inf $C_{f,\varphi}$ $\exists$ a je to reálné číslo.

<u>Věta</u>: $f, g, \varphi \in C_c^+(G)$, $c > 0$. Pak

(dlouhá věta)

1. $(f:\varphi) = (L_x f:\varphi)$ } invariantnost
2. $(f+g:\varphi) \leq (f:\varphi) + (g:\varphi)$ } sublinearita
3. $(cf:\varphi) = c(f:\varphi)$
4. $f \leq g \Rightarrow (f:\varphi) \leq (g:\varphi)$ } monotonie
5. $(f:\varphi) \geq \|f\|\|\varphi\|^{-1}$
6. $(f:\varphi) \leq (f:g)(g:\varphi)$ } submultiplikativnost

<u>Dk.</u>: 1. • $\sum_{j=1}^{n} c_j \in C_{f,\varphi}$, tj. $\forall y \in G$: $f(y) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j (L_{x_j}\varphi)(y)$, tj.

$\forall x \in G \quad f(x^{-1}y) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j (L_{x_j}\varphi)(x^{-1}y) = \sum_{j=1}^{n} c_j L_{xx_j}\varphi(y)$.

Celkem $L_x f \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{c_j}_{\tilde{c}_j} L_{\underbrace{xx_j}_{\tilde{x}_j}}\varphi \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j \in C_{L_x f, \varphi}$.

• $\sum_{j=1}^{n} c_j \in C_{L_x f, \varphi}$, tj. $L_x f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi \Rightarrow$

$\forall y \in G$: $f(\underbrace{x^{-1}y}_{=z}) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi(y) \Rightarrow f(z) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi(y)$

$= \sum_{j=1}^{n} c_j \cancel{L}_{x_j} \varphi(x_j^{-1}y) = \sum_j c_j \varphi(x_j^{-1} x x^{-1} \cancel{y}) = \sum_j c_j \varphi(x_j^{-1} x z)$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x^{-1}x_j}\varphi(z) \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j \in C_{f,\varphi} \Rightarrow C_{L_x f,\varphi} \subseteq C_{f,\varphi}.$$

Celkem $C_{f,\varphi} = C_{L_x f,\varphi}$ $\forall x \in G$ (dále inf.).

<u>Pozn.:</u> Odvodili jsme le použití příměji: $f \le g \Rightarrow L_x f \le L_x g$ $\forall x \in G$

2. Ukážeme: $C_{f,\varphi} + C_{g,\varphi} \subseteq C_{f+g,\varphi}$. Buď $z \in C_{f,\varphi} + C_{g,\varphi}$, tj.

$z = z_f + z_g$, kde $z_f \in C_{f,\varphi}$ a $z_g \in C_{g,\varphi}$. Pak $\exists x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_m$

$$f \le \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi \wedge g \le \sum_{j=1}^{m} d_j L_{y_j}\varphi \quad \left(z_f = \sum c_i,\ z_g = \sum d_i\right)$$

Odtud $f + g \le \sum_j^{n} c_j L_{x_j}\varphi + \sum_j^{m} d_j L_{y_j,\varphi} \Rightarrow \sum_j^{n} c_j + \sum_j^{m} d_j \in C_{f+g,\varphi}$

$C_{f,\varphi} + C_{g,\varphi} \subseteq C_{f+g,\varphi}$ / inf (obrací inkluzi)

$$\inf\left(C_{f,\varphi} + C_{g,\varphi}\right) \ge \inf C_{f+g,\varphi}$$

$$\inf C_{f,\varphi} + \inf C_{g,\varphi} \ge \inf C_{f+g,\varphi} \Rightarrow (f:\varphi) + (g:\varphi) \ge (f+g:\varphi)$$

3. Snadné (triv.)

4. $f \le g$. Chceme $C_{g,\varphi} \subseteq C_{f,\varphi}$. $\sum_{j=1}^{n} c_j \in C_{g,\varphi}$. Pak $g \le \sum_{j=1}^{m} c_j L_{x_j}\varphi$. Jelikož $f \le g \Rightarrow f \le \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi \Rightarrow$

$\sum c_j \in C_{f,\varphi}$, tj. $C_{g,\varphi} \subseteq C_{f,\varphi}$. Aplikuji inf:

$$(g:\varphi) \ge (f:\varphi).$$

5. $(f:\varphi) \ge \frac{\|f\|}{\|\varphi\|}$? $\sum_j c_j \in C_{f,\varphi} \Rightarrow f(x) \le \sum_j c_j L_{x_j}\varphi(x) \le$

$\le \sum_j c_j \|\varphi\|$. $\|f\| = \sup\{f(x) \mid x \in G\} \le \sum_j c_j \|\varphi\| \Rightarrow$

$c_j \ge 0$ (def sup)

$$\sum_j c_j \ge \frac{\|f\|}{\|\varphi\|} \underset{\inf}{\Rightarrow} (f:g) \ge \frac{\|f\|}{\|\varphi\|}$$

6. Vynásobením $L_x L_{\tilde{x}} = L_{\tilde{x}x}$

6. $\sum_i c_i \in C_{f,g} \wedge \sum_j d_j \in C_{g,\varphi}$. Pak $f \leq \sum_i c_i L_{x_i} g \wedge g \leq \sum_j d_j L_{y_j} \varphi$

$$\Rightarrow f \leq \sum_i c_i L_{x_i}\left(\sum_j d_j L_{y_j} \varphi\right) = \sum_{i,j} \underbrace{c_i d_j}_{\tilde{x}_k} L_{x_i y_j} \varphi \Rightarrow$$

$\sum_{i,j} c_i d_j \in C_{f,\varphi}$. Dokonce $\sum_i c_i \sum_j d_j \in C_{f,\varphi} \Rightarrow C_{f,g} \cdot C_{g,\varphi} \subseteq$

$\subseteq C_{f,\varphi}$. Odtud $(f:\varphi) = \inf C_{f,\varphi} \leq \inf(C_{f,g} \cdot C_{g,\varphi}) \overset{(\geq 0)}{=}$

$= \inf C_{f,g} \cdot \inf C_{g,\varphi} = (f:g)\cdot(g:\varphi)$ $\square$

<u>Definice</u>: $f_0 \in C_c^+(G)$. $\forall \varphi \in C_c^+(G)$: $I_\varphi : C_c^+(G) \longrightarrow (0,+\infty)$,

$$\boxed{I_\varphi(f) := \frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)}}.$$

<u>Cíle</u>: ~~$f_0 \in C_c^+(G)$~~ 1. $I_\varphi(f)$ sublineární a transl. invariantní

2. Urysonova věta (bez dk.)

3. Tychonovova věta (součin kpktů)

4. Stejnoměrná spojitost

<u>Tychonovova věta</u>: Nechť A je množina a (X_α, τ_α) buďte pro každé $\alpha \in A$ kompaktní top. prostory. Pak $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ se součinovou topologií je kompaktní.

<u>Pozn.</u>: 1. $\{\pi_\alpha^{-1}(U);\, U$ ot. v X_α, $\alpha \in A\}$ je subbáze X

2. $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ $\quad \pi_\alpha(f) := f(\alpha)$ jsou spojité

3. Def τ_X bývá τ_X je iniciální pro rodinu $\{\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha;\ \alpha \in A\}$, kde π_α def. v bodě 2.

Stejnoměrná spojitost

Def: G buď topol. grupa a $f \in C(G)$. Řekneme, že f je zleva stejnoměrně spojitá, pakud $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ okolí $V \ni e$, že $\|L_y f - f\| < \varepsilon\ \ \forall y \in V$.

Obdobně stejnom. spoj. zprava.

Lemma 1: Každá $f \in C_c(G)$ je zleva i zprava stejnom. spojitá.

Dk.: $\varepsilon > 0$. $K := \operatorname{supp} f$. Spojitost v $x \in K$: $\exists U_x \ni e\ \ \forall z \in U_x$

(*) $|f(z^{-1}x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\forall x$ a U_x vezmi $V_x \ni e$, že $V_x V_x \subseteq U_x \wedge$

$\wedge\ V_x$ symetrické (Existence bude úloha na cvičení.)

$\{V_x x\}_{x \in K}$ pokrývá K. K kpt $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n$, že $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} x_i$.

$V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Zjevně $e \in V$ a V je okolí a V je symetrické.

$x \in K \Rightarrow x \in V_{x_i} x_i\ \exists i$

• $\forall x \in K$, $\forall y \in V$. Pak $x x_i^{-1} \in V_{x_i}$ $\cancel{\subseteq U_{x_i}}$ pro nějaké i. Dále:

$y^{-1} x x_i^{-1} \in V V_{x_i} \subseteq V_{x_i} V_{x_i} \subseteq U_{x_i}$ pro $\forall y \in V$. Tedy

spoj. v x_i + (*)

$|f(y^{-1}x) - f(x)| = |f(y^{-1} x x_i^{-1} x_i) - f(x x_i^{-1} x_i)| \le$

$\le |f(y^{-1} x x_i^{-1} x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x x_i^{-1} x_i)| <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\quad V_{x_i} \subset U_{x_i}$ (tuV.)

• $\forall x \notin K \Rightarrow$ a) $y^{-1}x \notin K$ ... nerovnost je triviální.

b) $y^{-1}x \in K \Rightarrow y^{-1}x \in V_{x_i} x_i \Rightarrow$ ... $y^{-1} x x_i^{-1} \in V_{x_i}$ $\exists i$. Odtud

(stačí $y \in V$) $x x_i^{-1} = \underbrace{y}_{V} \underbrace{y^{-1} x x_i^{-1}}_{V_{x_i}} \in V_{x_i} V_{x_i} \subseteq U_{x_i}$. Tedy

$|f(y^{-1}x) - f(x)| \le |f(y^{-1}x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| =$

$= |f(y^{-1} x x_i^{-1} x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x x_i^{-1} x_i)|$

$< \varepsilon$. $\quad V_{x_i} \subseteq U_{x_i}$ (Tím spíš pro sup.) □

Lemma 2: $\forall f \in C_c(G)$ a $\varepsilon > 0\ \exists V \ni e$, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, pokud $y^{-1}x \in V$ nebo $y x^{-1} \in V$.

Dk.: $v \in V_1$: $|L_v f - f| < \varepsilon$; $v \in V_2$: $|R_v f - f| < \varepsilon$ $\quad V := V_1 \cap V_2$

2) $y^{-1}x \in V_2 \Rightarrow y^{-1}x = v \Rightarrow x = yv$ $\quad |f(yv) - f(y)| < \varepsilon$ $\quad R_v$ ...

1) $y x^{-1} \in V_1 \Rightarrow y x^{-1} = v \Rightarrow y = vx$ $\quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $\quad L_v$ ... □

$x = v^{-1} y$

(1,5)

Def: $I_\varphi(f) := \dfrac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \quad \forall \varphi, f \in C_c^+(G)$

f_0 zvoleno pevně a neoznačujeme jej v notaci $I_\varphi(f)$.

Lemma 3: $\forall f, \varphi \in C_c^+(G)$: $(f_0 : f)^{-1} \leq I_\varphi(f) \leq (f : f_0)$

Dk.: $I_\varphi(f) = \dfrac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)}$. Chceme

BOD 6 „dlouhé věty"

$$(f:\varphi) \leq (\underset{\sim}{f:f_0})(\underset{\sim}{f_0:\varphi}) \checkmark$$

$$\frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \geq \frac{1}{(f_0:f)} \iff (f:\varphi)(f_0:f) \geq (f_0:\varphi)$$

$\iff (\underset{\sim}{f_0:f})(\underset{\sim}{f:\varphi}) \geq (f_0:\varphi)$, tj. opět bod 6 dlouhé věty. $\square$

Lemma 4: I_φ je ~~sublineární~~ lineární a levoinvariantní.

Dk.: 1. $I_\varphi(f_1+f_2) = \dfrac{(f_1+f_2:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \overset{\text{BOD 2 dlouhé věty}}{\leq} \dfrac{(f_1:\varphi)}{(f_0:\varphi)} + \dfrac{(f_2:\varphi)}{(f_0:\varphi)} = I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2)$.

2. $I_\varphi(cf) = c\, I_\varphi(f)$ opět dlouhá věta, bod 3

3. $I_\varphi(L_x f) = \dfrac{(L_x f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \underset{\text{opět, bod 1}}{=} \dfrac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} = I_\varphi(f)$. $\square$

<u>Lemma 5</u>: $\forall f, g \in C_c^+(G)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists V$ $\boxed{\forall \varphi}$ $\operatorname{supp}\varphi \subseteq V$

↑ oprava předpokladu

$\boxed{(\text{„obrácení" „subaditivity"})}$ $I_\varphi(f) + I_\varphi(g) \le I_\varphi(f+g) + \varepsilon.$

Dk.: „Urysohn" $\exists h_0 \in C_c^+(G),\ h_0(x) = 1\ \ \forall x \in \operatorname{supp}(f+g)$

$\forall \delta > 0;\ h = f + g + \delta h_0$

$h_1(x) := \begin{cases} f/h\,(x), & x \in \operatorname{supp}(f) \\ 0 \end{cases}$ | $h_2(x) = \begin{cases} g/h, & x \in \operatorname{supp}(g) \\ 0 \end{cases}$

$h_1, h_2 \in C_c^+(G)$ ze zákl. vět o spojitosti.

Z lemma ~~3~~ (důsl. stejnom. spoj.): pro δ $\exists V \ni e$

$|h_1(x) - h_1(y)| < \delta$ a $|h_2(x) - h_1(y)| < \delta$ pokud $y^{-1}x$ nebo $yx^{-1} \in V$

Nechť $\varphi \in C_c^+(G)$ a $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V$. ~~$\forall x \in G$~~

Nechť $\sum_{j=1}^m c_j \in C_{h,\varphi} \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_m$, že mám příslušné odhady

Mám $f(x) = h(x)h_1(x) \le \sum_{j=1}^m c_j (L_{x_j}\varphi)(x) h_1(x)$ (1)

$g(x) = h(x)h_2(x) \le \sum_{j=1}^m c_j (L_{x_j}\varphi)(x) h_2(x)$ (2)

$\forall x \in G$: <u>pokud</u> $x_j^{-1}x \in \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V$, mám

$|h_1(x) - h_1(x_j)| < \delta \wedge |h_2(x) - h_2(x_j)| < \delta$

$\Downarrow$

~~(1)~~ $h_1(x) - h_1(x_j) < \delta$

$0 \le h_1(x) < \delta + h_1(x_j)$ <u>Pro ost.</u> x_j je $L_{x_j}\varphi = 0$ a nabývají nuly

$(1) \le \sum_j c_j (L_{x_j}\varphi)(x)(\delta + h_1(x_j))$ ✓

$(2) \le \sum c_j (L_{x_j}\varphi)(x)(\delta + h_2(x_j))$ ✓ ~~$\forall x\ \exists x_j\ x_j^{-1}x \in \operatorname{supp}$~~

$(f:\varphi) \le \sum g_j (h_1(x_j)+\delta)$ $\in C_{f,\varphi}$ (viz výše) inf je dolní záv

$(g:\varphi) \le \sum g_j (h_2(x_j)+\delta)$ $\in C_{g,\varphi}$ (viz výše) inf je dolní záv.

$$h_1+h_2 \le \frac{f}{h}+\frac{g}{h} = \frac{f+g}{h} = \frac{f+g}{f+g+\underbrace{\delta h_0}_{\ge 0}} \le 1$$

$$(f:\varphi)+(g:\varphi) \le \sum_j g_j (h_1(x_j)+h_2(x_j)+2\delta) \le \sum_j g_j (1+2\delta)$$

$$L = \frac{(f:\varphi)+(g:\varphi)}{(1+2\delta)} \le \sum_j g_j \qquad \frac{C_{h,\varphi} \ni \sum_j g_j}{L}$$

L je dolní závora. $\inf(C_{h,\varphi}) \ge L$ inf je ~~minim~~ maximální (zde: největší)

$\inf(C_{h,\varphi}) = (h:\varphi)$

$$\inf(C_{h,f}) \ge \frac{(f:\varphi)+(g:\varphi)}{(1+2\delta)}, \text{ tj. } (f:\varphi)+(g:\varphi) \le \cancel{\inf} \le (h:\varphi)(1+2\delta)$$

$$l_\varphi(f)+l_\varphi(g) = \frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} + \frac{(g:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \le \frac{(h:\varphi)}{(f_0:\varphi)}(1+2\delta) = l_\varphi(h)(1+2\delta)$$

$$\le (1+2\delta)\, I_\varphi(f+g+\delta h_0) \underset{I_\varphi \text{ sublineární}}{\le} (1+2\delta)\left[I_\varphi(f+g)+\delta\, I_\varphi(h_0)\right]$$

Zal δ, aby: $2\delta I_\varphi(f+g) + (1+2\delta)\delta I_\varphi(h_0) < \varepsilon$.

To lze. $2\delta^2 A + 2\delta B - \varepsilon < 0$

$\delta_{1,2} = -B \pm \sqrt{B^2+2A\varepsilon}$

$\square$

Celkem $l_\varphi(f)+l_\varphi(g) \le I_\varphi(f+g)+\varepsilon$.

~~Pozn.: Celkem: $I_\varphi(f)+I_\varphi(g) \le I_\varphi(f+g)$. Celkem I_φ lineární.~~

~~$a \le b+\varepsilon \ \forall \varepsilon \Rightarrow a \le b$. Spor $a > b$. $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$~~

~~$a \le b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a \not\le b$ ↯.~~

Věta (Haarova míra – existence): Nechť G je lokálně kompaktní grupa. Pak G má levou Haarovu míru.

Dk (a la Weil): $\forall f \in C_c^+(G)$ $X_f := \left\langle \frac{1}{(f_0 : f)}, (f_0 : f) \right\rangle \subseteq \mathbb{R}$, $X :=$

$= \prod_{f \in C_c^+(G)} X_f$ je kompaktní dle Tychonovovy věty. $I_\varphi : C_+^c(G) \to \bigcup X_f$ $(I_\varphi \in \times X_f)$

Nechť $\varphi \in C_c^+(G)$. Pak $\overset{\mathrm{Rng}}{(I_\varphi)} \subseteq \bigcup X_f$ dle ~~[illegible]~~ Lemma 3.

$\forall V$ okolí $e \in G$: $K_V := \overline{\{ I_\varphi \in X \mid \varphi \in C_c^+(G), \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V \}}$.

(V okolí e, zvol $\operatorname{supp}\varphi \subseteq V$, $\varphi \in C_c^+(G) \Rightarrow I_\varphi \in \{ I_\varphi \in X \mid \varphi \in C_c^+(G)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V \} \Rightarrow I_\varphi \in \overline{\{\ \}} = K_V$. $C_V := \{ I_\varphi \in X \mid \varphi \in C_c^+(G), \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V \}$

1. K_V je uzavřená v kompaktu (v X), tj. K_V je kompaktní.
2. $\{K_V \mid V \text{ okolí } e\}$ má FIT (vlastnost konečných průniků):

$\overline{\bigcap A_i} \subseteq \bigcap \overline{A_i}$

Uvaž $K_{V_1}, K_{V_2}, \dots, K_{V_n}$; V_i okolí e, $i = 1, \dots, n$.

Zřejmě $e \in \bigcap_{i=1}^n V_i \neq \emptyset$. Urysohn: $\exists \varphi \in C_c^+(G)$ $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \bigcap_{i=1}^n V_i$, tj.

$I_\varphi \in C_{\bigcap_{i=1}^n V_i}$. Zřejmě $C_{\bigcap_{i=1}^n V_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^n C_{V_i}$, tj. $\bigcap_{i=1}^n K_{V_i} \neq \emptyset$.

(centrovaný systém) FIT $\Rightarrow$ $\bigcap_V \{K_V \mid V \text{ okolí } e\} \neq \emptyset$. Zvol $I \in \bigcap_V K_V$.

3. Chceme I je sublimární a invariantní.

a) „Malá odbočka" (vysvětlení kvůli součinu):
$I \in K_V$ $\forall V$. Buď $f \in C_c^+(G)$. Pak (z def. uzávěru) existuje $I_\alpha \in C_V$, $I_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} I$. Ovšem síť konverguje v součinu $\Rightarrow$ všechny složky sítě konvergují, tj. $\forall g \in C_c^+(G)$ $\pi_g \circ I_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} \pi_g \circ I$. Co je to $\pi_g \circ I_\alpha$?
$\pi_g \circ I_\alpha = I_\alpha(g)$, tj. $I_\alpha(g) \xrightarrow[\alpha]{} I(g)$. „Rozepišme"

konvergenci $\forall \varepsilon\ \exists \alpha_0\ \forall \alpha \geq \alpha_0\ \forall g \ \big|\, I_\alpha g - I(g) \big| < \varepsilon$

b) Nyní invariance: $I \in K_V$ $\quad I_\varphi \in C_V$, $K_V = \overline{C_V}$

$\cancel{|I_\varphi(L_x g) - I(L_x g)|}$

$$|I(L_x g) - I(g)| = |I(L_x g) - I_\varphi(L_x g) + I_\varphi(L_x g) - I(g)| \underset{\uparrow}{=} |I(L_x g) - I_\varphi(L_x g)$$

invariance I_φ (Lemma 4)

$$+ I_\varphi(g) - I(g)| \leq$$

$$|I(L_x g) - I_\varphi(L_x g)| + |I_\varphi(g) - I(g)| \leq$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$\Leftarrow$ I a I_φ jsou blízko, $I(g)$ a $I_\varphi(g)$ taky, $I(L_x g)$ a $I_\varphi(L_x g)$ taky

c) Sublinearita (z Lemma 5):

$$|I(f+g) - I(f) + I(g)| = |\underline{I(f+g) - I_\varphi(f+g)} - \underline{I(f) + I_\varphi(f)} + \underline{I(g) - I_\varphi(g)} + I_\varphi(f+g)$$

$$- I_\varphi(f) + I_\varphi(g)| \leq |I(f+g) - I_\varphi \cdots| +$$

$$+ |I(f) - I_\varphi(f)| + |I(g) - I_\varphi(g)| + |I_\varphi(f+g)$$

$$- I_\varphi(f) + I_\varphi(g)| \underset{\underset{L5}{\uparrow}}{\leq} \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon.$$

d) $I(cf) = cI(f)$ $\forall c > 0$ obdobně

e) $I(f) := I(f_+) - I(f_-)$ a event. $f : G \to \mathbb{C}$

$I(f) := I(\mathrm{Re} f) + i\,(\mathrm{Im} f)$

Celkem $I: C_c(G) \to \mathbb{R}$ je ~~levo~~ invariantní, sublineá- rní a $\mathbb{C}$-lin. zobrazení. Navíc je pozitivní (bod 4 dlouhé věty). Riesz: $\exists \mu$ Radonova, že

$$I(f) = \int_G f \, d\mu \quad \forall f \in C_c(G).$$

Invariance μ plyne z invariance I. Nenulovost μ také $(I \neq 0 \Leftarrow I_\varphi \neq 0)$

Pozn.: 1. Obdobně existence pravé Haarovy míry

2. Jedn. až na kladnou konstantu

Věta (jedn. H.m.): Je-li G lok. komp. a μ_1 a μ_2 levé nenulové Haarovy míry, pak $\exists! c > 0$ $\mu_1 = c\mu_2$.

Dk.: Vynechán (Tonelliho věta), Bc. thesis Marcus Dechiffre (Haar + Dechiffre)

Pozn: 3. μ nejen ~~Rad~~ regulární, ale i lok. konečná ve smyslu $\mu(K) < \infty$ $\forall K$ komp. (bod 4 str. 13, Bc. de Chiffre)

Věta (unicita Haarovy m.): Nechť G je lokálně kompaktní a μ je levá Haarova míra. Je-li ν levá Haarova míra, pak $\exists c>0$ $\mu = c\nu$.

Dk.: vynechán. Viz např. bc-práce M. Dechiffre (Kodaň). Důkaz se opírá o Tonelliho větu (snažší než $\exists$) a opět verzi Urysohnovy věty $\square$

! Konstrukce modulu (modulární fce). $\forall g \in G$, μ levou H. m.

- $\mu_g(U) := \mu(Ug)$.
- Zřejmě $\mu_g(hU) = \mu(hUg) = \mu(Ug) = \mu_g(U)$, tj. μ_g je levá H. míra (radonovskost zřejmá). Dle unicity
- $\exists c_g > 0$, že $\mu_g(U) = c_g \mu(U)$ $\forall U$. Definujme
- $\Delta(g) := c_g$, $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$. $[\mu_g(U) = \Delta(g)\mu(U)]$

Tvrzení 1: 1. Δ je homom. grup.

2. Δ je spojitý

3. $\Delta^\mu = \Delta^\nu$ $\forall \mu, \nu$ levé Haarovy míry

Dk.: 1) a) $\Delta(g_1 g_2)\mu(U) = \mu(Ug_1g_2) = \mu_{g_2}(Ug_1) = \Delta(g_2)\mu(Ug_1) =$
$= \Delta(g_2)\Delta(g_1)\mu(U)$.
Buď $\mu(U) \neq 0$ (stačí U otevř.) Odtud $\Delta(g_1g_2) = \Delta(g_1)\Delta(g_2)$

b) $\Delta(e) = \Delta(e^2) = \Delta(e)\Delta(e)$
$\Rightarrow \Delta(e) = 1$ ($\Delta(e) = 0$ nelze dle $c_e > 0$). Odtud triviálně $\Delta(g^{-1}) = \Delta(g)^{-1}$.

2) spoj. vynechána (důsl. vět o stejn. spoj.). Dechiffre pro zájemce

3) $\nu_g(U) = \nu(Ug) \overset{\exists c\ \nu = c\mu}{=} c\,\mu(Ug) = c\,\Delta^\mu(g)\mu(U) = \Delta^\mu(g)\nu(U)$
$\nu_g(U) = \Delta^\nu(g)\nu(U)$ $\Big\} \Longrightarrow \Delta^\mu(g) = \Delta^\nu(g)$ $\forall g$ (U otevř. $\Rightarrow \nu(U) \neq$

Tvrzení 2: 1. $\Delta = 1$ a μ levá H.m., pak μ je i pravá Haarova míra. (Analogicky: pravá, levá, Δ pro pravou μ.) Platí i $\exists\, \mu$ levá, jež je i pravá $\Rightarrow$ $\Delta = 1$.

2. G abelovská $\Rightarrow \Delta = 1$.

3. G kompaktní $\Rightarrow \Delta = 1$.

Dk.: 1.a) $\mu(Ug) = \Delta(g)\mu(U) = \mu(U) \Rightarrow \mu(Ug) = \mu(U) \Rightarrow \mu$ pravá $\forall g$

Analog:
$\mu(gU) = \Delta^P(g)\mu(U) = \mu(U) \Rightarrow \mu(gU) = \mu(U) \Rightarrow \mu$ levá!

b) μ levá, jež je i pravá: $\left.\begin{array}{l} \mu(Ug) \underset{\text{pravá}}{=} \mu(U) \\ \overset{\text{def } \Delta}{\parallel} \\ \Delta(g)\mu(U) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = 1$

2. G abel $\left.\begin{array}{l} \mu(Ug) \underset{\text{abel } G}{=} \mu(gU) \underset{\text{levost } \mu}{=} \mu(U) \\ \parallel \\ \Delta(g)\mu(U) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = 1$ Opět $\mu(U) \neq 0$.

3. G kpt., μ levá $\Rightarrow \mu$ Radon $\overset{*)}{\Rightarrow} \mu(G) < \infty$

Dále $\mu(G) \underset{G = Gg\ (R_g \text{ homeo})}{=} \mu(Gg) = \Delta(g)\mu(G) \Rightarrow \Delta = 1$.

Definice: G lok. komp., $\Delta = 1 \Rightarrow G$ sluje unimodulární. μ levá Haarova, jež je i pravou sluje Haarovou.

Pozn.: • Def unimodularity nez. na μ výběru (Tvrzení 1)
• G unimodulární $\Leftrightarrow$ každá levá Haarova je i pravou ($\Leftrightarrow$ každá pravá je levou), jak plyne z Tvrzení 2.

---

*) V dechiffre je $\mu(K) < \infty$ $\forall K$ cpt součást def. radonovskosti, což není úplně std. U nás to plyne takto: Máme fcionál I a pro něj Riesz ona věta poskytne μ. Ole dechiffre na s. 14 "Now we..." dokáže, že $\mu(K) < \infty$. (To že u něj je součást. radon. U nás to však stačí, abychom uznali platnost $\overset{*)}{\Rightarrow}$ výše.) [S. 14 hned nahoře.]

Příklady Haarových měr (vč. levých nebo pravých Haarových měr).

1. Lebesgueova na $\mathbb{R}^n$.

2. Počítací: $\mu(U) = \#U$ $\forall U$ měřitelnou, v Σ_X. Σ_X Borelova pro X top. prostor. Pokud X diskrétní $\Rightarrow \mu$ je Radonova (vč. lok. konečnosti) a μ je levo-(i pravo-)invariantní.

Diskrétnost X není nutná: (X, τ_X) kofinitní topologie na nekonečné množině X. Borelovská σ-algebra:
$\Sigma_X = \{U \subseteq X \mid U \text{ konečná nebo } X \setminus U \text{ konečná}\}$.

$\mu(U) = \begin{cases} \#U, & U \text{ konečná} \\ \infty, & \text{jinde} \end{cases}$. μ zjevně lok. kon ($\forall x$ $U_x := \{x\}$ je ze Σ_X a $\mu(\{x\}) = 1$), radonovskost (není obtížné) a invariance (zřejmá).

3. $(\mathbb{R}^{>0}, 1, \cdot)$ $\mathbb{R}^{>0} \subseteq \mathbb{R}$ s eukl. topol.

$\mu(U) := \int_{\mathbb{R}^{>0}} \chi_U \frac{d\lambda_{\mathbb{R}}}{x}$ $\Big|$ $\mu(a,b) = \int_{\mathbb{R}^{>}} \chi_{(a,b)} \frac{dx}{x} = \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\frac{b}{a}$

$\Sigma_{\mathbb{R}^{>0}} = \{\sigma\text{-algebra leb. měřitelných}\}$

radonovskost (z radonovskosti $\lambda_{\mathbb{R}}$)

lok. konečnost: $x \in \mathbb{R}^{>0}$ ... $(\frac{x}{2}, 2x) \ni x$ $\int_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{dx}{x} = \ln 4 < \infty$

invariance: pro intervaly (pak z radonovskosti):

$\int_{ra}^{rb} \frac{dx}{x} = \ln\frac{rb}{ra} = \ln\frac{b}{a} = \int_a^b \frac{dx}{x}$.

Někdy se volí $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_U(c\varphi, s\varphi)d\varphi$

4. $(S^1, 1, \cdot)$, $U \subseteq S^1$ měřitelná: $\mu(U) = \int_0^{2\pi} \chi_U(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi$
$\subseteq \mathbb{R}^2$

Př.: $U = \{(c\varphi, s\varphi) \mid 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}$

(Inv: transl. inv. Leb. $d\varphi$ + period. fcí sin a cos.)

$\mu(U) = \int_0^{2\pi} \chi_U(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\chi_U(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0) = \begin{cases} 0 & \varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi) \\ 1 & 0 \le \varphi_0 \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

5. Spočtěte Δ pro $\mathbb{R}^{>0}$: $\forall r \in \mathbb{R}^{>0}$

$$\mu_r(U) = \mu(Ur) = \int_{ra}^{rb} \frac{dx}{x}\,dx = \ln\frac{br}{ar} = \ln\frac{b}{a} = \mu(U) \Rightarrow$$

$U = (a,b)$

$$\Delta(r) = \frac{\mu_r(U)}{\mu(U)} = 1$$

Tj. $\mathbb{R}^{>0}$ je unimodulární (je abelovská).

6. Grupa $G \doteq GL(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ (ind. topologie) indukční

U buď borelovská v G nebo obecněji měřitelná. Připomeňme, že může $\mu = \infty$.

$$\mu(U) := \int \chi_U(x) \frac{d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}(x)}{|\det(x)|^n}.$$ Buď $A \in G$. Zkusme levoinvarianci

$$\mu(AU) = \int \chi_{AU}(x) \frac{d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}(x)}{|\det(x)|^n} = \left| \begin{matrix} x = Ay \\ dx = \det A\, dy \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \chi_{AU}(Ay) \frac{\det(A)}{|\det(Ay)|^n}\, d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}(y) = \int \chi_U(y) \frac{d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}(y)}{|\det(y)|^n}$$

$= \mu(U) \Rightarrow \mu$ je levoinvariantní.

Je $\neq 0$. Je radonovská ... ! Je i pravoinv.

!7. $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x > 0, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL(2,\mathbb{R})$; std. euk. topol.

a) G je grupa (cvičení)

b) $G \overset{"}{\subseteq} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. G je lok. komp. (Navíc G je dokonce Lieova)

c) $\mu(U) := \int_G \chi_U \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-2}\, d\lambda_{\mathbb{R}^2}$ $\quad \left[x^{-2}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := a^{-2} \right]$

U ot. v G

$$\mu\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U\right) = \int_G \chi_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-2}\, d\lambda_{\mathbb{R}^2}(x,y)$$

$$\chi_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in U}, \exists, \text{ tj. } = 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y-b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$$

Integruji tedy $\int\limits_{(G\subseteq)\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \chi_U \begin{pmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y-b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-2} \, d\lambda_{\mathbb{R}^2}$ $\left| \begin{array}{l} \text{subst. } x' = \frac{x}{a} \\ y' = \frac{y-b}{a} \\ \text{Jac} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{pmatrix} = a^2 \end{array} \right|$

" $dx\,dy = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'} \cdot dx'dy'$ "

$$= \int\limits_{(G\subseteq)\mathbb{R}^2} \chi_U \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (x'a)^{-2} \, |\text{Jac}| \, d\lambda'_{\mathbb{R}^2} = \int\limits_{(G\subseteq)\mathbb{R}^2} \chi_U \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x'^{-2} a^{-2} a^2 \, d\lambda'_{\mathbb{R}^2}$$

$= \int \chi_U \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x'^{-2} \, d\lambda'_{\mathbb{R}^2} = \mu(U)$. Tj. μ je levoinvari-

antní!

- μ není pravoinvariantní:

$\mu\left(U \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \int\limits_G \chi_{U\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-2} \, d\lambda_{\mathbb{R}^2} =$ $\left[\chi_{U\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in U} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \right.$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \in U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow$

$\left. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{x}{a} & \frac{-xb+ya}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U \right] = \int\limits_G \chi_U \begin{pmatrix} \frac{x}{a} & -x\frac{b}{a}+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\lambda_{\mathbb{R}^2} =$ $\left| \begin{array}{l} \text{subst} \\ x' = \frac{x}{a} \\ y' = -\frac{b}{a}x + y \end{array} \right.$

Jac " $\frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y}$ " $= \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{a} \Rightarrow \text{Jac} \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} = a \Big| =$

$$= \int \chi_U \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x'^{-2} a^{-2} \cdot a \, d\lambda_{\mathbb{R}^2} = \frac{1}{a} \int \chi_U \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x'^{-2} \, d\lambda_{\mathbb{R}^2}$$

$= \frac{1}{a} \mu(U) \neq \mu(U)$, kdykoliv $\mu(U) \neq 0$ a $a \neq 1$.

(Stačí tedy $a \neq 1$ a $\mu(U) > 0$.)

- Podgrupy unimodulárních nemusí být unimodulární!

8. $SL(n, \mathbb{R})$ je unimodulární

9. Heisenbergova grupa také

Pozn.: Ad det ~~zobrazení~~ Jakobiho matice zobrazení

$$X \mapsto AX \quad , \quad M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$$

j-tý ~~sloupec~~ sloupec $(AX)_{ij} = \sum_k A_{ik} X_{kj}$ $\quad i = 1, \dots, n$

je $(A\vec{X}_{j})_{i=1,\dots,n}$

$\downarrow$ značím sloupcový vektor

$\vec{X}_j$ pak j-tý sl. vektor X

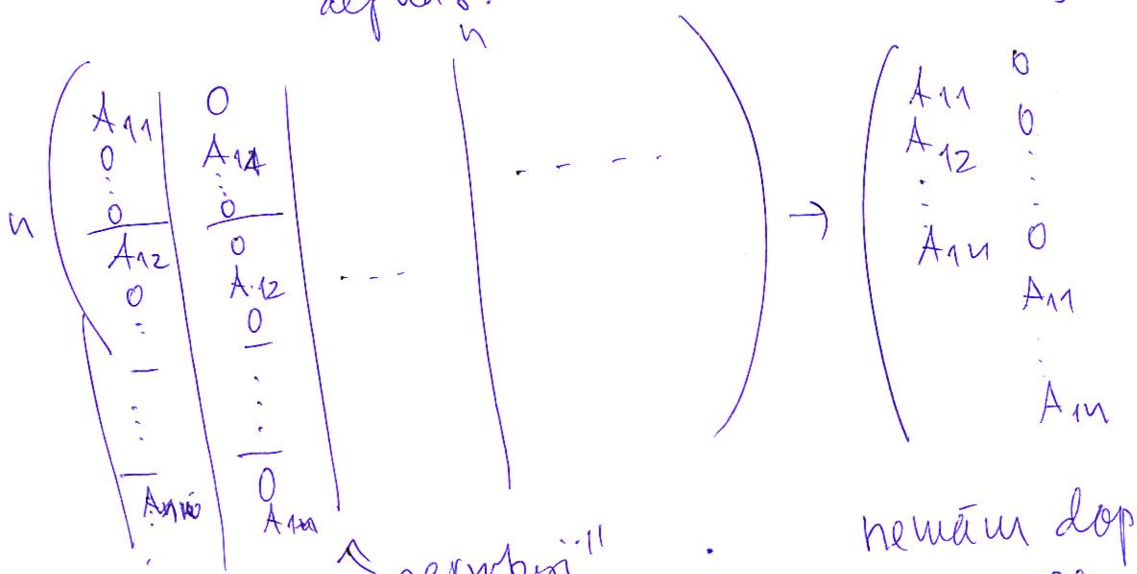
1. Vzniklá matice sestává z

$$\left(A\vec{X}_1 \,\middle|\, A\vec{X}_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, A\vec{X}_n \right)$$

$|\det(\mathrm{Jac}(X \mapsto AX))| = |\det(X \mapsto AX)| = |\text{objemu } \{A\vec{X}_1, \dots, A\vec{X}_n\}| = |\det A|^n.$

2. Nebo pomocí $(AE_{ij})_{kl}$, kde $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$

$$(AE_{ij})_{kl} \underset{\text{def. nás.}}{=} \sum_m A_{km} (E_{ij})_{ml} = \sum_m A_{km} \delta_{im} \delta_{jl} = A_{ki}\delta_{jl}$$



„permutuji"

nemám dopsáno zezadu.

Cvičení k před. 6.

1. Okolí v topologických grupách

a) $\forall U \subseteq G$ ot., $\forall x \in G$: xU, Ux, U^{-1} otevř.

Dk.: L_x, $R_{x^{-1}}$ i $^{-1}$ jsou homeom.

b) $\forall U \subseteq G$ okolí e $\exists V \subseteq U$ sym. okolí e. (V sym $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $x \in V \Rightarrow x^{-1} \in V$; $\Leftarrow$ triv.)

Dk.: U^{-1} je okolí e : 1) $e \in U^{-1}$

2) $e \in W \subseteq U$, W ot. $\Rightarrow W^{-1}$ ot $\wedge$ $e \in W^{-1}$

Zjevně $W^{-1} \subseteq U^{-1}$ ($x \in W^{-1} \Leftrightarrow x^{-1} \in W \Rightarrow x^{-1} \in U \Leftrightarrow x \in U^{-1}$)

$V := U \cap U^{-1}$ je okolí e : $x \in W^{-1} \cap W \Rightarrow x \in W \wedge x \in W^{-1} \Rightarrow$
$x \in U \wedge x \in U^{-1} \Rightarrow x \in U \cap U^{-1}$, tj. $W^{-1} \cap W \subseteq V$.
$e \in W$, $e \in W^{-1} \Rightarrow e \in W \cap W^{-1} \Rightarrow$

V sym : $x \in V \Rightarrow x \in U \cap U^{-1} \Rightarrow x \in U^{-1} \Rightarrow x^{-1} \in U$
$\Rightarrow x \in U \Rightarrow x^{-1} \in U^{-1}$ $\Big\}$ $x^{-1} \in V$.

c) $\forall U \subseteq G$ otevřené okolí e $\exists$ sym. V, že $VV \subseteq G$.
(otevřené ⇑ pro jednoduchost; V okolí e)

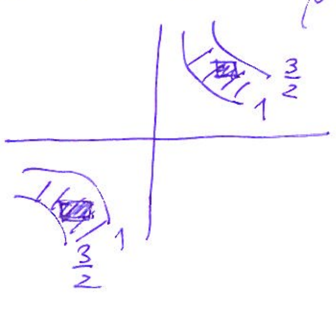
$\mu: G \times G \to G$ (násobení), $\mu^{-1}(U) \subseteq G \times G$, $\mu^{-1}(U)$ otevřené $\wedge$ $(e,e) \in \mu^{-1}(U)$

Z def. souč. topol.: $V_1 \times V_2 \subseteq \mu^{-1}(U)$, V_1, V_2 otevřené a $e \in V_1$ a $e \in V_2$. $V := V_1 \cap V_2$ $\quad VV = (V_1 \cap V_2)(V_1 \cap V_2) \subseteq V_1 V_2 \overset{?}{\subseteq} U$:

Buď $xy \in V_1 V_2$ $\quad xy = \mu(x,y) \in U$, tj. $V_1 V_2 \subseteq U$.

Př.: $\mu^{-1}(U)$ nemusí být součinem množin („chyba" v bc-práci Chliffra). $1 < x < \frac{3}{2}$ … U

$G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad \mu^{-1}(U) = \{(x,y) \mid 1 < xy < \frac{3}{2}\}$



Evidentně $\mu^{-1}(U)$ není $\times$, ale … obsahuje obdélníky (součiny).

Konstrukce Haarovy míry pro Lieovu grupu. (Cv k před. 6)

G Lieova $\Rightarrow T_eG \Rightarrow T_e^*G$ $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$ buď báze

$\bar\omega := \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n \neq 0$. $L_g : G \to G$ difeo • $(L_g)_h^* : T_h^*G \to$

$\to T^*_{(L_g)^{-1}(h)}G$ $\quad (L_g)^{-1}(h) = g^{-1}h \quad (L_g^{-1} \circ L_g(h) = g^{-1}gh = h \dots)$

Tj. $(L_g)_h^* : T_h^*G \to T_{g^{-1}h}^*G$.

$\omega_{g^{-1}} := (L_g)_e^{*\wedge n}\bar\omega$ a) $\omega \in \Gamma(\Lambda^n T^*G)$

b) $\omega_{g^{-1}} \neq 0$ $\forall g \in G$, neb L_g difeo

dif. geom.

$\Rightarrow (L_g)_h^*$ izom. $\Rightarrow (L_g)_h^{*\wedge n}$ také (lin. algebra)

c) Invariance: $\overset{L=}{(L_g)}{}_{h^{-1}}^{*\wedge n}\omega_{h^{-1}} = (L_g)_{h^{-1}}^{*\wedge n}(L_h)_e^{*\wedge n}\bar\omega =$

$= (L_h \circ L_g)_e^{*\wedge n}\bar\omega = (L_{hg})_e^{*\wedge n}\bar\omega = \omega_{(hg)^{-1}}$

$L = (L_g^{*\wedge n}\omega)_{g^{-1}h^{-1}} = \omega_{g^{-1}h^{-1}}$

$\uparrow$

$(\phi^*\alpha)(p) = \phi^*_{\phi^{-1}(p)}\alpha_{\phi^{-1}(p)}$ *)

$\int f\, d\mu := \int f\omega$. $\quad \int (L_g f)\, d\mu \overset{\text{def}}{=} \int (L_g f)\,\omega \overset{c)}{=} \int L_g f\, L_g^*\omega$

$= \int L_g^*(f\omega) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{anal. na varietách}}}{=} \int f\omega \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}}{=} \int f\, d\mu$

*) Je asi lepší" v tomto výpočtu bod vynechávat.

$\omega := L_g^*\bar\omega \quad | \quad L_h^*\omega = L_h^* L_g^*\bar\omega = (L_g \circ L_h)^*\bar\omega =$

$= L_{gh}^*\bar\omega = \omega$ | Moc ne. Budiž věříme, že bereme správně... Korektnější je ©.

4. Základy [+ noa.] teorie reprezentací topologických grup

Motivace: Chceme analog $e^{2\pi i(x,y)}$ „pro obecnou grupu."

$x \in \mathbb{R}^n$ pevné, $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto e^{2\pi i(x,y)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad e^{2\pi i(x,y)}(z) := e^{2\pi i(x,y)} z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Takto chápaná exponenciála je element $U(1)$,

$U(n) = \{ A \in Mat(n,n;\mathbb{C}) \mid A^* A = 1\!\!1_n \}$

$A^* = \overline{A^T}$, $1\!\!1_n = E$

Def.: G topologická grupa, H úplný lokálně konvexní topologický vektorový prostor (Banachův, Hilbertův...). Každý homomorfizmus $\rho : G \to Aut(H)$ nazveme reprezentací G na H, pokud je přidr. zobrazení $\psi : G \times H \to H$ spojité, kde $\psi(g,v) = \rho(g)v$ $\forall g \in G$ a $v \in H$. Často ozn. (ρ, H).

Označení: $Aut(H) := \{ T : H \to H \mid T$ je bijekce, T je spojitá a se spojitou inverzí $\}$ (T je homeomorfizmus; někdy poníže ~~věta~~ o otevř. zobr.)

„Banach"

Př.: 1. $\rho : SO(3) \to Aut(\mathbb{R}^3)$ $\quad \rho(g)v := g(v)$, $\forall g \in G$, $v \in \mathbb{R}^3$ (tautologická repr.); $SO(n) := \{ A \in Mat(n,n;\mathbb{R}) \mid A^T A = 1\!\!1_n \}$

2. $\chi_x : \mathbb{R} \to Aut(\mathbb{C})$, $\chi_x(t)v := e^{2\pi i x t} v$, tzv. unitární charakter $\mathbb{R}$ (příslušný x) ... právě ve Fourierově transf.

3. $\rho : \mathbb{R} \to Aut(L^2(\mathbb{R}))$, $[\rho(s)f](t) = f(t-s)$; na $L^2(\mathbb{R})$ top. ind. $(f,g) := \int_{\mathbb{R}} \bar{f} g \, d\lambda_{\mathbb{R}}$

tzv. indukovaná levou translací $L_s(t) := s + t$

$(\rho(s)f = L_s f \; (= f \circ L_{s^{-1}} = f \circ L_{-s}))$

4: $\rho_m : S^1 \to Aut(\mathbb{C})$ $\quad \rho_m(e^{2\pi i \varphi})z := e^{2\pi i m \varphi} z$, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$

Pozn.: Kdybychom uvažovali topologii na $Aut(H)$, $\dim H = \infty$, i.e. např. v případě H Banachův indukovanou například operátorovou normou, ukazuje se, že „běžné" reprezentace (jen homomorfismy) byly nebyly spojité.

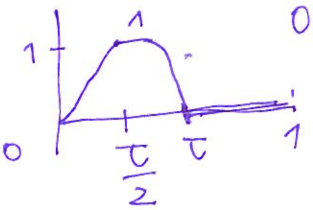
Př. (cvičení): $\rho : \underset{\text{std. topol } (\cong S^1)}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \to Aut(\underbrace{C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})}_{=:H \text{ Banachův}})$, kde

na $\mathbb{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ uvažuji $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} |f(t)|$ ($\exists$ spoj. na kpt.),

$(\rho(t)f)(x) := f(x-t)$, $x, t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

1. $\rho \dots \rho(t) : C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \xrightarrow[\text{do}]{} C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$; $\rho(t)f$ zjevně spojitá.
2. $\rho \dots$ homom. (triv)
3. ρ ale není spoj. jako zobr $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to Aut(\underbrace{C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})}_{H})$ s op. topol. indukovanou $\| \ \|$.

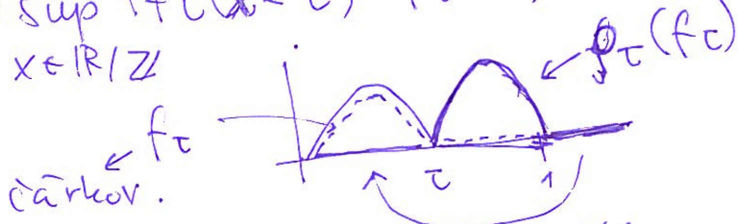
Vezmeme f_τ (pro $\tau > 0$)



$0 \le f_\tau \le 1$ a $f_\tau(\frac{\tau}{2}) = 1$, $\operatorname{supp} f_\tau \subseteq [0, \tau]$

$\|f_\tau\| = 1$, $\|\rho(\tau) - Id\|_{op} \ge \|\rho(\tau)f_\tau - f_\tau\| =$

$= \sup_{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} |f_\tau(x-\tau) - f_\tau(x)|$



V rozdílu se nevyruší: stále sup je 1

Tj. $\|\rho(\tau) - Id\|_{op} \ge 1 \ \forall: \ 0 < \tau < 1$

Triviálně $\|\rho(0) - Id\|_{op} = \|Id - Id\|_{op} = 0$

Existuje i „přirozenější" případ $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightsquigarrow L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

Půjde nám o tzv. unitární reprezentace, tj. H bude Hilbertův prostor, $(\,,\,)$ sk. součin na něm.

<u>Def</u>: $\rho : G \to \mathrm{Aut}(H)$ reprezentaci, nazveme <u>unitární</u>, pokud $\forall g \in G$ $(\rho(g)v, \rho(g)w) = (v, w)$ $\forall v, w$

<u>Pozn.</u>: • Tj. $\rho \xrightarrow{\text{do}} U(H) = \{T : H \to H \mid T^* T = T T^* = \mathbb{1}_H\}$ $= Id_H$

Obecná izometrie je slabší pojem, neb nemusí být <u>na</u> (tedy nemusí být bijekce). Slabší: ∃izometrie, jež neplňuje rci v def $U(H)$.

• Pokud H je nad $\mathbb{R}$, stále mluvíme o unit. rep. Def T^* je $(T^* v, w) = (v, Tw)$ $\forall v, w$ nezávisle na tělese.

<u>Př.</u>: 1. $\rho : SO(n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ $\rho(g)(v) = g(v)$, tzv. tautologická repr. ortogonální grupy.

2. Shift $T(e_i) := e_{i+1}$ v separabilním Hilbertově prostoru není (není na), $i \in \mathbb{N}_0$.

Speciální význam pro unitárnost je kompaktnost grupy.

<u>Věta</u> (unitarizovatelnost repr. komp. grup): Buď G kpt. grupa a $\rho : G \to \mathrm{Aut}(H)$ repr. G na Hilb. prostoru $(H, (\,,\,))$. Pak existuje sk. součin $((\,,\,))$ na H, že $(\rho, (H, ((\,,\,))))$ je unitární a topologie $(H, (\,,\,))$ a $(H, ((\,,\,)))$ jsou stejné.

Dk.: Nechť μ je pravá (nutně i levá dle věty z minulé hodiny, $\Delta = 1$) Haarova míra na G. Definujme: $((v, w)) := \int_G (\rho(g)v, \rho(g)w)\, d\mu$, $\forall v, w \in H$.

1. Korektnost: • $(\underbrace{\rho(g)v}_{\psi(g,v)}, \underbrace{\rho(g)w}_{\psi(g,w)})$ je spojitá (stačí pro pevná v a w). Spojitá na komp. má $\int$.

• $((v,v)) = \int_G \underbrace{(\rho(g)v, \rho(g)v)}_{\geq 0} d\mu \geq 0$

(jasné) • $0 = ((v,v)) = \int \underbrace{(\rho(g)v, \rho(g)v)}_{\geq 0 \text{ + spoj.}} d\mu = 0 \Rightarrow$

$(\rho(g)v, \rho(g)v) = 0 \Rightarrow \rho(g)v = 0 \overset{\rho(g) \text{ inj}}{\Rightarrow} v = 0$

Je to sk. součin.

2. ρ je unitární („učiloby by't snadné"): $\forall h \in G\ \forall v, w \in H$

$((\rho(h)v, \rho(h)w)) = \int_G (\rho(g)\rho(h)v, \rho(g)\rho(h)w)\, d\mu =$

$= \int_G (\rho(gh)v, \rho(gh)w)\, d\mu g = \left| \begin{array}{c} g' = gh \\ \mu \text{ je pravo inv.} \end{array} \right| = \int_G (\rho(g')v, \rho(g')w)$

$d\mu = ((v,w))$.] Stačila pravost. [

3. $(\,,\,), ((\,,\,))$ – topologie. Ekvivalence norem. $\|v\|^2 = \int_G (\rho(g)v,$

$\rho(g)v)\, d\mu = \int_G |\rho(g)|^2 d\mu$. $g \mapsto |\rho(g)v|^2$ spojitá

(z def. repr. (pomocí $(,)$!)) pro $\forall v \in H$. Je def. na

kpt. $\Rightarrow$ je omezená.

Banach-Steinhaus („bodová om. $\Rightarrow$ stejn. om."):

$\sup_{g \in G} |\rho(g)v|_H < \infty\ \forall v$, což jsme právě ověřili, tak

$\sup_{g \in G, |v|=1} |\rho(g)v| \left(= \sup_{g \in G} \|\rho(g)\|_{op}\right) < \infty$

$$M := \sup_{g \in G} |\rho(g)|_{op} < \infty$$

známé

$$\underline{|\rho(g)v|^2} \leq |\rho(g)|_{op}^2 |v|^2 \leq M^2 |v|^2$$

$$M^{-2}|v|^2 = M^{-2}|\rho(g^{-1})\underbrace{\rho(g)v}|^2 \leq M^{-2}M^2|\rho(g)v|^2 = \underline{|\rho(g)v|^2}$$

$$cM^{-2}|v|^2 \leq \|v\|^2 \leq M^2|v|^2 c, \text{ kde } c = \int_G d\mu \; \left(\begin{smallmatrix}\text{klasická}\\ \text{normal.}\end{smallmatrix}\right)\; 1$$

4. ρ spoj. vůči $(H, |\cdot|) \overset{3.}{\Longrightarrow} \rho$ je spoj. vůči $(H, \|\cdot\|)$.

Celkem $(\rho, (H, ((,))))$ je unitární reprezentace. $\square$

<u>Definice</u>: i) ρ buď repr. G na úplném lok. konvexním topologickém prostoru H. Uzavřený podprostor $H' \subseteq H$ nazvu <u>invariantní</u>, je-li

$$\rho(g)H' \subseteq H' \quad \forall g \in G.$$

ii) Reprezentaci nazvu <u>ireducibilní</u>, nemá-li žádný netriviální ($\neq 0$) vlastní ($\neq H$) podprostor.

iii) ρ' buď repr. G na úplném lok. konv. top. prostoru H'. ρ' nazvu <u>ekvivalentní</u> ρ, pokud existuje lineární homeomorfismus T H na H', že $T\rho(g) = \rho'(g)T$

$$\left(\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\rho(g)"] \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \arrow[d, "T"] \\ H \arrow[r, "\rho'(g)"'] & H \end{tikzcd}\right) \forall g \in G.$$

Označím: $\rho \simeq \rho'$ nebo $(\rho, H) \simeq (\rho', H')$

Pozn.: Ad uzavřenost. Příklad s translací spojitých: $C^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ zřejmě je inv. podprostorem, $\forall k > 0$, či $k = +\infty$. $C^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ však není uzavřen v $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.
($C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ bych chtěl prohlásit za ireduc., analytické aspekty by mi naopak umožnily najít nekonečně mnoho invariantních podprostorů.)

! Pozn.: Pokud (ρ, H) a (ρ', H') jsou unitární, tak požaduji navíc pro jejich ekvivalenci, aby $T: H \to H'$ byla izometrická bijekce, tj. $(Tv, Tw)_{H'} = (v, w)_H \ \forall v, w$ (někdy též unitární nazývaná).

Označení: $\hat{G}$ je množina všech ireducibilních unitárních reprezentací G podle relace ekviv. $\simeq$
[Obecněji $\hat{G}$ $\forall$ ired $/\simeq$ a $\hat{G}_u /\simeq$ unitárních ired.]

Pozn.: $\hat{G}$ se říká duály a jejich popis je hlavním předmětem teorie reprezentací (topolo grup).

+

Def: Operátorům z definice ekviv. reprezentací se říká ekvivariantní nebo splétající (nebo G-homorfizmy). Jejich prostor se značí $\mathrm{Hom}_G(H, H')$ apod.

Pozorování: • $T \in \mathrm{Hom}_G(H, H') \Rightarrow \mathrm{Im}\, T$ je invariantní, pokud $\dim H' < \infty$. $\mathrm{Im}\, T$ uzavřený (jinak uzávěry a limity, spojitost je dobře přizpůsobená).

$$\rho'(g) \underbrace{Tv}_{= w \in \mathrm{Im}\, T} = T\rho'(g) v \in \mathrm{Im}\, T$$

• $T \in \mathrm{Hom}_G(H, H') \Rightarrow \mathrm{Ker}\, T$ je invariantní! Uzavřenost ze spojitosti ($\mathrm{Ker}\, T = T^{-1}(\{0\})$; každý TVS je Hausdorffův z předpokladu).

$v \in \mathrm{Ker}\, T$, $\rho(g) v \in \mathrm{Ker}\, T$? Ano, neb

$$T(\rho'(g) v) = \rho(g) T v = 0$$

Dále již H, H' ... konečně rozměrné a komplexní
Zdá se, že se v Schur. lemmatu předp., že $\dim H, \dim H' > 0$.

<u>Schurovo lemma o ekviv. zobr.</u>: Nechť (ρ, H), (ρ', H') jsou dvě ireducibilní repr. na kon. dimenzionálních prostorech nad tělesem $\mathbb{C}$. Pak

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(H, H') = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow \rho \neq \rho' \\ 1 \Leftrightarrow \rho \simeq \rho' . \end{cases}$$

Dk.: a) $\dim_{\mathbb{C}} = 0$ $\not\Leftarrow$ $\rho \simeq \rho' \Rightarrow \exists T$ bijekce $\Rightarrow$ nenulová $\Rightarrow \mathrm{Hom}_G(,) \neq 0$ ↯

b) $\dim_{\mathbb{C}} = 1 \Rightarrow \exists\, 0 \neq T : H \to H'$ a T splétající: $\mathrm{Ker}\, T$ inv. $\overset{\text{ir.}}{\Rightarrow}$ $\mathrm{Ker}\, T = 0 \vee \mathrm{Ker}\, T = H$. Druhá nelze, neb T by bylo 0.
$\mathrm{Im}\, T$ inv. $\Rightarrow \mathrm{Im}\, T = H' \vee \mathrm{Im}\, T = 0$. Druhá nelze, neb T opět 0.
Celkem T je inj. a na, tedy $\rho \simeq \rho'$!

c) $\rho \not\cong \rho'$ & $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(H, H') > 0 \Rightarrow \exists T$ spletající nenulový ρ.

Obdobně, jak b.: $\mathrm{Ker}\, T = 0 \vee \mathrm{Ker}\, T = H$ &

$\mathrm{Im}\, T = 0$ & $\vee\ \mathrm{Im}\, T = H'$. Celkem T je bijekce,

což je spor s $\rho \not\cong \rho'$.

d) Nejtěžší (zákl. v. algebry): $\rho \cong \rho' \Rightarrow \dim \mathrm{Hom}_G(H, H') \geq 1$

(exist. splet.) Buďte $T, S \in \mathrm{Hom}_G(H, H')$. Chceme jejich lin.

záv. Pokud je asp. jeden z nich nulový, jsou l.z. Nechť

oba nenulové, např. T. Pak T je bijekce (stejně jako v b) v

c), $\mathrm{Im}\, T = H' \wedge \mathrm{Ker}\, T = H$ kvůli nenulovosti). Vezmi

$T^{-1} S : H \to H \overset{\text{Gauss/Liouville/Sylvester}}{\Longrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{C}\ \mathrm{Ker}(T^{-1} S - \lambda) \neq 0$ (existence vl. v. nad $\mathbb{C}$)

$T^{-1} \in \mathrm{Hom}_G$, S také, Id také $\Rightarrow \mathrm{Ker}\,(T^{-1} S - \lambda Id) \neq 0$

$\overset{\text{inv. ired.}}{\Rightarrow} \mathrm{Ker}\,(T^{-1} S - \lambda\, Id) = H \Rightarrow T^{-1} S = \lambda\, Id$.

$\square$

Tj. $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(H, H') \leq 1$.

Pozn.: 1. $\exists$ modifikace nad $\mathbb{R}$ (i nad $\mathbb{H}$). Snadno ale $\rho : SO(2) \to$

$\to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ tautol. je ired.: $Id \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ spletají!

tv. sympl. forma

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\varphi & -s\varphi \\ s\varphi & c\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\varphi & c\varphi \\ -c\varphi & s\varphi \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} c\varphi & -s\varphi \\ s\varphi & c\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\varphi & c\varphi \\ -c\varphi & s\varphi \end{pmatrix}$. Lze ukázat, že generují Hom_G

$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_G = 2$; ale $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G = 1$ opět.

2. Zobecnění pro unitární reprezentace nebo repr. kpt. grup na Hilb. prostorech (viz unitarizovatelnost v tomto druhém případě).

3. Neekv. ired. nemají kromě nulového žádný splétající
Ekv. ireducibilní: Splétající jsou jen nás. jediného zvoleného. Příp. $H=H'$ jde o Id.

Důležité jsou reprezentace abelovských.
↑ v harmonické analýze (tzv. komut. harm. anal)

(Níže opak $\dim H > 0$.)

<u>Věta (ired. repr. abelovských)</u>: (ρ, H) buď konečně dimenzionální ireducibilní komplexní repr. abelovské G. Pak $\dim_{\mathbb{C}} H = 1$.

Dk.: 1) $\forall h$ $\rho(h)$ je splétající. $\rho(g)\circ\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\circ\rho(g)$ $\forall g \in G$

2) Dle Schur. lemmatu $\forall h\ \exists c_h \in \mathbb{C}: \rho(h) =: c_h \mathbb{1}_V$

3) $v_0 \in V$ buď nenulový. Pak $\rho(h)v_0 = c_h \mathbb{1}_V v_0 = c_h v_0 \in \langle v_0 \rangle$. Odkud $\langle v_0 \rangle$ je inv.

4) Z ireducibility (ρ, H) je $V = \langle v_0 \rangle$, tj. $\dim V = 1$ □

Pozn.: 1) Komplexnost V opět. rel. důl.: $\rho: SO(2) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ tautol a ired, $SO(2)$ abel, ale $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ ($\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{R}^2 = 1$).
Rovnost v závorce je nutné interpr. tzv. komplexní strukturou.

2) $\mathbb{C}(t)^\times$ těleso rac. fcí bez 0. To je grupa.
$\rho: \mathbb{C}(t)^\times \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}(t))$, $\rho(f)(g) = fg$.
Je ired., ale $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t) = +\infty$. Tj. pp. k.-dimenze je podst. Zde je ovšem v našem kontextu otázka spojitosti podstatná. (Aby zapadla do kont. HA, museli bychom vybavit $\mathbb{C}(t)^\times$ topol. a testovat

8. HODINA

Minule: reprezentace – inv. pp., ireducibilita, spletající operátor, ekvivalence
- spojitost repr. (příklad, ∄ top. Aut(H) norm.; uzavřenost inv. pp., $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$)
- unitarizovat. repr. komp. na H. p. (princip průměrování – B.-St.)
- Schur pro k.d. rep., rep. ab. pro k.d. prostory
- $\hat{G}$

G buď lok. komp. grupa (předpoklad celého zbytku přednášky)

Pozn.: $\forall \chi: G \to Aut(\mathbb{C})$ reprezentace slují charakterem; $\mathbb{C}$ std. top.
obecněji $\to Aut(\mathbb{k})$, $\mathbb{k}$ topol. těleso, např. det. valuací

Pozn.: Charakter se používá v teorii repr. i v jiných významech (stopa reprezentací: $g \mapsto Tr\,\rho(g)$, pokud existuje; nebo blíže ji kvaší definici jako akce centra univ. obalující algebry).

Pozorování: Pokud χ_1, χ_2 jsou charaktery, pak definujme
$\chi_1\chi_2 : G \to Aut(\mathbb{C})$, $(\chi_1\chi_2)(g) := \chi_1(g)\chi_2(g)$, $g \in G$.
$\chi_1\chi_2$ je také reprezentace (nezávisle na struktuře G):

Dk.: $(\chi_1\chi_2)(gh) = \chi_1(gh)\chi_2(gh) = \chi_1(g)\chi_1(h)\chi_2(g)\chi_2(h) =$
$= \chi_1(g)\chi_2(g)\chi_1(h)\chi_2(h) = (\chi_1\chi_2)(g)(\chi_1\chi_2)(h)$.
Spojitost: snadné cvičení ($|\cdot|_{\mathbb{C}}$).

Pozorování: $\hat{G}_1 := \{\chi : G \to Aut(\mathbb{C}) \mid \chi$ je charakter $G\}$ má strukturu abelovské grupy.

Dk.: • $\chi(g) := Id_{\mathbb{C}} \in \hat{G}_1$, • $\chi_1\chi_2$ viz výše
• $\chi \in \hat{G}_1 \Rightarrow \chi^{-1}$ $(\chi^{-1}(g) := \chi(g)^{-1}) \in \hat{G}_1$ (spoj. + homom. triviální)
• asociativnost: $[(\chi_1\chi_2)\chi_3](g) = [\chi_1(g)\chi_2(g)]\chi_3(g) =$
asoc. $\mathbb{C}$ $= \cdots = [\chi_1(\chi_2\chi_3)](g)$

- komutativnost: $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g) = \chi_2(g)\chi_1(g) = (\chi_2\chi_1)(g)$. $\square$

Pozn.: nezávislost na výběru reprezentanta?

$\chi_1 \simeq \chi_1'$, $\chi_2 \simeq \chi_2'$ $\quad \chi_1'\chi_2'(g) = \chi_1'(g)\chi_2'(g) = T^{-1}\chi_1(g)TS^{-1} \cdot$

$\cdot \chi_2(g)S \underset{\nearrow}{=} TT^{-1}\chi_1(g)\chi_2(g)S^{-1}S = \chi_1(g)\chi_2(g) = (\chi_1\chi_2)(g)$

komut. $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \hat{G}_1 := \{\chi \mid \chi \text{ je charakter } G\}/\simeq$ má také stru ab. grupy $([\chi_1][\chi_2])(g) := \chi_1(g)\chi_2(g) \ \forall g \in G$

- Někdy vhodné „nahradit" $\hat{G}_1$ nějakým selektorem na $\hat{G}_1$.

Pozn.: Všimněme si, že můžeme dle věty o reprezentaci abelovských v případě komutativní G ztotožnit (máme rovnost) $G_1 = \{\chi \mid \chi$ je ireducibilní reprezentace G na kon. dim. v. prostoru$\}$. Analogicky pro $\hat{G}_1$.

Nyní se věnujme klasické látce – determinaci ired. reprezentací některých abelovských grup.

Příklad: Ireducibilní repr. S^1 na H. p. konečné dimenze. (Pozn. kon. dimenze lze v tomto případě dokázat jako důsl. ireducibility a spojitosti. My ji předpokládejme.) Repr. značme $\tilde{\chi}$ či χ...

Z V o repr. abel: $\dim H = 1$. Tedy $\tilde{\chi}: S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, nutně char.

Z V o unitarizovatelnosti (ρ, H) je ekv. unitární, nebo přímo dokažme: $1 = \tilde{\chi}(1) = \tilde{\chi}(e^{2\pi i}) = [\tilde{\chi}(e^{\frac{2\pi i}{q}})]^q \quad \forall q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \tilde{\chi}(e^{\frac{2\pi i}{q}}) \in U(1) \Rightarrow \tilde{\chi}(e^{\frac{2\pi i p}{q}}) = \tilde{\chi}(e^{\frac{2\pi i}{q}})^p \in U(1)$.

Dále spojitost (spojitost repr. nebo silná spoj.) Zde však tobě z jako spoj. $\to U(1)$ s oper. top

- $\tilde{\chi}(e^{2\pi i\varphi})v = \tilde{\chi}(\lim_{n\to\infty} e^{2\pi i\varphi_n})v = \lim_{n\to\infty}[\tilde{\chi}(e^{2\pi i\varphi_n})v] =$

$\varphi \in [0,1)$, $v \in H$. $\quad v \in H (\simeq \mathbb{C}) \quad \varphi_n \in \mathbb{Q}$

$\overset{\nearrow}{=} \left[\lim_{n\to\infty} \tilde{\chi}(e^{2\pi i \varphi_n})\right] \lim v = \left[\lim_{n\to\infty} \tilde{\chi}(e^{2\pi i\varphi_n})\right] v =$

Věta o limitě součinu (to je ono „totéž") $\Big| = Av$, kde $A \in U(1)$, neboť $U(1)$ je uzavřená v $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Tj. přímo jsme obdrželi, že $\tilde{\chi}$ je dokonce unitární. $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ položme $\chi(e^{2\pi i\varphi}) := \tilde{\chi}(e^{2\pi i\tilde{\varphi}})$, kde $\tilde{\varphi} \in [0,1)$ a $\tilde{\varphi} \equiv \varphi \mod \mathbb{Z}$. Zejm.

kvůli návaznosti na předn. $\underset{\in\mathbb{C}}{\chi_\varphi} := \underset{(\in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C})}{\chi(e^{2\pi i\varphi})}$. Máme $\chi_{\varphi_1+\varphi_2} = \chi_{\varphi_1}\chi_{\varphi_2}$ $\forall \varphi_1,\varphi_2 \in \mathbb{R}$

Zvolme $\ln = \ln_\psi$, aby vnitřek výřezu $\ln_\psi$ byl disj. s paprsky $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ a $\widetilde{\varphi_1+\varphi_2}$. Pak $\ln_\psi \chi_{\varphi_1+\varphi_2} = \ln_\psi \chi_{\varphi_1} + \ln_\psi \chi_{\varphi_2}$ a položme $f(\varphi) := \ln_\psi \chi_\varphi$. Máme $f(\varphi_1+\varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2)$. Její spojitá řešení známe $f(\varphi) = c\varphi$, $c \in \mathbb{C}$. Používáme již zmíněný fakt, že $\tilde{\chi}$ je spojitý i jako zobrazení $S^1 \to U(1)$, kde $U(1)$ má normovou topologii $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, jež se kryje s operátorovou, ale především se silnou, jež definuje spojitost reprezentací. Je tedy $\chi(e^{2\pi i\varphi}) = e^{2\pi i c\varphi}$. Kvůli unitaritě χ nutně $c \in \mathbb{R}$. Spojitost χ vynutí $c \in \mathbb{Z}$ (proč!!).

Nyní ověřím, že $\chi_n(e^{2\pi i\varphi}) = e^{2\pi i n\varphi}$ je homom. (triv.) a spojitá (opět jen dle zákl. vět z mat. analýzy) a získám, že $\chi_n \in \widehat{S^1}$.

Označím-li $\widehat{S^1}_{k.d}$ ($\forall$ ired. k.d. repr. S^1), vidíme $\widehat{S^1}_{k.d.} \simeq \mathbb{Z}$.

[Jak řečeno, $\widehat{S^1} \simeq \mathbb{Z}$ (pro $\forall$ ired na H.p.)]

<u>Pozn.:</u> $f(\varphi_1)+f(\varphi_2) = f(\varphi_1+\varphi_2)$ známá Cauchyho funkcionální rovnice.

- $f(n) = f(n-1+1) = f(n-1) + f(1) = \dots = \underbrace{f(1) + \dots + f(1)}_{n\text{-krát}} = n\underset{\overset{!!}{c}}{f(1)}$
- $c = f(1) = f\Big(\underbrace{\tfrac{1}{q} + \dots + \tfrac{1}{q}}_{q\text{-krát}}\Big) = q f\left(\tfrac{1}{q}\right) \Rightarrow f\left(\tfrac{1}{q}\right) = \tfrac{c}{q}$.

$\widehat{G}_1 := \{\chi : G \to U(H) \mid \chi$ je ired. rep. na H.p. H konečnědimenz. a χ unitární $\} / \cong$

beraný jako selektor (výběr reprezentací).

Již jsme ukázali, že $\widehat{G}_{k.d.}$ je abelovská grupa.

Definice (Fourierova transf.): $\forall \chi \in \widehat{G}_{k.d.}$ a $f \in L^1(G)$, kde G je lokálně kompaktní grupa definujme $\hat{f}(\chi) = \int_G f(g) \overline{\chi(g)}\, d\mu$, funkci $\hat{f} = \mathcal{F}(f) : \widehat{G} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Pozn.: 1. $\| f \chi \|_1 \leq \| f \|_1 \Rightarrow \hat{f}$ je dobře definovaná a $|\hat{f}(\chi)| \leq \|f\|_1$.

2. Uvažujeme i G neabelovská.

3. $G = S^1$ $\hat{f}(e^{2\pi i n \varphi})$ je Fourierův koeficient f

$G = \mathbb{Z}$ $\hat{f}(e^{2\pi i n x}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x) e^{2\pi i n x} \hat{=}$ konvoluci s $\delta_{\mathbb{Z}}$ pro by, kdo zná teorii distribucí (duály $\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{E}_c, \mathcal{D} \ldots$).

Tvrzení: $f, g \in L^1(G)$, $\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}$ pro každou lok. komp. grupu a(levou) H.m.

Dk.: $\widehat{f * g}(\chi) = \int_G (f*g)(x) \overline{\chi(x)}\, d\mu_x = \int_G \int_G f(y) g(y^{-1}x)\, d\mu_y \overline{\chi(x)}\, d\mu_x =$

Fubini

$$= \int_G f(y) \int_G g(y^{-1}x) \overline{\chi}(x)\, d\mu_x\, d\mu_y = \int_{y \in G} f(y) \overline{\chi(y)}$$

$$\int_{x \in G} g(y^{-1}x)\, \overline{\chi}(y^{-1}) \overline{\chi}(x)\, d\mu_x\, d\mu_y = \left| z = y^{-1}x \right| =$$

$$= \int_{y \in G} f(y) \overline{\chi}(y) \int_{z \in G} g(z) \overline{\chi(z)}\, dz = \hat{f}(\chi)\hat{g}(\chi). \quad \square$$

Pozn.: 1. $\overline{\chi}(y^{-1})\,\overline{\chi}(x) = \overline{\chi(y^{-1})}\,\overline{\chi(x)} = \overline{\chi(y^{-1})\chi(x)} = \overline{\chi(y^{-1}x)} = \overline{\chi}(y^{-1}x)$. Rovnost tak neovlivňuje možnost nabalování skoro grupy G.

2. Na abelovské grupě $\hat{G}_1$ lze zavést topologii, která učiní $\hat{G}_1$ lokálně kompaktní.

Def: $\hat{G}_1$ buď vybaven kompaktně-otevřenou topologií, tj. zděděnou ($\subseteq$) z top. na $\mathcal{C}(G,\mathbb{C})$ generovanou $O(K,U) := \{\chi \in \mathcal{C}(K,U) \mid \chi(K) \subseteq U\}$, K kompaktní v G a U otevřená v $\mathbb{C}$. To je báze topologie na $\hat{G}$.

Věta: $\hat{G}_1$ je topologická grupa vůči kompaktně-otevřené topologii.

Dk.: Dokažme, že $\alpha(\chi,\eta) := \chi\eta^{-1}$ je spojité.

- $|\chi(x)\eta(x)^{-1} - \chi'(x)\eta'^{-1}(x)| \leq |\chi(x)\eta^{-1}(x) - \chi(x)\eta'^{-1}(x)| + |\chi(x)\eta'^{-1}(x) - \chi'(x)\eta'^{-1}(x)| = |\eta^{-1}(x) - \eta'^{-1}(x)| + |\chi(x) - \chi'(x)|$, $\forall x \in G$.
- $O_{K,\varepsilon}(\chi\eta^{-1}) = \{\gamma \in \hat{G} \mid \|\gamma - \chi\eta^{-1}\|_K < \varepsilon\}$, $\|\gamma\|_K = \sup\limits_{x\in K} |\gamma(x)|$.
- Je tedy zřejmé, že $O_{K,\frac{\varepsilon}{2}}(\chi) \times O_{K,\frac{\varepsilon}{2}}(\eta) \subseteq O_{K,\varepsilon}(\chi\eta^{-1})$, tj. $\alpha : (\chi,\eta) \mapsto \chi\eta^{-1}$ je spojité.
- Hausdorffovskost: $\chi,\eta \in \hat{G} \Rightarrow \chi(g) \neq \eta(g)$ $\exists g$

$\chi(g) \in U_1$, $\eta(g) \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (Hausd. $\mathbb{C}$)

$\chi \in O(\{g\}, U_1) =: O_1$

$\eta \in O(\{g\}, U_2) =: O_2$

Zjevně $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

$\square$

! **Příklad** : $G = C_n = \{ e^{\frac{2\pi i k}{n}}, k = 0, \dots, n-1 \}$ buď cyklická grupa. Diskrétní

a trocha teorie reprezentací

Hausdorffova (top. zděděná z $\mathbb{C}$), tj. lok. kompaktní.

Počítací míra je Haarova (levá i pravá).

C_n je abelovská $\Rightarrow (\widehat{C_n})_{k.d}$ sestává jen z jednorozměrných reprezentací.

Opakování $\mathbb{C}[G] := \{ f : G \to \mathbb{C} \mid supp(f) < \infty \}$ grupová algebra *)

$\mathbb{C}[G] \cong \langle \{ \delta_g , g \in G \} \rangle$ jako $\mathbb{C}$-vekt. prostory, kde

$\delta_g(h) = \begin{cases} 0 & g \neq h \\ 1 & g = h \end{cases} \in \mathbb{C}[G]$ báze: i) $f = \sum_{g \in G} f(g) \delta_g$ suma je kon.

ii) $\sum_{\substack{g \in G \\ \text{konečná } \Sigma}} \lambda_g \delta_g = 0 \,/\, h \Rightarrow \sum_{g \in G} \lambda_g \delta_g(h) = 0 \Rightarrow \lambda_h = 0 \ \forall h$

$Conj(G) := \{ C \subseteq G \mid C$ je konjugační třída v $G \}$

$Conj(C_n) \cong C_n$, neboť C_n je abelovská.

- $(\widehat{C_n})_{k.d} \cong Conj(C_n)$ izomorfizmus v kategorii množin (Set). Platí pro G konečnou: $(\widehat{G})_{k.d} \cong Conj(G)$.
- $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{[(\varphi, V)] \in \widehat{G}} (\dim V) V$ (Další zobecnění je Peter-Weylův teorém pro $L^2(G)$, kde G je kompaktní.)

Pro G konečnou.

Vlevo uvažujeme $(g \cdot f)(h) := f(g^{-1}h)$ tzv. pravou $(R_g f)(h)$

regulární reprezentaci.

---

*) Násobení je konvoluce: $(f * g)(x) := \sum_{y \in G} f(y) g(y^{-1}x)$ | $(fg)(x) = f(x)g(x)$ je „alternativní" nás. v $\mathbb{C}[G]$

Všimněme si, že v případě konečných abelovských (cvič)

$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\hat{G}} (\dim V) V$ & věta o reprezentaci abelovských

poskytne, že $\hat{G}_{k.d} \simeq G \ (\simeq \mathrm{Conj}(G))$. Definujme

$$\chi_m(g)v := g^m v \quad \forall v \in \mathbb{C},\ \forall g \in C_n,\ m = 0, \dots, n-1$$

Ired. k dim $\mathbb{C}$, $\chi_{m_1} \not\equiv \chi_{m_2}\ \forall m_1 \neq m_2$. Dk: $e^{\frac{2\pi i k m_1}{n}} \overset{↯}{=}$

$$= e^{\frac{2\pi i k m_2}{n}} \qquad \frac{k m_2}{n} - \frac{k m_1}{n} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{k}{n}(m_1 - m_2) \in \mathbb{Z} \ \forall k$$

spec $k=1$ $\quad n \mid m_1 - m_2 \Rightarrow m_2 \equiv m_1 \mod n$ ↯

$\hat{C}_{n\,k.d} \cong \{\chi_m \mid m = 0, \dots, n-1\}$ izom. v Set (bijekce)

$$(\mathcal{F} f)(\chi_m) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(e^{\frac{2\pi i}{n}k}\right) e^{-\frac{2\pi i k m}{n}} \quad \forall f \in \mathbb{C}[G] \cong L^1(G)$$

$$(\mathcal{F} \delta_h)(\chi_m) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_h\left(e^{\frac{2\pi i k}{n}}\right) e^{-\frac{2\pi i k}{n} m} =$$

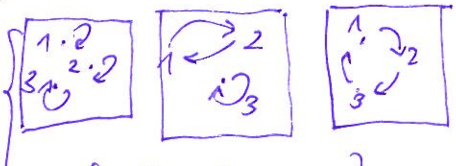
$h = e^{\frac{2\pi i l}{n}}$

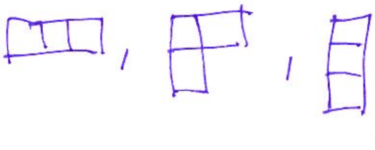
$$= e^{-\frac{2\pi i l}{n} m} = \left(e^{-\frac{2\pi i l}{n}}\right)^m$$

Vzorečky známé z tzv. „diskrétní Fourierovy transformace" (DFT). Jsou to důsl. definice F.t. pro G lok. komp. v případě $G = C_n$.

Příklad: Four. transf. bývá zvykem definovat jen na G lok. komp. a abelovských. U nás je definice obecnější.

$G = S_3$

$\mathrm{Conj}(S_3) \cong$ {  } $\cong$

$\cong$ {  } $\cong \left\{ \begin{array}{l} 3 = 3 \\ 3 = 2+1 \\ 3 = 1+1+1 \end{array} \right\} \cong \mathrm{Par}(3)$

Teorie repr.: $(\hat{S_3})_{k.d.} \overset{\text{ověř}}{\cong} \mathrm{Conj}(S_3) \to 3$ neekv. ir. rep.

$\dim \mathbb{C}[S_3] = \# S_3 = 6$

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus (\dim V) V \quad \Big| \quad 6 = \sum_{i=1}^{3} (\dim V_i)^2$$

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 \\ 6 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 \\ 6 &= 3^2 \ \lightning \end{aligned}\right\} \underset{\text{zvolme}}{\overset{\Rightarrow}{\Uparrow}} \begin{aligned} \dim V_1 &= 1 \\ \dim V_2 &= 1 \\ \dim V_3 &= 2 \end{aligned}$$

$\chi_1(g) := \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \quad \forall g$

$\chi_2(g) v := \mathrm{sgn}(g) v \quad , v \in \mathbb{C}$. Je repr., neb sgn je homom.

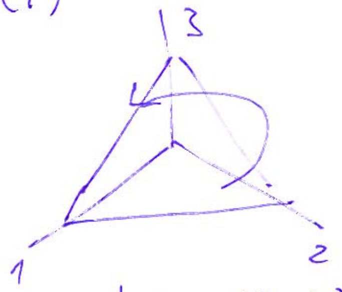
Zbývá nalézt 2rozměrnou

$$V_3 := \{ x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i = 0 , x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C} \}$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ báze $\mathbb{C}^3$.

$$\rho_3(g) v := \sum_{i=1}^{3} x_i e_{g^{-1}(i)}$$

Ireducibilita viz obr.



Máme na S_3 opět počítat.

$$(\mathcal{F}f)(\chi_1) = \sum_{g \in S_3} f(g)$$

$$(\mathcal{F}f)(\chi_2) = \sum_{g \in S_3} \mathrm{sgn}\, g\, f(g)$$

Pozn. (1) a (2) souvisí s Weylovými projektory na $\bigotimes^3 \mathbb{C}^n$ (viz Goodman, Wallach: ... Classical Groups ...) 2 verze

$\Big\{ (\mathcal{F}\delta_h)(\rho_3) = \sum_{g \in S_3} \delta_h(g) [\rho_3(g)]^*$ tohle však již def nemáme, neb ρ_3 není charakter $\Big\}$

- $f\left(\frac{p}{q}\right) = f\big(\underbrace{\tfrac{1}{q}+\dots+\tfrac{1}{q}}_{p\text{-krát}}\big) = f\left(\frac{1}{q}\right)+\dots+f\left(\frac{1}{q}\right) = p\,f\left(\frac{1}{q}\right) = c\,\frac{p}{q}.$

- Ze spojitosti (a hustoty $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$): $f(x) = cx \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

[„Mnoho" nesp. řešení „úslovaných" bází $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$.]

Pozorování: • $c_n(f) := \int_0^1 f(\varphi)\, e^{-2\pi i n\varphi}\, d\varphi$, $\varphi \in [0,1]$, je

tzv. n-tý koef. F. řady 1-periodické funkce z $L^1(\mathbb{R})$. (Otázky bodové konvergence nyní pomineme.)

Je tedy $\boxed{c_n(f) = \int_{S^1} f\,\overline{\chi_n}\, d\mu}$, kde nyní

$\mu(U) := \int_0^1 \chi_U(\cos 2\pi\varphi, \sin 2\pi\varphi)\, d\lambda(\varphi)$, $U \subseteq S^1$ měřitelná

Leb. míra na $\mathbb{R}$

Jde o tutéž míru jako v příkladě 4 Haarových měr. Jen volíme jinou „parametrizaci" kružnice. (V glob. analýze otázka parametrizací podstatná, byť se pak ukáže nezávislost v příp. orientovaných reparametrizací, na nich.)

- Konvergence: Máme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n\varphi} \longrightarrow f$ v $L^1(\mathbb{R})$ $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, jež je 2π periodická!

(Bodové konvergence: $\sum |c_n| n^k < \infty \wedge f^{(k+1)}$ spoj. $\Rightarrow$ dokonce $\left(\sum c_n (e^{2\pi i n\varphi}\right)^{(k)} \longrightarrow f^{(k)}$ bodově možná za dalších drobných předpokladů.)

Nelze $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ interpretovat také jako integrál podle Haarovy míry, jako v rámečku výše?

∇ **Příklad**: Ired. repr. $\mathbb{Z}$ na k.d. (Hilb.) prostoru.

Z věty o repr. komut. $\chi : \mathbb{Z} \to \operatorname{Aut}(H) \Rightarrow \dim H = 1$.

$\chi(m+n) = \chi(m)\chi(n)$. Opět logaritmuji, bera ohled na výřezy. Dospěji ke Cauchyově rovnici.

$\chi_c(m) = e^{2\pi i m c}$, $c \in \mathbb{C}$ libovolné. χ_c je zřejmě repr. $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{C}$. Ireducibilita, již jsme příliš nezmiňovali, je u repr. dim 1 zřejmá: $\mathbb{C}$ nemá žádný netriv. vl. podprostor.

- Chceme-li však jen unitární, získáme omezení $|e^{mc}| = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} c = 0 \Rightarrow$ uvažujeme nutně jen $\chi_{\cdot x}(m) = e^{2\pi i x m}$, $x \in \mathbb{R}$. Celkem $\chi_{\cdot x} \in \hat{\mathbb{Z}}$ (spojitost sami).
- Všimněme si, že $x \equiv y \bmod \mathbb{Z}$, pak $\chi_{\cdot x} = \chi_{\cdot y}$.
- Definujeme-li, nyní však s předp. unitarity, $\hat{\mathbb{Z}}_{k.d} := \{\chi \mid \chi$ je ired. unit. repr. $\mathbb{Z}$ na k.d. Hilb. prostoru$\}$, vidíme, že $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{Z}}_{k.d.}$, $r \mapsto \chi_r$ je na. Injektivita z min. periody $z \mapsto e^{2\pi i z}$. Celkem
$$\hat{\mathbb{Z}}_{k.d.} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

∇∇ Všimněme si, že $\hat{\mathbb{Z}}_{k.d} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ a $\hat{S}^1_{k.d.} \simeq \mathbb{Z}$. Toto je základem Pontrjaginovy duality.

Pozn.: Ve fyzice (kvantové) typické místo $\mathbb{R} \to i\mathbb{R}$ a místo $\mathbb{Z} \to i\mathbb{Z}$.

! Příklad: Ired. unit. repr. $\mathbb{R}$ na k.d. Hilb. prostoru.

Opět dim $H = 1$. $\chi : \mathbb{R} \to U(1) \subseteq \mathbb{C}$ buď tedy spojitý homomorfismus $\mathbb{R}$ do $U(1)$.

$\exists \delta > 0 \quad \chi([-\delta, \delta]) \subseteq \{z \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}^{*)}$ ze spoj.

Nechť $y \in [-\frac{1}{4\delta}, \frac{1}{4\delta}]$, že $\chi(\delta) = e^{2\pi i \delta y}$.

($\exists!$ Jedno $y_0 \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ pro $e^{2\pi i y_0} \in \{z \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.)

Dále analogicky (podělili jsme y) i zkusme bez logaritmu...: $\chi(\frac{\delta}{2})^2 = \chi(\frac{\delta}{2})\chi(\frac{\delta}{2}) = \chi(\delta) = e^{2\pi i \delta y} \Rightarrow$

$\chi(\frac{\delta}{2}) = \pm e^{\pi i \delta y} = \cos(2\pi \delta y) \pm i \sin(2\pi \delta y) \overset{?}{\in} \{z \mid \mathrm{Im}\, z > 0\} \Rightarrow \chi(\frac{\delta}{2}) = e^{\pi i \delta y}$. Pokračujeme-li, pak

$\chi(\frac{\delta}{2^n}) = e^{2\pi i y \frac{\delta}{2^n}}$. Dále $\chi(\frac{k}{2^n}\delta) = \left(e^{2\pi i y \frac{\delta}{2^n}}\right)^k = e^{2\pi i y \frac{k\delta}{2^n}}$. Ze spojitosti a hustoty $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$: $\chi_y(x) = e^{2\pi i x y}$ $\forall x \in \mathbb{R}$; označení tedy χ_y. Celkem opět s analog. om. (unitarita nutná pp.) $\widehat{\mathbb{R}}_{k.d.} \simeq \mathbb{R}$ ($\chi_y \leftrightarrow y$).

Pozn.: Zde vidíme $\widehat{\mathbb{R}}_{k.d.} \simeq \mathbb{R}$, tj. „$\mathbb{R}$ je samoduální“.

Co by to znamenalo pro konvergenci? $f = \hat{\hat{f}}$? Kde

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f\, e^{-2\pi i x y}\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\chi_y(x)}\, d\lambda(x) \quad \text{a} \quad \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \dots = f$$

*) Chyba v Deitmar "First course on harm.": $\mathrm{Re}\, z > 0$ ...

Vystihuje tedy složitou formuli pro inverzi Fourierovy transformace? 7

CVIČENÍ 8

$(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ je nearchimédovský (víme)

V: $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ není úplný t.v.s. (nad $\mathbb{Q}$). ← inspirace wikiproofs

Dk.: Pro $p \geq 5$. $1 < a < p-1$ $\exists a$ (pro $p = 2 \vee 3$ ne)

$x_n := a^{p^n}$, $n \in \mathbb{N}$

$|a^{p^{n+1}} - a^{p^n}|_p = |a^{p^n}(a^{p^n(p-1)} - 1)|_p \overset{(*)}{=}$ Dle důsl. Eulerovy věty ($\cong$ malé Fermatovy věty): $a^{p^n(p-1)} - 1 \equiv 0 (p^n)$, neboť

Eul. fce: $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$: $1, 2, \dots, p-1$

$p+1, p+2, \dots, 2p-1$

$\vdots$

$p^{n-1}+1, \dots\ p^{n-1}p - 1 < p^n$

$\Big\}$ $p^{n-1}(p-1)$ nesoudělných

$(*) = |a^{p^n}\underbrace{(a^{p^n(p-1)} - 1)}_{p^n |}|_p < p^{-n} \longrightarrow 0, n \to \infty$. Tj.

$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0$. Díky nearchimédovskosti toto

stačí pro cauchyovskost (Jinak $|x_{n_0+p} - x_{n_0}| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$.)

Pp. ať $x_n \to x \in \mathbb{Q}$, $x = \lim_n x_n \implies |x|_p = \lim_n |x_n|_p$

pomocí opačné Δ-nerovnosti.

$\forall n \in \mathbb{N}: p \nmid a^{p^n} \implies |x_n|_p = 1$, tj. $|x|_p = \lim_n 1 = 1$.

Dále $x \neq 0$. Rovněž $x = \lim_n x_n = \lim_n x_{n+1} = \lim_n (x_n)^p =$

$= (\lim_n x_n)^p = x^p \underset{x\neq 0}{\implies} x^{p-1} = 1 \implies x = 1 \vee x = -1$

$0 < x - a < p \implies p \nmid a - x \implies |x-a|_p = 1$

Jelikož $x_n \to x$, tak $\exists n_0\ \forall n \geq n_0\ |x_n - x|_p < |x-a|_p$ $^{(**)}$, tj.
$\uparrow \varepsilon = 1$

$|a^{p^n} - x|_p < |x-a|_p$, ~~$|x-a|_p = |x - a^{p^n} + a^{p^n} - a|_p$~~

~~$\leq \max\{|x-a^{p^n}|_p, |a^{p^n}-a|_p\}$ (arch.)~~

~~$|x-a|_p > |x - a^{p^n}|_p$ (**) $\Rightarrow |x - a^{p^n}|_p < |a^{p^n} - a|_p$, $|x-a^{p^n}|$~~

~~nemůže být maximem. Tj. max. je $|a^{p^n} - a|_p$.~~

$|a^{p^n} - x|_p = |\underbrace{a^{p^n} - a}\ \underbrace{+a+x}|_p = |a^{p^n} - a|_p = |a|_p |a^{p^{n}-1} - 1|_p$

$\left[|a^{p^n} - x| \neq |x-a|_p \right.$ $\forall \triangle$ jsou rovnoramenné $\left. \right]$ ~~při různých valuacích je $|\,|_p = \max$.~~

$= |a^{p^{n}-1} - 1|_p < 1$ dle důsl. malé F. věty.

$\not{\text{}}|x-a|_p = 1$. Tj. $(x_n)_n$ je cauchyovská a nekonvergentní!

Def: $\mathbb{Q}_p := \overline{(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)}$, zúplnění. Těleso p-adických čísel.

Def: $(X, |\cdot|_X)$ buď normovaný prostor. $(Y, |\cdot|_Y)$ nazvu zúplnění, pokud $\exists$ izometrie $i: X \to Y$, že $i(X)$ je hustý v Y.

$\exists$: $Y := \{(x_n)_n \mid (x_n)_n \text{ cauchy}\}/\simeq$ $\quad (x_n)_n \simeq (y_n)_n$ iff (def.)

$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$. $\quad i: X \to Y \quad i(x) := [(x, x, \dots)] \in Y$

Ako $|[(x_n)]|_Y := \lim |x_n|_X$.

Korektnost $(x_n)_n$ cauchy $\Rightarrow (|x_n|_X)_n$ cauchy (obr. $\triangle$)

$(|x_n|_X)_n \subseteq \mathbb{R} \wedge \mathbb{R}$ úplné $\Rightarrow \lim_n |x_n|_X$ existuje.

Tvrzení: $\forall$ zúplnění tělesa s normou je těleso s přirozenými operacemi.

5. Základy Banachových algeber a Gelfandovo zobrazení

Definice: Nechť G je lok. kompaktní grupa a μ je nějaká její Haarova míra. $L^p(G) := \{ f : G \to \mathbb{C} \mid \int |f|^p d\mu < +\infty \}$ a $\|f\|_p := \left(\int_G |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

Definice: $f, g \in L^1(G)$. Pak $(f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) \, d\mu(y)$ nazvu konvolucí f a g, kdykoliv existuje.

Věta (ex. konv.): $f, g \in L^1(G) \Rightarrow f * g \in L^1(G)$.

Dk.: a) $f * g$ je měřitelná. Vynechán, viz D.-E. "Principles".

b) $$\|f*g\|_1 \leq \int_G \int_G |f(y) g(y^{-1}x)| \, d\mu(y) \, d\mu(x) \overset{\text{Fubiniho v.}}{=}$$

$$= \int_G \int_G |f(y) g(y^{-1}x)| \, d\mu(x) \, d\mu(y) \overset{\mu \text{ je levá H.}}{=} \int_G \int_G |f(y) g(x)| \, d\mu(x)$$

$$d\mu(y) \overset{\text{linearita} \int}{=} \int_G |f(x)| \, d\mu(x) \int_G |g(x)| \, d\mu(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 \qquad \square$$

Pozn.: 1. $f * g$ $\exists$ tedy s.v. (a je z L^1).

2. Lze $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G) \Rightarrow f * g$ $\exists$ s.v. $(1 < p, q < \infty)$. Hölderova nerovnost.

3. měřitelnost není zcela snadná.

G lok. komp $\Rightarrow (L^1(G), *, \|\cdot\|_1)$ algebraicko-anal. stra

Nejdříve k algebraické.

Věta: $(L^1(G), *, +)$ je asociativní algebra nad $\mathbb{C}$.

okruh

Dk.: a) $* : L^1(G) \times L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$, dv. Předch. věta. ✓

$+ : L^1(G) \times L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$, dv. Δ-nerovnost (v $\int$). ✓
+ linearita $\int$

b) Distr.: $[(g+h)*f](x) = \int_G (g+h)(xy^{-1}) f(y)\, d\mu(y) =$

$\overset{\text{lin} \int}{=} \int_G g(xy^{-1}) f(y) d\mu + \int h(xy^{-1}) f(y) d\mu =$

$= (g*f)(x) + (h*f)(x) \quad \forall x \in G$ ✓

Zprava analog.

c) Asociativnost: • $[f*(g*h)](x) = \int_{y \in G} f(y) (g*h)(y^{-1}x) d\mu(y)$

$= \int_{y \in G} f(y) \int_{z \in G} g(z) h(z^{-1}y^{-1}x) d\mu(z) d\mu(y)$

algebra

• $[(f*g)*h](x) = \int_{y \in G} (f*g)(y) h(y^{-1}x) d\mu(y) =$

$= \int_y \int_z f(z) g(z^{-1}y) h(y^{-1}x) d\mu(z) d\mu(y) \overset{\text{(Fubini) + } z \leftrightarrow y}{=}$

levá

$= \int_y \int_z f(y) g(y^{-1}z) h(z^{-1}x) d\mu(z) d\mu(y) =$

$= \left| z' = y^{-1}z \right| = \int_y f(y) \int_z f(z') h(z'^{-1} y^{-1} x) d\mu(z') d\mu(y)$

d) $c(f*g) = (cf)*g = f*(cg) \; \forall c \in \mathbb{C}$ triv. (linearita).

$c(f+g) = cf + cg \;\wedge\; (c+d)f = cf + df \quad \forall c, d \in \mathbb{C}$ | def + a nás. sk. $\square$

(5. Základy Banachových algeber a Gelf. zobrazení) 1

Definice: $(A, \|\cdot\|)$ nazvu Banachovou algebrou, pokud A je algebra nad $\mathbb{C}$ (asociat.) a $\|\cdot\|: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ je norma splňující $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ $\forall a, b \in A$ (submultiplikativnost) a zároveň, že $(A, \|\cdot\|)$ je úplný normovaný prostor.

Tvrzení: Buď $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra. Pak $\cdot : A \times A \to A$ je spojité.

Dk.: $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = b$, $(a_n)_n, (b_n)_n$ sítě (stačí posl.)

$$\|a_n b_n - ab\| = \|a_n b_n - a_n b + a_n b - ab\| \leq \|a_n (b_n - b)\| + \|(a_n - a) b\| \xrightarrow{n} \|a\| \cdot 0 + 0 \|b\| = 0.$$

omezen.

Pozn.: A je (asoc.) alg nad okruhem K $\equiv$ A je okruh, A je K-modul $r(ab) = a(rb) = (ra)b$

Př.: 1. těleso $\mathbb{C}$ s valuací, např. absolutní hodnotou, $|\,|$ dokonce multipl.

2. $Mat(n, \mathbb{C})$ $\quad \|a\| := \sum_{i,j} |a_{ij}|$

$$\|ab\| = \|\sum_j a_{ij} b_{jk}\| \leq \sum_j \|a_{ij} b_{jk}\| = \sum_j \sum_{i,k} |a_{ij} b_{jk}|$$

$$\|a\| \|b\| = \sum_{i,j} |a_{ij}| \sum_{k,l} |b_{kl}| \geq \sum_j \sum_{i,k} |a_{ij}| |b_{jk}| = \|ab\|$$

3. V Banachův $\quad B(V) := \{T: V \to V \mid T \text{ lin. spojité}\}$, $|\cdot|$ norma na V

$$\|A\| = \sup_{|v| \leq 1} |Av| = \sup_{|v|=1} |Av| = \sup_{v \neq 0} \frac{|Av|}{|v|}.$$

Spojité $\Rightarrow$ omezené, $\|\,\|$ dobře definovaná

úplný $\quad$ FTIAL ANAL.

3.1. Dále $K(V)$ kompaktní op. na V

3.2. $F(V)$ Fredholmovy op. na V nejsou ani vekt. prostor.

4. X lok. kompaktní Hausdorffův top. prostor $\mathcal{C}_0(X) := \{f: X \to \mathbb{C} \mid$ f spojitá a f mizí v nekonečnu$\}$. f mizí v nekonečnu, pokud

$\forall \varepsilon$ existuje C_ε kompaktní X, že $|f_{(X \setminus C_\varepsilon)}| \leq \varepsilon$, ~~tj. z komp. množiny~~ 2

$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, kde $|\ |$ je abs. hodnota v $\mathbb{C}$. Supremum existuje dle věty o nabývání maxima na kompaktní množině. $|\ |$ je abs. h. v $\mathbb{C}$.

Pozn.: V tomto případě uvažujeme $C_0(X)$ s bodovým násobením.

! 5. G lok. komp. $(L^1(G), *, \|\cdot\|)$ $\|f\| = \int |f| \, d\mu_G$ μ_G levá Haarova.

Definice: A Banachova algebra. Definujeme $\Delta_A := \{m : A \to \mathbb{C} \mid m$ homomorf. algeber (spojitý), a $m \neq 0\}$. Δ_A slouje strukturním prostorem A (někdy stavový prostor) a její prvky stavy. (Nejsou to stavy že C^* algeber.)

Př.: 1. $A = C_0(X)$, X lok. kompaktní

$\forall x \in X$ $m_x : A \to \mathbb{C}$ $m_x(f) := f(x)$

$m_x(fg) = (fg)(x) = f(x)g(x) = m_x(f)\, m_x(g)$ homom. alg.

Pozn.: Spojitost v def. dokážeme, že je důsl. zbylých vlastností.

Pozn.: Homom. algeber: $m(a+b) = m(a) + m(b)$

$\forall a, b \in A$ $m(ra) = r\, m(a)$

$\forall r \in \mathbb{C}$ $m(ab) = m(a)\, m(b)$

Definice: $\forall m, n \in \Delta_A$ $(m \cdot n)(a) := m(a)\, n(a)$ a přirozeně $(m+n)(a) := m(a) + n(a)$

Ani mn, ani $m+n$ nemusí být v Δ_A. !

Pozn.: $m, -m \in \Delta_A$ avšak $m + (-m) = 0 \notin \Delta_A$. Není ani vekt. prostor.

Základní konstrukce – augmentace

Banach. alg. A nemusí nutně obsahovat jednotku, tj. element $1 \in A$, $1x = x1 = x$ $\forall x \in A$.

Př.: X lok. komp. nekomp. $C_0(X) \not\ni 1$

Augmentace algebry: $\tilde{A} := A \times \mathbb{C}$

$(a, \alpha)(b, \beta) := (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$

$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$

$\|(a,\alpha)\|^{\sim} = \|a\| + |\alpha| \qquad \forall a, b \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$1 := (\underset{A}{0}, \underset{\mathbb{C}}{1})$

Souvisí s Alexandrovovou kompaktifikací $X \hookrightarrow X^\infty = X \cup \{\infty\}$

top. na X^∞ viz Deitm.-Echt.

s alexn. topol $\mathcal{C}(X^\infty) = \mathcal{C}_0(X)^\sim$

Př.: $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cong_0 S^2$ [redacted] $\subseteq \mathbb{R}^3$

Pozn.: $\forall m \in \Delta_A \quad V(m) := \{x \in A \mid m(x) = 0\} \subseteq A$ uzavřená

(Alg.g.) a kodimenze 1 : i) $x_n \to x \in A,\ x_n \in V(m)\ \forall n$

$0 = \lim_n m(x_n) = m(\lim_n x_n) = m(x) \Rightarrow$

$x \in V(m)$; Spoj. m ukáž. „univalenní" později.

ii) $m : A \to \mathbb{C}$

$\mathrm{Ker}\, m \oplus \overline{\mathrm{Im}\, m} \cong A$

$m \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, m \cong \mathbb{C} \Rightarrow \mathrm{Ker}\, m$ má kodimenzi 1

$\overline{\mathrm{Im}\, m} = \mathrm{Im}\, m$

$x, y \in V(m)$: $m(ay) = m(a)\, m(y) = 0$
$a \in A \qquad m(x+y) = 0$
$m(\lambda x) = \lambda m(x) = 0$

$\Big\}$ $V(m)$ ~~je ideál~~ ~~$\forall \Delta_A$~~.

$V(m)$ je uz. ideál a maximální $\Rightarrow$ analogie s ideálem $V(I)$ z algebraické topologie:

$I(X) = \{p \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mid p(a) = 0\ \forall a \in X\}$

Verschwindungsid.

$\Big(X := \{a \in \mathbb{k}^n \mid \forall p \in S\ p(a) = 0\}$, varieta $S \subseteq \mathbb{k}[x^1, \dots, x^n] \Big)$

$I \subseteq \mathbb{k}[x^1, \dots, x^n]$

$V(I) = \{a \in \mathbb{k}^n \mid \forall p \in I\ p(a) = 0\}$
varieta

Definice: Pokud A má jednotku, nazveme ji unitální ($1\cdot a = a\cdot 1 = a$ $\Rightarrow 1 = 1'$ jednoz.)

Množ. invertibilních prvků v algebře A vyznačíme
$$A^\times = \{u\in A \mid \exists u' \;\; uu' = u'u = 1\}.$$

! **Lemma (o Neumann. řadě)**: Pokud $(A, \|\cdot\|)$ je unitální Banachova algebra, $a\in A$ a $\|a\|<1$. Pak

1) $1-a\in A^\times \wedge (1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$

2) $A^\times \subseteq A$ je otevřená.

Dk.: 1) • $s_n = \sum_{m=0}^{n} a^m$
$$\|s_{n+p} - s_n\| = \Big\|\sum_{k=0}^{n+p} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^k\Big\| = \Big\|\sum_{k=n+1}^{n+p} a^k\Big\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p}\|a\|^k \le$$
$$= \|a\|^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\|a\|^k = \underbrace{\|a\|^{n+1}\frac{1}{1-\|a\|}}_{*}$$

$\forall \varepsilon\, \exists n_0\, \forall n\ge n_0\, \forall p \quad * < \varepsilon$ ($\|a\|<1$!).

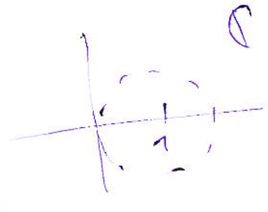
Tj. $(s_n)_n$ je cauchyovská $\Rightarrow$ je konvergentní, ozn. s

• $(1-a)s = (1-a)\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1} =$

$= \cancel{s} - (a^0 + \cancel{s}) = 1$ (kde jsme ozn. $s = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$).

2) Otevřenost $A^\times$. Nechť $x\in A^\times$. Uvažme

$B_1(1) = \{y\in A \mid \|y-1\|<1\} \subseteq A$



$B_1(1)$ otevřená z definice ...

navíc $\forall a \in B_1(1)$ $\exists a^{-1}$ a platí $a^{-1} = (1-(1-a))^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-a)^n$ dle lemmatu o Neumannově řadě, neboť $\|1-a\| < 1$ na $B_1(1)$. Je tedy $B_1(1) \subseteq A^\times$.

- $x \in A^\times \Rightarrow x \in x B_1(1) = \operatorname{Im} L_{x|B_1(1)}$, $L_{x|B_1(1)} : B_1(1) \to L_x(B_1(1))$. $L_{x^{-1}}|_{L_x(B_1(1))} : L_x(B_1(1)) \to B_1(1)$ také spojitý a inverzní k $L_x|_{B_1(1)}$ speciálně $x B_1(1)$ je homeomorfní otevřené $B_1(1)$.

Nechť $y \in x B_1(1) \Rightarrow y^{-1} = z^{-1} x^{-1} \Rightarrow x B_1(1) \subseteq A^\times$ otevřené okolí x.
$y = xz$

Pozn.: $(A^\times, \cdot, 1)$ je topol. grupa. $A^\times \subseteq A$ Hausdorffovská, neboť (otevřená) v normované, tedy Hausdorffovské A. Spojitost. kgl. spojitost $^{-1}$. Ozn. $I := {}^{-1}$ $A^\times \to A^\times$, tj. $\forall a_0 \in A^\times$ je I spojité v a_0. $I(a) = a^{-1}$.

Chceme $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a \in U_\delta(a_0) \cap A^\times (\neq \emptyset)$ je $\|a^{-1} - a_0^{-1}\| < \varepsilon$. Buď $\|a - a_0\| = \frac{1}{2}\|\frac{1}{a_0}\|^{-1} = \delta$ (klas. trik). Pak $a = a_0(1 - \underbrace{a_0^{-1}(a_0 - a)})$. Spočteme normu

$$\|(1 - a_0^{-1}(a_0 - a)) - 1\| = \|-a_0^{-1}(a_0-a)\| \le \|a_0^{-1}\| \tfrac{1}{2} \|\tfrac{1}{a_0}\|^{-1} = \tfrac{1}{2}$$

$\Rightarrow 1 - a_0^{-1}(a_0 - a) \in B_1(1) \Rightarrow$ má inverzi. Navíc

$(1 - a_0^{-1}(a_0 - a))^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_0^{-1}(a_0 - a))^n$. Proto a^{-1}

$= \sum_{0}^{+\infty} [a_0^{-1}(a_0 - a)]^n a_0^{-1}$, v důsledku celkem

$$\left\|\frac{1}{a}-\frac{1}{a_0}\right\| = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left[a_0^{-1}(a_0-a)\right]^n - 1\right)a_0^{-1}\right\| =$$

$$= \left\| \sum_{1}^{+\infty} (a_0^{-1}(a_0-a))^n a_0^{-1} \right\| \underset{\text{podmultiplikativnost}}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} \|a_0^{-1}\|^{n+1} \|a_0-a\|^n$$

$$= \frac{\overbrace{\|a_0^{-1}\|}^{=b}{}^2 \overbrace{\|a_0-a\|}^{<\rho}}{1-\frac{1}{2}\|a_0-a\|\,\|a_0^{-1}\|} \overset{?}{<} \varepsilon \quad \rho\,?$$

$$b^2\rho < \varepsilon - \varepsilon\frac{1}{2}\rho b \Rightarrow \rho b^2 + \rho\frac{b\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\rho < \frac{\varepsilon}{b^2+\frac{b\varepsilon}{2}}$$ takové ρ stačí volit a takové že $\rho \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{a_0}\right\|^{-1}$ $\square$

<u>Pozn.:</u> Z ? je již zřejmé, že $\rho \to 0$ lze zmenšit menší než lib. ε (b nezávisí na a, jen na a_0).

<u>Definice</u>: Pro $a \in A$: $\sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a-\lambda 1$ nemá inverzní prvek v $A\}$. Není-li A unitální, $\sigma_A(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a)$ (v augmentaci $\tilde{A} \supseteq A$).

spektrum $\sigma_A(a)$

$Res_A(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma_A(a)$ (rezolventa).

Pozn.: Koncept holomorfnosti. $f: D \subseteq \mathbb{C} \to V$ (normovaný prostor) slyje holomorfní, if $\forall z \in D$ $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$, kde D je otevř. v $\mathbb{C}$. ($\frac{1}{h} \in \mathbb{C}$)

!! Lemma: A unitální Banachova. Pak $\forall a \in A$ $\sigma_A(a)$ je kompaktní $\subseteq B_{\|a\|}(0)$.

Dk.: 1) $A^\times \subseteq A$ ot. $F: \lambda \mapsto a - \lambda 1$ spoj. ~~$\Rightarrow Res_A(a)$ je otevřená~~ 6
$\mathbb{C} \to A$

a tedy $\sigma_A(a)$ uzavř. $\quad a - \lambda 1 \in A \setminus A^\times \quad$ $\boxed{\text{uzavř.}}$ $F^{-1}(A \setminus A^\times)$

($\Rightarrow \lambda \neq 0$ spec.)

2) Buď $\lambda \in \mathbb{C}$ $|\lambda| > \|a\|$. $a - \lambda 1$ má inverzi, neboť

$\|\lambda^{-1} a\| < 1 \Rightarrow 1 - \lambda^{-1} a$ je invertibilní.
Lemma
(Neumann. řada)

λ nepatří do spektr.

$\lambda 1 - a = \lambda(1 - \lambda^{-1} a)$ také, neboť $\lambda \neq 0$. Tj. $\lambda \in Res_A(a) \Leftarrow$
$\Leftarrow |\lambda| > \|a\|$. Spektrum je kompaktní!

!! Věta: A buď unitální Banachova algebra a $a \in A$. Pak
$\boxed{\sigma_A(a) \neq \emptyset.}$

Dk.: ↯ $\exists a$ $\sigma_A(a) = \emptyset$, $\alpha: A \to \mathbb{C}$ spojitý funkcionál. $f_\alpha(\lambda) = \alpha\left(\frac{1}{a-\lambda}\right)$
je holo ($\frac{1}{a-\lambda}$ je holo na $\mathbb{C}$, spoj. lin $\circ$ hol. je holo funkce)

Buď $|\lambda| > 2\|a\|$

$$|f_\alpha(\lambda)| = \left|\alpha\left(\frac{1}{a-\lambda}\right)\right| = \frac{1}{|\lambda|}\left|\left[\alpha\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1}\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|}\left|\alpha\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right)\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{0}^{+\infty}\left|\alpha\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right| \leq \quad \leftarrow \alpha \text{ spoj.} \quad C = \|\alpha\|_{op}$$

$$\leq \frac{C}{|\lambda|}\sum \|\lambda^{-1} a\|^n \leq \frac{C}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2C}{|\lambda|}. \quad \lim \lambda \to \infty.$$

Liouville $f_\alpha(\lambda) = 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \forall \alpha \in A'$ ← spoj. duál

$\Rightarrow \frac{1}{a-\lambda} = 0$ ↯ (Hahn-Banach – „dosti prvků" A'). □
duál

Pozn.: Z lemmatu plyne: $\forall m \in \Delta_A$ je spojitý.

Dk.: Jen pro A unitální: $m(1) = m(1 \cdot 1) = m(1)^2 \Rightarrow$
zatím

a) $m(1) = 0 \Rightarrow m(a) = m(1a) = 0$

b) $m(1) = 1$: $m(a - m(a)1) = m(a) - m(a) = 0 \ \forall a \in \Delta_A$

Platí ~~...~~ $a - m(a)1 \in A \setminus A^\times$: ↯ b inverze, pak

$1 = m(1) = m((a - m(a)1)b) = m(a - m(a)1)\, m(b) = 0 \cdot m(b) = 0$ ↯

Tj. $\Rightarrow m(a) \in \sigma_A \Rightarrow m(a) \subset B_{\|a\|}(0)$. Odtud $\|m\|_{op} \leq \frac{|m(a)|}{\|a\|} \leq 1$. □

! **Důsledek (Gelfand–Mazur):** Nechť A je unitální Banachova algebra, 7
že $\forall$ nenulové jsou invertibilní. Pak $A = \mathbb{C}\cdot 1$.

Dk.: ↯ $a \in A \setminus \mathbb{C}1 \neq \emptyset$: $a - \lambda 1 \neq 0 \Rightarrow a - \lambda 1$ je invertibilní (předpoklad)
$\lambda \in \mathbb{C}$ $\qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \sigma_A(a) = \emptyset$ ↯.

Def.: $\forall a \in A$ unitální Banachově def. spektrální poloměr
$$r(a) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_A(a)\}$$

Věta (o spektr. poloměru): $r(a) = \limsup\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ a $r(a) \leq \|a\|$.

Dk.: 1. Dokážeme $r(a) \overset{\bullet}{\leq} \liminf \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \overset{\bullet\bullet}{\leq} r(a)$

Buď $\lambda \in \sigma_A(a)$. $\lambda^n - a^n = \underbrace{(\lambda - a)}_{\text{není inv.}} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j a^{n-1-j} \Rightarrow \lambda^n \in \sigma_A(a^n)$

[a není inv. $\Rightarrow ab$ není inv.: ↯ $\exists z \in A$: $abz = 1 \Rightarrow bz$ inv. kc]

Tedy: $|\lambda^n| \leq \|a^n\| \Rightarrow |\lambda|^n \leq \|a^n\| \Rightarrow r(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ $(\bullet)$ ✓

$\bullet\bullet$ $(\lambda 1 - a)^{-1} = \lambda^{-1}\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_0^{+\infty} a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ $\forall |\lambda| > \|a\|$

$(\lambda 1 - a)^{-1}$ holom na $|\lambda| > \cancel{\|a\|}$ *) $\Rightarrow \sum a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ konverguje

$(\vee A) \Rightarrow a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ omezená $\Rightarrow \|a^n\| \leq C|\lambda|^{n+1}$ $\quad {}^{1/n}$

$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \underbrace{C^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} |\lambda| \underbrace{|\lambda|^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} \Rightarrow |\lambda| \geq \limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow r(a) \geq \limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

2. $r(a) = \text{l.s.} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \underset{\uparrow}{\overset{\text{l.s.}}{\leq}} (\|a\|^n)^{\frac{1}{n}} = \|a\|$.
submult. A

□

*) Dokonce i pro $|\lambda| > r(a)$; viz přednášku.

Definice: $\forall a \in A$ (unitální) Banachova algebra. Číslo
$$r(a) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_A(a)\} \subseteq B_{\|a\|}(0)$$
nazveme spektrálním poloměrem.

Pozn.: $r(a) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ (vlastní) a $\exists\, \forall a \in A$ (předchozí tvrzení).

Věta (o spektr. poloměru): $\forall a \in A$ $r(a) = \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$, in particular $r(a) \leq \|a\|$.

Dk.: Již víme, že $\forall \lambda \in A$ je $|\lambda| \leq \|a\| \Rightarrow r(a) \leq \|a\|$

Ukážeme, že $r(a) \leq \liminf \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$
$\leq r(a)$ (, tj. i $\liminf = \limsup$
$\Rightarrow \lim \exists$ & $= \liminf = \limsup$)

1) $\lambda \in \sigma_A(a)$: $\lambda^n 1 - a^n = (\lambda 1 - a) \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j a^{n-1-j}$

$uv \in A^\times \Rightarrow u \in A^\times \Rightarrow \lambda^n - a^n \notin A^\times \Rightarrow \lambda^n \in \sigma_A(a)$

$|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq \|a^n\|$ (věta o komp. spektra $\subseteq B_{\|a\|}(0)$) $\Rightarrow |\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow |\lambda| \leq \liminf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ $\quad / \sup_\lambda$

$r(a) \leq \liminf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$

2) $(\lambda 1 - a)^{-1} = \lambda^{-1}\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ for
$\|1 - \frac{a}{\lambda} - 1\| < 1$, tj. $\|a\| \lneq |\lambda|$ z lemma o Neumannově řadě. Zjevně $(\lambda 1 - a)^{-1}$ je holom na $|\lambda| > r(a) = \sup\{|\lambda| \mid 1\lambda - a \text{ non-inv.}\}$.
Nutně $a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ jsou omezená, a tedy

$$\left\|a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}\right\| \le C \qquad \|a^n\| \frac{1}{|\lambda^{n+1}|} < C \qquad \|a^n\| \le C|\lambda|^{n+1}$$

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le C^{\frac{1}{n}} |\lambda| |\lambda|^{\frac{1}{n}} \quad / \limsup_n$$

$$\limsup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le |\lambda| \quad / \forall \lambda > r(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le r(a) \qquad \square$$

<u>Pozn.:</u> $f : X \to \mathbb{C}$, X komp.

$f - \lambda 1$ neinvertib. iff $\exists x_0 \ f(x_0) - \lambda = 0$ iff (bodově)

$\lambda \in \mathrm{Rng} f \Rightarrow \boxed{\sigma_A(f) \supseteq \mathrm{Rng} f}$

Dokonce $\sigma_A(f) = \mathrm{Rng} f$ since then $\frac{1}{f-\lambda}$ je spojitá, if nenaleží λ spektru.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f-\lambda} \underset{\neq 0}{=} \frac{1}{f(x_0)-\lambda} \Rightarrow \text{spojitost.}$$

$\to A = L^1(G), *)$

Př.: Nechť G je lok. komp., μ_G l. Haarova míra, $\forall \chi \in \hat{G}$. Uvažme $m_\chi(f) := \hat{f}(\chi)$ $\forall f \in L^1(G)$. Chceme $m_\chi : L^1(G) \to \mathbb{C}$ je stav.

$m_\chi(f*g) = \widehat{f*g}(\chi) = f(\chi)\, g(\chi) = m_\chi(f)\, m_\chi(g)$

$m_\chi(f+g)$, $m_\chi(cf)$ snadné.

Spojitost: $f_n \xrightarrow[n]{} f$ v $L^1(G)$

Lebesgue monotonní konv.

$m_\chi(\lim_n f_n) = \int \lim_n f_n \bar{\chi}\, d\mu_G = \lim_n \hat{f}_n(\chi) =$

$\lim_n m_\chi(f_n)$. Tj. m_χ je spojité. (Re, Im; u $g = e$)

Nenulovost zřejmá: $f = \chi_U \chi$ (U otevř.).

char fce, charakter

Stav: $\hat{G}$ (Hausdorffova) topologická grupa. $\nabla F : L^1(G) \to Fce(\hat{G})$

Chceme dát topologii (~~prostoru stavů~~ strukturnímu prostoru): Vezměme normu na $\Delta_A \subseteq A'$, $\|\alpha\| = \sup_{\|v\|<1} \|\alpha(v)\|_A$. Píšeme jen $\| \|$ – rozlišíme z kontextu.

Lemma (normy ~~stavů~~ prvků str. prostoru): Pokud A je Banachova alg. a $m \in \Delta_A$. Pak $\|m\| \leq 1$. Pokud navíc A je unitální, $\|m\| = 1$.

Dk.: 1. A je unitální. $m(1) = m(1^2) = m(1)m(1) \Rightarrow m(1) = 1$ nebo $m(1) = 0$. Pokud $m(1) = 0 \Rightarrow m(a) = m(a.1) = 0$ ↯

Pro $a \in A$: $m(a - m(a)1) = m(a) - m(a) = 0 \Rightarrow$ $a - m(a)1$ není invertib. $[\, z z^{-1} = 1 \Rightarrow m(z)\, m(z^{-1}) = 1 \Rightarrow m(z) \neq 0 \,]$

$\Rightarrow m(a) \in \sigma_A(a) \subseteq B_{\|a\|}(0) \Rightarrow |m(a)| \leq \|a\|$.

charakteristika spektra

$\Rightarrow \|m\| \leq 1$. Navíc $m(1) = 1 \Rightarrow \|m\| = 1$.

2. A není unitální $\Rightarrow$ $m^\sim : A^\sim \to \mathbb{C}$, $m^\sim(a, \alpha) := m(a) + \alpha$. Opět nenulový a spojitý: $m(a) = \tilde{m}(a, \alpha) - \alpha$

$|m(a)| = |\tilde{m}(a, \mathbb{Q})| \leq \|a\| \Rightarrow \|m\| \leq 1.$ $\square$

<u>Def</u>: $(V, |\cdot|)$ normovaný. <u>Slabá $*$-topologie na</u> $V' \equiv$ iniciální pro $\{\delta_v : V' \to \mathbb{C},\ v \in V\}$, $\delta_v(\alpha) := \alpha(v)\ \forall \alpha \in V'$

$(\alpha_j)_j \subseteq V'$ konverguje k $\alpha \Leftrightarrow \alpha_j(v) = \alpha(v)\ \forall v \in V$

<u>Banachova-Alaogluova věta</u>: $(V, \|\cdot\|)$ normovaný. Pak $\overline{B}' := \{f \in V' \mid \|f\| \leq 1\} \subseteq V'$ se slabou $*$-topologií je kpt. Hausd.

Dk.: $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. $f \in \overline{B}'$ $|f(v)| \leq \|v\|\ \forall v \in V \Rightarrow f(v) \in \underset{\subseteq \mathbb{C}}{\|v\| \overline{B}}$ (kompaktní). $\Xi : \overline{B}' \to \underset{v \in V}{X}(\|v\| \overline{B})$, $f \mapsto (f(v))_{v \in V}$, $f \in \overline{B}'$. X <u>kpt. Hausdorffův</u> (Tychonov). Ξ je injektivní. Je $\Xi(\overline{B}')$ uzavřená? $(f_\alpha) \xrightarrow[\alpha]{} f \Leftrightarrow$

$\forall v \in V$: $(f_\alpha)(v) \xrightarrow[\alpha]{} f(v)$ (konv. na X) $\Leftrightarrow f_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} f$ ve slabé $*$-top.

$\|f\| = \sup\limits_{\substack{v \in V \\ |v| \leq 1}} |f(v)| = \sup\limits_{\substack{v \in V \\ |v| \leq 1}} |\lim\limits_{\alpha} f_\alpha(v)| \leq \sup 1 = 1 \Rightarrow$ Uzavřenost.

Uzavř. v kpt. je kpt. $\square$

<u>Def</u>: Δ_A buď odteď vybaveno slabou $*$-topologií. (Spoj. vůči ní!)

<u>Definice (Gelfandovo zobrazení)</u>: $\forall a \in A$, $\hat{a} : \Delta_A \to \mathbb{C}$

$\hat{a}(m) := m(a)$ (Gelfandovo zobrazení) a $\hat{\ } : A \to \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(\Delta_A)$, $\hat{\ }(a) := \hat{a} \in \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(\Delta_A)$. Píšeme $\hat{a}$ (Gelfandova transformace). [$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(X) :=$ prostor $\forall$ fcí na množině X, do $\mathbb{C}$.]

<u>Pozn.</u>: Na str. 11 je přehled symbolů norem. Přečtěte si.

<u>Věta (o Gelfandově zobrazení)</u>: Nechť A je Banachova algebra. Pak

1. Δ_A je lokálně kompaktní Hausdorffův,
2. A je unitální $\Rightarrow \Delta_A$ je kompaktní
3. $\forall a \in A$ $\hat{a} \in \mathcal{C}(\Delta_A)$ a mizí v nekonečnu.
   $\hat{\ } : A \to \mathcal{C}_0(\Delta_A)$ je homomorfismus algeber.
4. $\forall a \in A$ $\|\hat{a}\|_{\mathcal{C}(\Delta_A)} \leq \|a\|$, a tak $\hat{\ }$ je spojité!

Dk.: 1 & 2 :

a) A unitální : $m_n \in \Delta_A$, $m_n \xrightarrow[n]{} f$, $f \in A'$ ($m_n : A \to \mathbb{C}$ homom. algeber). • $f(ab) = [\lim_n m_n](ab) = \lim_n [m_n(ab)]$

$= \lim_n [m_n(a) m_n(b)] = \lim_n [m_n(a)] \lim_n [m_n(b)] =$

$= (\lim_n m_n)(a) (\lim_n m_n)(b) = f(a) f(b)$

• analog. pro $\lambda a + \mu b$

• $f(1) = \lim_n m_n(1) = 1 \Rightarrow f \neq 0 \Rightarrow f \in \Delta_A$

Celkem $\overline{\Delta_A} = \Delta_A$. $\overline{\Delta_A}$ kpt. (Ban-Alaog.) $\Rightarrow \Delta_A$ kpt.

b) A není unitální : $m_n \in \Delta_A$, $m_n \xrightarrow[n]{} f$, $f \in A'$ ~~stejně~~ (obdobně):

$\forall g \in \Delta_A$: $\tilde{g}(a + \lambda 1) := g(a) + \lambda$, $\tilde{g} : \tilde{A} \to \mathbb{C}$ augmentace. Linearita zřej.

$\tilde{g}((a + \lambda 1)(b + \mu 1)) = g(ab) + \lambda g(b) + \mu g(a) + \lambda\mu$

$\tilde{g}(a + \lambda 1)\, \tilde{g}(b + \mu 1) = g(a) g(b) + \lambda g(b) + \mu g(a) + \lambda \mu$,

tj. opět $\tilde{g}$ je homom. alg. / $\tilde{g} = 0 \Rightarrow g(0) = -\lambda \, \forall \lambda$ ↯

$\tilde{g}(1) = \tilde{g}(1 \cdot 1) = \tilde{g}(1)^2 \Rightarrow \tilde{g}(1) = 0$ nebo $\tilde{g}(1) = 1$.

$m_n \xrightarrow[n]{} f \Rightarrow \tilde{m}_n \xrightarrow[n]{} \tilde{f}$. Stejně $\tilde{f}$ unit. homom. alg.

A. $f(ab) = \tilde{f}(ab) = \tilde{f}(a) \tilde{f}(b) = f(a) f(b)$, tj. f homom. alg. také. Musíme připustit $f = 0$.

Pak ale $\overline{\Delta_A} \subseteq \Delta_A \cup \{0\}$ (□)

Celkem $\overline{\Delta_A}$ opět kpt. Odtud Δ_A lokálně komp.

(□)

$x \neq 0$ U, U_x nechť oddělují 0 a x. Pokud 0 je v $\overline{\Delta_A}$.

$x \in \overline{\Delta_A} \setminus U$ kpt. $\subseteq \Delta_A$ okolí x

$x = 0$ triv $\Rightarrow 0 \in \overline{\Delta_A}$ ← cpt.

3. $\hat{a} \in \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(\Delta_A)$

$\hat{a}(m) := m(a)$ $\quad \lim_n [\hat{a}(m_n)] = \lim_n [m_n(a)] = (\lim_n m_n)(a) =$

$m_n \xrightarrow[n]{} m$ $\quad = m(a) = \hat{a}(m) = \hat{a}(\lim m_n) \Rightarrow \hat{a} \in \mathcal{C}(\Delta_A)$

Mizí: a) Δ_A kpt. triv.

b) $\overline{\Delta_A} = \Delta_A \cup \{0\}$ $\quad \hat{a}(0) = 0$, tj. mizí v ∞ (v Δ_A!).

$\widehat{ab}(m) = (ab)(m) = m(ab) = m(a)m(b) = \hat{a}(m)\hat{b}(m) =$

$= \hat{a}\hat{b}(m)$ ($\mathcal{C}_0(\Delta_A)$ s bodovým násobením) prvků str. prostoru

$\|m\| \le 1$ Lemma (normy ~~stavů~~)

$\|Av\|_X \le \|A\|_{op} \|v\|_Y$

4. $|\hat{a}(m)|_{\mathbb{C}} = |m(a)|_{\mathbb{C}} \le \|m\|_{\Delta_A} \|a\|_A \le \|a\|_A \Rightarrow \|\hat{a}\|_{\mathcal{C}_0(\Delta)} = \sup_{m \in \Delta_A} |\hat{a}(m)|_{\mathbb{C}} \le \|a\|_A .$

($|\ |_{\mathbb{C}}$ označuje normu na $\mathbb{C}$ (~~valuaci~~) abs. hodnotu.)

$|\hat{\ }|_{op} = \sup_{\|a\| \le 1} \|\hat{a}\|_{\mathcal{C}_0(\Delta_A)} \le \sup_{\|a\| \le 1} \{\|a\|_A\} \le \sup \{1\} = 1.$

$\square$

Pozn.:
1. $\|m\|_{\Delta_A} = \sup_{\|a\| \le 1} |m(a)|_{\mathbb{C}}$, $a \in \Delta_A$ $[A']$

2. $\|\hat{a}\|_{\mathcal{C}_0(\Delta_A)} := \sup_{m \in (\Delta_A)} |\hat{a}(m)|_{\mathbb{C}}$ $[\mathcal{C}_0(X)]$

3. $\|a\|_A$ $[A]$

4. $|\ |_{\mathbb{C}}$ (valuace), std. (Eukl.) norma na $\mathbb{C}$, abs. hodn. $[\mathbb{C}]$

5. $|T|_{op} := \sup_{\|a\|_V \le 1} \|Ta\|_W$ $T: V \to W$ $[\mathrm{Hom}_\sigma^{cont}(V, W)]$

~~Všechny normy jsou operátorové~~

Ideály v Banachových algebrách

<u>Definice</u>: $I \subseteq A$ nazveme <u>ideálem</u> (říideálem obšírněji), pokud $\forall a \in I \ \forall b \in A \quad ab \in I \wedge ba \in I$.

I nazveme <u>maximální</u>, pokud je vlastní ($\neq A$) a $\forall J$ vlastní $J \supseteq I \Rightarrow J = I$ ($\Leftrightarrow J \supsetneq I \Rightarrow J = A$).
[Je maximální v množině všech vlastních ideálů]

<u>Poznámka</u>: $u \in A^\times \wedge u \in I$ ideál $\Rightarrow I = A$ (tedy $\Leftarrow$)
$\forall b \in A : b = b u^{-1} u \in I$ „levost I"
(tedy $\Rightarrow$) Je tedy $A^\times \cap I = \emptyset$ pro maximální I (stačí vlastní).
Mluvíme však o unitálních algebrách
(Není $C_0(X)$, X nekomp; $K(H)$, $\dim H > \infty$, takže ne.)

<u>Tvrzení</u>: A unitální Banachova. Každý vlastní ideál je v nějakém maximálním. Každý maximální je uzavřený. Pokud A je komut, pak $\forall a \in A \setminus A^\times \ \exists I_a$ max., že $a \in I_a$.

Dk.: 1. I vlastní. $X = \{ J \mid J \text{ vlastní} \wedge J \supseteq I \} \neq \emptyset$
$\preceq \, = \, \subseteq$ $(X, \preceq)$ neprázdná částečně usp. množina
$(J_\alpha)_\alpha$ řetězec; $\bigcup_\alpha J_\alpha$ je horní závora?
$\bigcup_\alpha J_\alpha$ ideál, vlastní, $J_\beta \subseteq \bigcup_\alpha J_\alpha \ \forall \beta$ zřejmé.
Zorn.: X má maximální prvek, Z. Z je max id.
(($\forall Z' \supsetneq Z \wedge Z' \neq A \Rightarrow Z' \in X \wedge Z$ není maximální.))

2. I maximální. $\overline{I}$ je také maximální.
a) $\overline{I}$ je ideál: $a \in A$, $b \in \overline{I}$
$$a \lim_n b_n \underset{\text{spojitost}}{=} \lim_n \underbrace{a b_n}_{\in I} \in \overline{I}$$. Obdobně zprava.

b) $\overline{I}$ je vlastní. ② $\downarrow$ ②

$A^\times$ ot. $A^\times \cap \overline{I} = \emptyset$? ① [$\not\,$ $\exists c \in A^\times \cap \overline{I}$, $c_n \to c$ v A
U okolí c v ot. $A^\times$, $c_n \in U$

③ Tj. $\overline{I} = I$ a I je uzavřený. $\Rightarrow c_n \in A^\times$ a $c_n \in I \Rightarrow \not\,$]

3. $a \in A \setminus A^\times$: $I_a := aA$ je ideál (kom. A). $1 \notin I_a$ (jinak $a \in A^\times$).

Odtud I_a je vlastní. Z 1) $\exists I$ max : $I_a \subseteq I$.

$\square$

Pozn.: Buď A komutativní Banachova algebra. Pak
$\varkappa : \Delta_A \to \operatorname{Spec} A := \{ I \mid I \text{ maximální} \}$, $\varkappa(m) := \ker m$,
je bijekce. $m : A \to \mathbb{C}$

a) dobře def.: $\ker m \oplus \overline{\operatorname{im} m'} = A$ $\quad \overline{\operatorname{im} m'} = \operatorname{im} m' \cong \mathbb{C}$

$\Rightarrow \operatorname{kodim} \ker m = 1 \Rightarrow$

$\ker m$ je maximální jako v.p. $(m \neq 0)$

[m spoj. $\Rightarrow \ker m$ uz. $\Rightarrow \varkappa \to$ uzavř. ideály]

$a \in \ker m \Rightarrow m(ab) = m(a)m(b) = 0 \Rightarrow ab \in \ker m$
$b \in A$

b) $\varkappa$ je inj.: $\varkappa(m_1) = \varkappa(m_2)$, tj. $x_0 \in \varkappa(m_1) \Leftrightarrow x_0 \in \varkappa(m_2)$
tj. $m_1(x_0) = 0 \Leftrightarrow m_2(x_0) = 0$. $1 \notin \ker m$ (jinak $m = 0$)
$x = x_0 + \lambda 1$ $\quad m_1(x) = \lambda m_1(1) = \lambda = m_2(x_0 + \lambda 1) = m_2(x)$
$\ker m \quad \operatorname{im} m'$
$\Rightarrow m_1 = m_2$.

c) $\varkappa$ je surj.: $I \in \operatorname{Spec}(A)$ $\quad A/I$ je Banachova
$\|x + I\| = \inf_{i \in I} \|x + i\|$, I uzavřený, tj. kvocientní
norma je dobře def. $\quad (x+I)(y+I) := xy + I \quad$ jinak
A/I komut. A/I neobsahuje žádný vl. ideál $(\pi^{-1}(J_0) \oplus I \supsetneq I)$
$\pi : A \to A/I$
$\Rightarrow \forall$ prvek je invertibilní dle bodu 3 předch. tvrzení

Tj. Gelfand-Mazur: $A/I \simeq \mathbb{C}1 \Rightarrow A \simeq I \oplus \mathbb{C}1$ (3)

$i + \lambda 1 \longleftarrow (i, \lambda 1)$

$m(x + \lambda 1) := \lambda$ does the job. $\square$

Δ_A hraje ~~úlohu~~ Spec A. ~~Pokud A~~ je
$\uparrow$ ~~ž~~
nědy

Pozn.: A komut. unitální $\Rightarrow$ stavy v bijekci s max. ideály. X alg. varieta $X \simeq \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[X]$
$\uparrow$ ireducibilní $\uparrow$ souř. obor X

lokalizace $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ podle „Verschwindungsideálu" X.

Δ_A hraje roli prostoru. Zde sice Δ_A kompaktní, ale $\Delta_A \subseteq A' \leftarrow$ obecně „velký".

Banachovy $*$-algebry a Gelfand-Naimarkova věta

Definice: Banachova $*$-algebra je každá Banachova algebra $(A, \cdot, \|\ \|)$ vybavená navíc $*: A \to A$ involutivním antiautomorfismem, jež je izomorfismem normovaného prostoru $(A, \|\cdot\|)$ (= izometrií).

Pozn.: $**a = a$ $\quad *(ab) = *b\, *a$ $\quad *(a + \lambda b) = *a + \bar{\lambda}\, b^*$

$\|*a\| = \|a\|$. Značme $a^* = *a$ $\boxed{\to \text{normovaná}}$

Invol. a norm. a $\|a^*\| = \|a\| \Rightarrow \boxed{*\text{-algebra}}$ $\uparrow$ možné názvosl.

Definice: Banachova $*$-algebra se nazývá C^*-algebra, pokud $\|aa^*\| = \|a\|^2$ (C^*-identita).

Příklady: 1. $(B(H), \cdot, \|\ \|_{op}, *)$ adjunkce operátorů
H Hilbertův $\qquad C^*$-alg.

2. $K(H)$ analogicky. Težší uzavřenost na $*$. C^*-alg

3. $(C_0(X), \cdot, \|\ \|, *)$ $\quad f^*(x) = \overline{f(x)}$ $\quad C^*$-alg.
$\forall X$ lok. komp.

Pozn.: $L^1(G)$ je C^*-alg. iff $G = \{e\}$ (dk viz Deit/Echt.).

„Obchází" se: ~~od~~ Banachovy $*$-algebry $\rightsquigarrow$ obalující

„C^*-algebra. (stejné repr., obdobně jako $\mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$

$$:= \frac{T(\mathfrak{g})}{\langle X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y],\ X, Y \in \mathfrak{g} \rangle}$$ ← bi-ideál v obal. algebra

(obalující → enveloping) $T(\mathfrak{g}) := \mathbb{k} \oplus \mathfrak{g} \oplus \otimes^2 \mathfrak{g} \oplus \dots$ Tzv. univerz. obal. algebra. Obdobně

také G kon. $\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}[G]$ grup. algebra; stejné repr. op.

Důl. roli hraje $C(H)$ alg. kpt. op na Hilb. pstoru H.

$\forall$ ired. repr. $C(H)$ je izomorfní tautologické, tj.

$id : C(H) \to B(H)$ $\quad id(A)v = A(v)$ $\forall v \in H$ $\forall A \in C(H)$

$\Rightarrow$ obdobné vlastnosti mají tzv. liminální

C^*-algebry („zasněcující"; liminaires!), dále

postliminální; antiliminální)

• Je i $C^*_r(G)$, tzv. red. C^*-alg., obecně jiná.

! Pozn.: ρ repr. G (lok. k. gra) $\rightsquigarrow$ $\tilde{\rho} : L^1(G) \to End(V)$

$f \in L^1(G)$: $\tilde{\rho}(f) \stackrel{def}{=} \int_G \rho(g) f(g)\, d\mu_G$, $\tilde{\rho}$ je repr. asoc. alg $L^1(G)$. Pokud $\dim V < +\infty$ $\rightsquigarrow$ $\int_G$ po složkách

Pokud V jen Banachův $\rightsquigarrow$ $\int_G$ tzv. Bochnerův integrál.

!! Pozn.: $m \in \Delta A^1(G)$ $\quad m(f) \in \mathbb{C}$ $\forall f \in L^1(G)$; $\chi \in \hat{G}$ (unit) 1dim. v.p.

$\chi : G \to U(1)$ $\rightsquigarrow$ $\tilde{\chi} : L^1(G) \to End(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$

$$\tilde{\chi}(f * g) = \int_h \chi(h) (f * g)(h)\, d\mu_G(h) = \int_h \chi(h) \int_l f(hl^{-1}) g(l)\, d\mu_G(l)\, d\mu_G(h)$$

▽ **Příklad**: $(L^1(G), *, {}^*, \|\cdot\|_1)$ je Banachova $*$-algebra, kde ($*$ … konvoluce)

$f^*(g) := \Delta_G^{-1}(g)\overline{f(g^{-1})}$ $\forall g \in G$ a $\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu_G$, pokud

G je lok. komp. grupa. (μ_G levá H.m.)

Dk.: 1. Banachova $\|ab\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$ bylo.

2. ${}^* : L^1(G) \circlearrowleft$

a) involutivnost: $f^{**}(g) = (f^*)^*(g) = \Delta_G^{-1}(g)\overline{f^*(g^{-1})} = \Delta_G^{-1}(g)\,\overline{\Delta_G^{-1}(g^{-1})}\,\overline{\overline{f(g)}} =$

$= \Delta_G^{-1}(g)\Delta_G(g)f(g) = f(g)$

Δ_G je homom. a do $\mathbb{R}$ … Δ_G homom.

b) anti(auto)homomorfizmus: $f, h \in L^1(G)$

(•) $(f * h)^*(g) := \left(\int f(y)h(y^{-1}g)\,d\mu_G(y)\right)^* =$

$= \Delta_G(g^{-1})\overline{\int f(y)h(y^{-1}g^{-1})\,d\mu_G(y)}$.

(••) $(h^* * f^*)(g) = \int h^*(y) f^*(y^{-1}g)\,d\mu_G(y) =$

$= \int \Delta_G(y^{-1})\overline{h(y^{-1})}\,\overline{f(g^{-1}y)}\,\Delta_G(g^{-1}y)\,d\mu_G(y) =$

$= \Delta_G(g^{-1}) \int \overline{h(y^{-1})}\,\overline{f(g^{-1}y)}\,d\mu_G(y) \quad \left| \begin{array}{l} z = g^{-1}y \\ gz = y \\ y^{-1} = z^{-1}g^{-1} \end{array} \right|$

$= \Delta_G(g^{-1}) \int \overline{h(z^{-1}g^{-1}) f(z)\,d\mu_G(z)}$, tj. (•)

3. * je izometrie $L^1(G)$. Složité!

Vede však na vlastnosti pravých posunů

pro levou H.m. Užitečné.

→ Proto dokážeme lemma o chování $\int$ vůči levé H.m. z pravě „translaovaných" fcí.

∇ **Lemma:** 1. $\int (R_y f)(x)\, d\mu_G(x) = \Delta(y^{-1}) \int f(x)\, d\mu_G(x)$

2. $\int f(x^{-1})\, \Delta(x^{-1})\, d\mu_G(x) = \int f(x)\, d\mu_G(x)$

Dk.: $(R_y f)(x) = f(R_y^{-1} x)$ $\quad R_y x = x y^{-1}$

$= f(xy)$ [v souladu s našimi definicemi]

borelovská

1. a) $f = \chi_U$, $U \subset \Sigma$, & $\mu(U) > 0$

$\int_G \chi_U(xy)\, d\mu_G(x) = \int_G \chi_{Uy^{-1}}(x)\, d\mu_G(x) =$

$=1 \Leftrightarrow xy \in U$

$\Leftrightarrow x \in U y^{-1}$

(dříve značeno $\mu_{y^{-1}}, \mu^G_{y^{-1}} \ldots$)

$= \mu_G(U y^{-1}) = \mu_G^{y^{-1}}(U) = \Delta(y^{-1})\, \mu_G(U) =$

$= \Delta(y^{-1}) \int_G \chi_U(x)\, d\mu_G(x)$

b) $\int f\, d\mu_G \overset{\text{def} \int}{=} \lim_i \int s_i\, d\mu_G$, $\quad s_i = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{U_j}$, $c_j \in \mathbb{C}$ ...

a dále bod a)

2. Δ spojitý (dle Chiffre), μ_G levá H.m.

Δ homom. (proč? zopakujte si)

$\tilde{\Delta}(x) := \Delta(x^{-1}) = \Delta(x)^{-1}$

bod 1

a) $\int R_y (f \tilde{\Delta})\, d\mu_G = \Delta(y^{-1}) \int f \tilde{\Delta}\, d\mu_G$

Pozn.: $\tilde{\Delta}$ je homomorfizmus (kom. $\mathbb{R}$)

b) $\int (R_y f)(x)\, \tilde{\Delta}(x)\, d\mu_G(x) \overset{\text{(hom.)}}{=} \int (R_y f)(x)\, \tilde{\Delta}(xy)\, \tilde{\Delta}(y^{-1})\, d\mu_G(x)$

$= \tilde{\Delta}(y^{-1}) \int (R_y f)(x)\, \tilde{\Delta}(xy)\, d\mu_G(x) = \tilde{\Delta}(y^{-1}) \cdot$

$\cdot \int R_y (f \tilde{\Delta})\, d\mu_G(x) \overset{(2a)}{=} \tilde{\Delta}(y^{-1})\, \Delta(y^{-1}) \int f \tilde{\Delta}\, d\mu_G$

$g > 0$ $\quad (g \cdot \mu)(U) := \int \chi_U\, g\, d\mu$

$\overset{\Delta\ \text{homom.}}{=} \int f \tilde{\Delta}\, d\mu_G.$

Celkem $\int (R_y f)(\tilde{\Delta}\, d\mu_G) = \int f (\tilde{\Delta}\, d\mu_G) \Rightarrow$

Tedy $I : f \mapsto \int f \tilde{\Delta}\, d\mu_G$ je pravoinv. fcionál $\Rightarrow \tilde{\Delta} \mu_G$ je pravoinv. míra (neboť (žádný Riesz):

$(\tilde{\Delta}\mu_G)(U\cdot y) = \int_G \chi_{U\cdot y}(x)\,\tilde{\Delta}(x)\,d\mu_G(x) = \int_G \chi_U(xy^{-1})\,\tilde{\Delta}(x)\,d\mu_G(x) =$ ④

def. char. fce, $\int$ a násobení míry fcí

$\chi_{U\cdot y}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in U\cdot y \Leftrightarrow xy^{-1} \in U$

$= \int_G \chi_U(x)\,\tilde{\Delta}(x)\,d\mu_G(x) = \tilde{\Delta}\mu_G(U) \Rightarrow \tilde{\Delta}\mu_G$ je pravoinv.

c) $\mu_G^{-1}(U) := \mu_G(U^{-1})$, $U \in \Sigma$, $\mu_G(U) > 0$ [libovolně $\frac{1}{\mu_G(U)}$!]

$\mu_G^{-1}(U\cdot y) = \mu_G(y^{-1}U^{-1}) \overset{\text{levoinv } \mu_G}{=} \mu_G(U^{-1}) = \mu_G^{-1}(U) \Rightarrow \exists! c$

$\Rightarrow \mu_G^{-1}$ je pravoinvariantní $\Rightarrow \boxed{\tilde{\Delta}\cdot\mu_G = c\,\mu_G^{-1}}$

jedn. Haarovy míry (pravé) (Riesz)

d) $c = 1$? $\varepsilon > 0$, $h \in C_c^+(G)$, $\exists V$ sym.

$\exists h$, že $\forall x \in V$: $h(x) = h(x^{-1})$, $\operatorname{supp} h \subseteq V$.

(sym. fce) [h předpokládáme co do $\exists$; jinak Tietze … viz de Cliffre]

z def μ_G^{-1} (+ def $\int$ na χ, schod., lim.)

Δ_G spojité: $|\Delta_G(x) - 1| < \varepsilon$. Víme: $\int h(x)\,d\mu_G^{-1} = \int h(x^{-1})\,d\mu_G$

$\overset{h}{=} \int h(x)\,d\mu_G$. Píšeme: $|(c-1)\int h(x)\,d\mu_G^{-1}| =$ (nenulový počet)

$= \left| c\int h(x)\,d\mu_G^{-1}(x) - \int h(x)\,d\mu_G^{-1}(x) \right| =$ ← dle víme

$\overset{\text{def } c}{=} \left| \int h(x)\,\tilde{\Delta}(x)\,d\mu_G - \int h(x)\,d\mu_G \right| =$

$\leq \left| \varepsilon \int h(x)\,d\mu_G \right| \longrightarrow 0 \Rightarrow c = 1.$!

•• Tj. $\boxed{\int f(x)\,\Delta_G(x^{-1})\,d\mu_G(x) = \int f(x^{-1})\,d\mu_G(x)} = \int f(x)\,d\mu_G^{-1}(x)$

triv.

Nyní izometričnost:

$k(g) := f(g^{-1})$ $\quad \int_G \overline{f(g^{-1})}\,\Delta_G(g^{-1})\,d\mu_G(g) \overset{?}{=} \int_G \overline{f(g)}\,d\mu_G(g)$,

Pro (••) zvol $f(x) \longmapsto \overline{f(x^{-1})}$: $\int \overline{f(x^{-1})}\,\Delta_G(x^{-1})\,d\mu_G(x)$ □

$= \int f(x)\,d\mu_G(x)$; dále abs. hodnoty (L^1!!)

Tvrzení: G komutativní l.k. $\Rightarrow L^1(G)$ komutativní. (5)

Dk.: $(f*g)(y) = \int_G f(x)\, g(x^{-1}y)\, d\mu_G(x) = \int_G g(x^{-1}y)\, f(x)\, d\mu_G(x)$.

(μ levá H.m.)

$(g*f)(y) = \int g(x)\, f(x^{-1}y)\, d\mu_G(x) = \left| z = x^{-1} \right|$;

Lemma (2.) „zprava dolenа" $\overset{*}{=} \int g(z^{-1})\, f(zy)\, \Delta(z^{-1})\, d\mu_G(z) = \left| \begin{array}{l} z^{-1} = x^{-1}y \\ y = xz^{-1} \\ zy = yz = x \end{array} \right| = \int g(x^{-1}y)\, f(x)\, \Delta(x^{-1})\, \Delta(y)\, d\mu_G(x)$ *)

KOMUT.!

$= \int g(x^{-1}y)\, f(x)\, 1 \cdot 1\, d\mu_G(x)$ ← kom. ⇒ unimodularita

[**Pozn.:** Na přednášce jsme trochu odbyli mod. faktory ve formulích výše s tím, že jsou ≡ 1. Avšak více jsme diskutovali nemožnost užití G-N-věty při důkazu Pontrjaginovy duality. (Pro zákl. porozumění této souvislosti netřeba.)]

Nebyla se před. 2022/23

Pozn.: $C^*(G)$ (obalující k $L^1(G)$) $\xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_0(\Delta_{L^1(G)})$, pokud G komutativní. (Netřeba)

Nebyla se 22/23:

[**Zatím:** $G_1 := \{ \chi : G \to U(1) \mid \chi \text{ spojitý} \} / \cong$

Víme G_1 je top. grupa $(d(\chi, \eta) = \cdots)$ spc. Hausdorffův.

Chyběli bychom G_1 lok. kompaktní (vynecháno, viz Deitmar–Echterhoff). Náznak $G_1 \approx C^*(G) \xrightarrow{\sim} C_0(\Delta_{L^1(G)})$, ale co to je $\approx$ (Potom zde G komut.)

lok. komp. Stru na $\hat{G}_1$ unit. ještě „probereme".]

*) V důležitu se Snažme pp. komutativity použít, co nejpozději: Můžete však průběžně dosazovat $\Delta = 1$ či komutovat xy ...

(5)

Lemma: A kom. C^*-alg. Pak $\forall m \in \Delta_A$ $\forall a \in A$

$$m(a^*) = \overline{m(a)}$$

Dk.: Pp. $A \ni 1$. $a = Re(a) + i\,Im(a)$, $Re(a) = \frac{1}{2}(a+a^*)$

$Im(a) = \frac{1}{2i}(a-a^*)$. Re & Im symetrické.

Stačí $a = a^*$ (symetrické a). Ukážeme, že $m(a) \in \mathbb{R}$. $m(a) =: x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$! $a_t := a + it$, $t \in \mathbb{R}$! $\Rightarrow$

$m(a_t) = x + i(y+t) \Rightarrow |m(a_t)|^2_{\mathbb{C}} = |x+i(y+t)|^2_{\mathbb{C}} = x^2 + (y+t)^2$. Avšak

$\|m\| \leq 1$ (viz dříve), „hodnoty stavů", a tak $|m(a_t)|^2_{\mathbb{C}} \leq \|a_t a_t^*\| =$

$$= \|a^2 + t^2\| \leq \|a\|^2 + t^2 \overset{C^*\text{id} + a=a^*}{=} \|a\|^2 + t^2$$

Celkem: $x^2 + y^2 + 2yt \leq \|a\|^2$ $\forall t \Rightarrow y = 0$. $\square$

Pozn.: 1. Prvkům $a = a^*$ se říká symetrické (nebo samoadjungované, nebo hermitovsky symetrické. Posledním způsobem, pokud se chce zdůraznit to, že $a \in A$ a A je algebra nad $\mathbb{C}$).

2. $a^*a = 1 \Rightarrow a^* = a^{-1} \Rightarrow aa^* = 1$ slují unitární.

3. $aa^* = a^*a$ normální.

4. Reformulace lemmatu: $\widehat{a^*}(m) = \overline{\hat{a}(m)} = \overline{\hat{a}}(m)$, tj. $\widehat{a^*} = \overline{\hat{a}}$ (popř. $\hat{a}^*$, kde * je $^-$)

$$\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$$

!! Věta (Gelfand–Naimark): A komutativní C^*-algebra.

Pak Gelfandovo zobrazení $a \in A \mapsto \hat{a} \in \mathcal{C}(\Delta_A)$ je

izometrický $*$-izomorfizmus $\boxed{A \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_0(\Delta_A)}$

$\boxed{\|\hat{a}\|_{\mathcal{C}_0(\Delta_A)} = \|a\|_A}$ & $\boxed{\widehat{a^*} = \overline{\hat{a}}}$.

Navíc Δ_A je kpt. iff A je unitální. Pak $A \cong \mathcal{C}(\Delta_A)$.

Dk.: Použijeme Stone–Weierstrassovu větu:

"X lok. kompaktní Hausdorffův prostor, $A \subseteq \mathcal{C}_0(X)$ podalgebra, že

1. $\forall x \neq y \in X \ \exists f \in A \ \ f(x) \neq f(y)$ (A separuje)
2. $\forall x \in X \ \exists f \ \ f(x) \neq 0$
3. A je uzavřená na komplexní konjugaci.

Pak A je hustá v $C_0(X)$."

$\tilde{A} := \{\hat{a},\ a \in A\} \subseteq \mathcal{C}_0(\Delta_A)$, Δ_A lok. komp. Hausd.

(víme z věty o Gelf. zobr.).

• Buď $b = b^*$. Pak dle věty o spektr. poloměru

(zajímavé per se au sich osobě) !

$$r(b) = \lim_n \|b^n\|_A^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|b^{2^n}\|_A^{\frac{1}{2^n}} \overset{\text{symetrie } b}{=} \lim_n \|(b^*b)^n\|_A^{\frac{1}{2^n}} \overset{C^*\text{-id.}}{=} \lim_n \left(\|b\|_A^{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n}} = \|b\|_A.$$

•• věta o Gelf. zobr.

$$\|\hat{a}\|^2_{\mathcal{C}_0(\Delta_A)} \overset{C^*\text{-identita v } \mathcal{C}_0(\Delta_A)}{=} \|\hat{\bar{a}}\, \hat{a}\|_{\mathcal{C}_0(\Delta_A)} \overset{\text{Bod 4 předch. poznámky}}{=} \|\widehat{a^*}\,\hat{a}\|_{\mathcal{C}_0(\Delta_A)} = \|\widehat{a^* a}\|_{\mathcal{C}_0(\Delta_A)} =$$

G. zobr. je homom. (věta o G. zobr.)

$$\overset{a^*a \text{ je sym.}}{=} r(a^*a) = \|a^*a\|_A \overset{C^*\text{-id.}}{=} \|a\|_A^2$$

Banachovy algebry

Gelfandovo zobrazení je izometrie.

Izometrie s hustým obrazem je na. Stačí tedy ověřit podm. S-W-věty.

ad 1. $\hat{a}(m_1) = \hat{a}(m_2)\ \forall a \in A \Leftrightarrow m_1(a) = m_2(a) \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

ad 2. $\forall m \in \Delta_A \Rightarrow m \neq 0 \Rightarrow \exists a \in A\ \ m(a) = \hat{a}(m) \neq 0$.

ad 3. $\hat{a}^* \in \mathcal{C}_0(\Delta_A) : \hat{a}^*(m) = \overline{\hat{a}(m)} = \widehat{a^*}(m) \Rightarrow \boxed{}$

$[a \in A \Rightarrow \hat{a} \in \mathcal{C}_0(\Delta_A)]$ $\quad | \Rightarrow a^*(m) \in \mathrm{Im}\,\hat{}$.

Pozn.: Možná úvaha. Obraz izometrie úplného TVS je úplný ⇒ uzavřený. Uzavřený a hustý = celý (std.).

Pozn.: 1. Zjistili jsme důl. netu, a sice $r(a) = \|a\|_A$ v případě C*-algebry. (Pakud a lib. pak to platí také.)

Pozn.: 1. $\|a\|^2 \leq \|aa^*\| \wedge$ normovaná *-algebra (např. *-Ban.): $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$, tj. C^* alg. $\|aa^*\| \leq \|a\|\|a^*\| = \|a\|^2$

2. $\|a\|\|a\| \underset{C^*\text{-ner.}}{\leq} \|aa^*\| \underset{\text{Banach}}{\leq} \|a\|\|a^*\| \Rightarrow \|a\| \leq \|a^*\|$

Banachova-*. „symetrizace": $\|a^*\| \leq \|a\|$

3. $(A, *, \|\ \|)$ $\left.\begin{array}{l} *\text{-involuce} \\ \|aa^*\| \geq \|a\|^2 \\ \text{normovaná Banachova} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Banach $* \Rightarrow C^*$-alg.

! Do násl. kap. (Pontr. dualita): $d : \hat{G}_1^{\text{unit}} \to \Delta_{L^1(G)}$

G lok. group. $d : \chi \mapsto d_\chi$

$d_\chi \in \Delta_{L^1(G)}$, $d_\chi : L^1(G) \to \mathbb{C}$; $d_\chi(f) = := (\mathcal{F}f)(\chi)$. Injektivita $d \Rightarrow \hat{G}_1^{\text{unit}} \subseteq \Delta_{L^1(G)}$.

Definice: $\delta : G \to \hat{\hat{G}}$ $\quad \delta(g)\chi = \chi(g)\ \forall g \in G\ \forall \chi \in \hat{G}$ se nazývá Pontrjaginovo zobrazení. (Zde stačí G je topol.)

Pozn.: $\delta(g) \in \hat{\hat{G}} \Rightarrow \delta(g) : \hat{G} \to U(1) \Rightarrow \delta(g)\chi \in U(1)$ $\forall \chi \in \hat{G}$ nutně. Víme $\hat{\hat{G}}$ je top. grupa.

ZDE: $\hat{\hat{G}} = G$ unit. 1-dim !!!

Věta (Pontrjagin): G lok. komp. kom. grupa. Pak δ je izomorfizmus top. grup.

Dk.: 1. $\delta(g)$ je homomorfizmus $\forall g \in G$.

$\delta(g)(\chi\mu) = \chi\mu(g) = \chi(g)\mu(g) = \delta(g)\chi \cdot \delta(g)\mu$

$\forall \chi, \mu \in \hat{G}$ (Na $\hat{G}$ násobím bodově z definice.)

2. δ je homom.: $\delta(gh)(\chi) = \chi(gh) = \chi(g)\chi(h)$

$= \delta(g)\chi\, \delta(h)\chi = [\delta(g) \circ \delta(g)](\chi)$

Opět: v $\hat{\hat{G}}$ skládáme grupově tím, že násobíme bodově (def.) $\to$ spojitost $\delta(g)$ jako repr.

3. Spojitost: $\chi_i \to \chi$ $\quad \lim \delta(g)(\chi_i) =$

$= \lim_i [\chi_i(g)] \overset{\text{spoj } \chi_i \text{ jako repr.}}{=} (\lim_i \chi_i)(g) = \chi(g) = \delta(g)\chi$

(„máme" bodovou konvergenci). [Ne spoj. δ!] ϕ

Celkem 1–3: $\delta(g) \in \hat{\hat{G}}$.

4. Injektivita ϕ, 5. surj. ϕ, 6. spojitost inv. ϕ síťe Diraka $\square$

(Fourierjeruj.)

Věta („Plancherel"): G lok. komp. komut. Pak $\exists!$ levoinvariantní míra $\hat{\mu}_G$ na $\hat{G}$ (lok. komp .... víme), že

$L^2(G) \simeq L^2(\hat{G})$ jako Hilb. prostory (tj. izometrie). Dk. ϕ $\square$ (Deitm. Echt.)

Pozn.: Pontrjagin. dualitu víme v případě
$\mathbb{Z}$, S^1, $\mathbb{R}^n$; $\hat{\mathbb{Z}} \cong S^1$, $\hat{\hat{\mathbb{Z}}} \cong \hat{S^1} \cong \mathbb{Z}$; $\hat{\hat{S^1}} \cong \hat{\mathbb{Z}} \cong S^1$;
$\hat{\hat{\mathbb{R}^n}} \cong \hat{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n$.

Zajímavost: G diskr. $\Rightarrow$ $\hat{G}$ kompakt.
G kompakt $\Rightarrow$ $\hat{G}$ diskrétní.

Další „zajímavost": $e \in L^1(G) \Rightarrow G$ diskrétní.
($e \notin L^1(G) \Rightarrow$ můžu ale unitalizovat).

Poissonova sumační formule

102

1. Neformálně (TOTO ZNÁT)

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(x+\ell)$ Pp. konverguje absolutně.

Je $g(x+1) = g(x) \Rightarrow g$ je 1-periodická.

F. řada g (= F. transf. g na S^1 $\int_0^1$, viz def. F. t. na l.k.g. a úvahy několik hodin dříve):

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i kx}, \quad c_k \text{ jako dříve } (\text{v } L^2(S^1), \text{ bodově viz níže})$$ předpoklad

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(\ell) = g(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 g(y) e^{-2\pi i k y} dy$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(y+\ell) e^{-2\pi i k y} dy \overset{\text{„stejn. konv." (?)}}{=}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(y+\ell) e^{-2\pi i k y} dy = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i k y} dy$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k).$$ Pp. stejn. konv.

Celkem $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(\ell) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$. Poissonova sumační formule.

2. Formálně.

Věta: $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$, f po částech C^1 s výjimkou konečně mnoha bodů C^1. $\varphi(x) := \begin{cases} f'(x) & \exists f'(x) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Nechť $x^2 f$ a $x^2 \varphi$ jsou omezené. Pak

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k).$$

Dk.: $\emptyset$. Postupuji ale skoro stejně jako v neformální části. $\square$ (41)

3. Grupové verze Poissonovy sumační formule (NETŘEBA ALE ZAJÍMAVÉ)

A l.-k., $B \subseteq A$ uzavřená v A podgr. (A/B je l.-k.!) s kvoc. top.

$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\widehat{A/B}$ ... Souvislosti = ?

Def: $\forall E \subseteq A$, $E^\perp := \{\chi \in \hat{A} \mid \chi(e) = 1 \ \forall e \in E\}$

$\forall L \subseteq \hat{A}$, $L^\perp := \{a \in A \mid \ell(a) = 1 \ \forall \ell \in L\}$

stejní anihilátory.

Lemma: $\{1\} \to B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/B \to \{1\}$ KEP (v kat. top. grup) [i, p spoj. homom., i inj., p surj., $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} p \equiv$ def. KEP v dané kat.] $\Rightarrow$

$$1 \to \widehat{A/B} \to \hat{A} \to \hat{B} \to 1 \text{ je KEP.}$$

Dk.: $\emptyset$, $\hat{i}(\chi) = \chi \circ i$. $\square$

Věta o Poissonově sumaci: $B \subseteq A$ uz. podgrupa l.-k. komutativní grupy A. $\forall f \in L^1(A)$, $f^B \in L^1(A/B)$

$$f^B(xB) := \int_{b \in B} f(xb)\, d\mu_B(b).$$

[Dle předch. lemmatu $\widehat{A/B} \cong B^\perp$]. Pak $\widehat{f^B} = \hat{f}|_{B^\perp} \wedge \in L^1(B^\perp)$

$$\wedge \int_B f(xb)\, d\mu_B(b) = \int_{\chi \in B^\perp} \hat{f}(\chi)\, \chi(x)\, d\mu_{B^\perp}(\chi) \ \forall \text{ s.v. } x.$$

Dk. vynechán $\square$ (viz Deitm.-Echt.)

Př.: Věta o Poissonově sumaci pro $A = (\mathbb{R}, +)$, $A \simeq \hat{A} \cong \mathbb{R}$ (víme), $B := \mathbb{Z}$, $\hat{B} = \hat{\mathbb{Z}} = S^1$; $x = 0$

$$\int_{\mathbb{Z}} f(b)\, \underbrace{d\mu_{\mathbb{Z}}} = \sum_{b \in \mathbb{Z}} f(b) \to \text{míra je diskrétní.}$$

$\widehat{A/B} = \widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{topol}}}{=} \widehat{S^1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{víme}}}{=} \mathbb{Z}$ $\quad (+B^\perp \simeq \widehat{A/B})$

$$\int_{\chi \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\chi)\, \underset{\substack{\| \\ e^{2\pi i x y}}}{\chi(x)}\, d\mu_{\mathbb{Z}} = \sum_{\chi} \hat{f}(\chi).$$

To je Poissonova sumační formule (klasická).

dosaď $x = 0$

- Aplikace Poissonovy sumační formule („těžká" modularita Θ-funkce). TOTO ZNÁT PO ---
  [tím myslím chování vůči $SL(2,\mathbb{Z})$ ani —

Definice: $\Theta(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t k^2}$, $t > 0$ slyí Θ-funkce. (theta funkce)

Pozn.: Konvergence Θ-fce $\forall t \in \mathbb{R}^+$

Nechť $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{e^{-\pi t (k+1)^2}}{e^{-\pi t k^2}} = e^{-\pi t (2k+1)} \overset{?}{<} \overbrace{-\pi t}^{<0}$ ~~q < 1 ano~~
$[-\pi t(2k+1) < 0]$

Komutace $\mathcal{F}$ na $\mathbb{R}^n$ s různými transf. $\mathbb{R}^n$ a der.

Pozorování: • $\mathcal{F} \circ T_a = e^{\pm 2\pi i a \xi} \mathcal{F}$, • $\mathcal{F} \circ M_a = \cdots$ $\quad (M_a f)(x) = a f(x)$

• $\mathcal{F} \circ D^\alpha = (\pm 2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}$, • $T_a f(x) := f\, T_a^{-1}(x) = f(x-a)$

$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

• Nás zajímá chování $\mathcal{F}$ $(G = \mathbb{R}^n)$ a $\delta_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a > 0$, $\tilde{\delta}_a x = a x$, $(\tilde{\delta}_a f)(x) = f(a^{-1} x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, tzv. dilatace.

Lemma: $\mathcal{F} \circ \tilde{\delta}_a = a^n \tilde{\delta}_{\frac{1}{a}} \circ \mathcal{F}$, $\forall a > 0$ (nejtěžší vlastnost, co do jejího zmiňování).

Dk.: $[(\mathcal{F}\circ\tilde{\delta}_a)f](\xi) = [\mathcal{F} f(a^{-1}-)](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(a^{-1}\cancel{x})e^{-2\pi i x\xi}d$

$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\left|\begin{matrix} y=a^{-1}x \\ dy=a^{-n}dx\end{matrix}\right| = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi i y a\xi}\, a^n\, dy =$$

$$= a^n \int f(y) e^{-2\pi i \overrightarrow{ay,}\xi} dy = a^n \hat{f}(a\xi) =$$

$$= a^n \tilde{\delta}_{\frac{1}{a}}\hat{f}(\xi) \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\circ\delta_a = a^n\tilde{\delta}_{\frac{1}{a}}\circ\mathcal{F}} \qquad \square$$

Věta: $\Theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\,\Theta(t)\ \forall t>0.$ $\quad f_1(x) = e^{-\pi x^2}$

Dk.: a) $f_t(x) := e^{-\pi t x^2} \overset{\text{def } \tilde{\delta}}{\Rightarrow} f_t = \tilde{\delta}_{\frac{1}{\sqrt{t}}} f_1 \;\Big|\; \underline{\mathcal{F}f_t} = \mathcal{F}\tilde{\delta}_{\frac{1}{\sqrt{t}}} f_1 =$

$\overset{\text{Lemma}}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{+1}\tilde{\delta}_{\sqrt{t}}\,\mathcal{F}(f_1) = \frac{1}{\sqrt{t}}\tilde{\delta}_{\sqrt{t}} f_1 = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2} = \underline{\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi\frac{1}{t}x^2}}.$

b) Poisson. fmle: $\sum_k \mathcal{F}f_t(k) \overset{\text{1. cvič.}}{=} \sum_k f_t(k) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_k e^{-\frac{\pi k^2}{t}} = \sum_k e^{-\pi k^2 t} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{t}}\Theta\left(\frac{1}{t}\right) = \Theta(t)}. \qquad \square$$

Pozn.: Modularita. $\rho: SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow Bij(\mathbb{H})$, kde $\mathbb{H} := \{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im} z>0\}$ $\rho(g)z := \frac{az+b}{cz+d}$ $\forall g = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})$. ? Je do, tj. $z\in\mathbb{H} \Rightarrow \rho(g)\in\mathbb{H}$?

Je dobrá def.?

$\tilde{\rho}: SL(2,\mathbb{R}) \to Aut(\mathcal{H}ol(\mathbb{H}))$, $\mathcal{H}ol(\mathbb{H}) = \{f: \mathbb{H}\to\mathbb{C} \mid f$ je holom.$\}$ /Nikolay Merom.

$[\tilde{\rho}(g)f](x) := f(g^{-1}x)$ $\forall g\in SL(2,\mathbb{R})$.

$\tilde{\Theta}(z) = \sum e^{-\pi z i k^2}$, $\operatorname{Im} z>0$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Př.: $\tilde{\Theta}(z) := \sum_k e^{\pi i k^2 z}$, $z \in \mathbb{H}$, $z = it$ dřívější Θ.

(Σ) konvergence je lokálně stejnoměrná (v z).

Všimněte si $\tilde{\Theta}(z) = \tilde{\Theta}(z+2) \Rightarrow \tilde{\Theta}$ je 2-periodická

- $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$; $\bar{\Theta}(z) := \sum_k e^{2\pi i k^2 z}$

$$(g \cdot \bar{\Theta})(z) = \bar{\Theta}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z\right) = \bar{\Theta}\left(\frac{z-1}{0z+1}\right) = \sum e^{2\pi i k^2 (z-1)}$$

$$= \sum e^{2\pi i k^2 z} = \bar{\Theta}(z)$$

- $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$; $(g . \bar{\Theta})(z) = \bar{\Theta}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z\right] =$

$$= \bar{\Theta}\left(\frac{-1}{z}\right) = \sqrt{zi}\,\bar{\Theta}(z)$$

$2 \leftarrow$ nedosazoval jsem, zkuste

V každém případě je vidět, že Θ není přímo invariantní. V teorii čísel (Mordell, Hecke, Petersson) se zavádí tzv. mod. repr. řádu $\underline{k}$ od 20.–40. let min. st.

$$(g \cdot f)(z) = |cz+d|^{-k} f(g^{-1}z).$$

Takto se ukáže invariance Θ-fce vůči modulární repr. přísl. řádu. (Viz Bump: Automorphic Forms and Repr. nebo Krieg, Koecher: Elliptische Fktionen und Modulformen nebo Apostolov nebo Zagier: "ABC"... atd.)

Pozn.: Ad p-adická čísla. Pro $\mathbb{Q}_p$ se definují celá p-adická čísla

konfúze s klas. značením $\{0, \dots, p-1\}$ $\rightarrow$ $\mathbb{Z}_p := \{ a \in \mathbb{Q}_p \mid |a|_p < 1 \}$.

Dále se ukáže, že p-adická čísla mají „p-adickou reprezentaci", tj.: $a \in \mathbb{Q}_p$ $\quad a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n p^{-n}$, $a_n \in \{0, \dots, p-1\}$.

Pak se konstruuje Haarova míra: $\dfrac{dx}{|x|_p}$

[Pak okruh adél (lok. konečné součiny).]