

## Hlubší vlastnosti funkcí

### Lokální a globální extrémy funkcí

Nalezněte lokální extrémy funkcí

1.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4, x \in \mathbb{R}$

2.  $f(x) = e^x \sin x, x \in \mathbb{R}$

3.  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}, x \in \mathbb{R}$

Dokažte následující nerovnosti

4.  $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, x, y > 0, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (Youngova nerovnost)

5.  $e^x > x + 1, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

6. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

má v bodě 0 ostré lokální minimum a funkce

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

nemá v bodě 0 lokální extrém, přestože platí  $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \dots$

7. Nalezněte globální extrémy funkce  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  na intervalu  $[-3, 10]$ .

8. Nalezněte supremum a infimum funkce  $f(x) = xe^{-0.01x}$  na intervalu  $(0, \infty)$ .

9. Nádobu naplněnou vodou se svislou stěnou výšky  $h$  stojí na vodorovné rovině. Vypočítejte výšku otvoru nádoby nad vodorovnou rovinou tak, aby voda stříkala co nejdále.

10. Mezi dvěma svislými tyčemi, jejichž vzdálenost je  $d$ , je upevněna za konce niť délky  $l$ . Rozdíl výšek upevnění je  $h$ . Po niti může volně klouzat hmotný bod. Najděte rovnovážnou polohu bodu za podmínky, že potenciální energie má být minimální.

### Monotónie funkcí

11. Nalezněte intervaly, na kterých je funkce  $f(x) = x^n e^{-x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , rostoucí a klesající.
12. Pro atomové teplo prvku platí

$$C_v = 3R \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2},$$

kde  $x = \frac{T^*}{T}$ ,  $T$  je absolutní teplota v kelvinech,  $T^*$  je tzv. charakteristická teplota a  $R$  je plynová konstanta. Dokažte, že atomové teplo prvku je rostoucí funkce teploty.

### Konvexita, konkávnost

Nalezněte intervaly, kde je funkce konvexní/konkávni, a najděte inflexní body

13.  $f(x) = e^{-x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$
14.  $f(x) = x \sin \ln x$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$
15. Dokažte nerovnost  $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ ,  $x, y > 0$ ,  $x \neq y$ ,  $n > 1$  a vysvětlete její geometrický význam.