

Implicitní funkce

• funkce zadání rovnicemi

$P_2: x^2 + y^2 - a^2 = 0$

$(y(x)): y = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \quad x \in (-a, a)$

$y: x \mapsto y(x)$ je tzv. implicitní funkce a

$x^2 + y^2 - a^2 = 0$ je zadání rovnic

rovnice $\leadsto$ funkce $F(x, y) = x^2 + y^2 - a^2, a \geq 0$

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

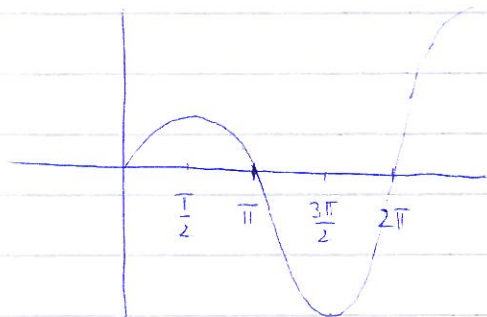
• $xy - \sin y = 1$

$x(y) = \frac{1 + \sin y}{y}, y \neq 0$

$y(x) = ?$ nepojďme

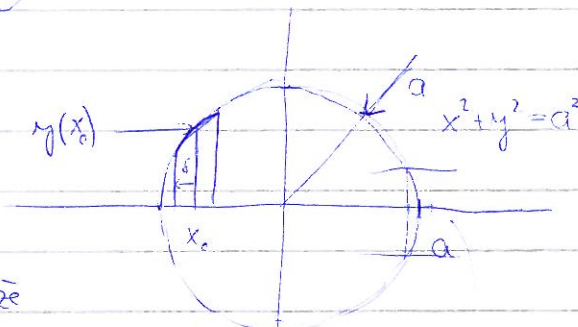
• $y + \sin y = 1 - x$

Nechť $g(y)$ je inverzní k $y + \sin y \rightarrow y = g(1 - x)$



Zde existuje inv. fce g na $(0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$

• Zpět ke kružnici



Pro x_0 (zobr.) $\exists \Delta > 0 \exists \delta > 0$ že

$\forall x \in U_\delta(x_0) \exists ! y(x) \in (y(x_0) - \Delta, y(x_0) + \Delta)$, že

$F(x, y(x)) = 0$, tj. zde $x^2 + y^2(x) = a^2 \rightarrow y(x_0) = \sqrt{a^2 - x_0^2}$

Pro a na ose x tuto úvahu nelze provést $\rightarrow$ nemá to graf funkce (pro $\forall x$ neexistují $! y$)

Věta 4.50

Nechť $F: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}, F(x^1, \dots, x^m, y) \mapsto F(x^1, \dots, x^m, y)$ Nechť

1) $x_0 \in \mathbb{R}^m, y_0 \in \mathbb{R} \quad F(x_0, y_0) = 0$

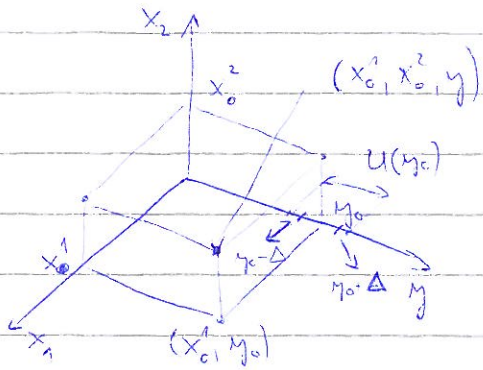
2) F je spojitá na $U_\bullet(x_0) \times U_\bullet(y_0)$

3) $\forall x = (x^1, \dots, x^m) \in U_\bullet(x_0)$ je $F(x, -): y \mapsto F(x, y)$ ryze monotonní

Potom $\exists \delta > 0, \exists \Delta > 0$

$$\forall x \in U_\delta(x) \exists \underset{\text{rule}}{y(x)} \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta) \text{ so } F(x, y(x)) = 0$$
$$\exists \gamma: x_1 \rightarrow \gamma(x), U_\Delta(x_0) \rightarrow U_\Delta(\gamma_0), \text{ spatial}$$

Dk: J BUŇO: F je rostoucí v y Δ bud', že $y_0 \pm \Delta \in U(y_0) \subseteq \mathbb{R}$ (j to j m 1 bod!)



$$F \Rightarrow z = F(x^1, x^2, y)$$

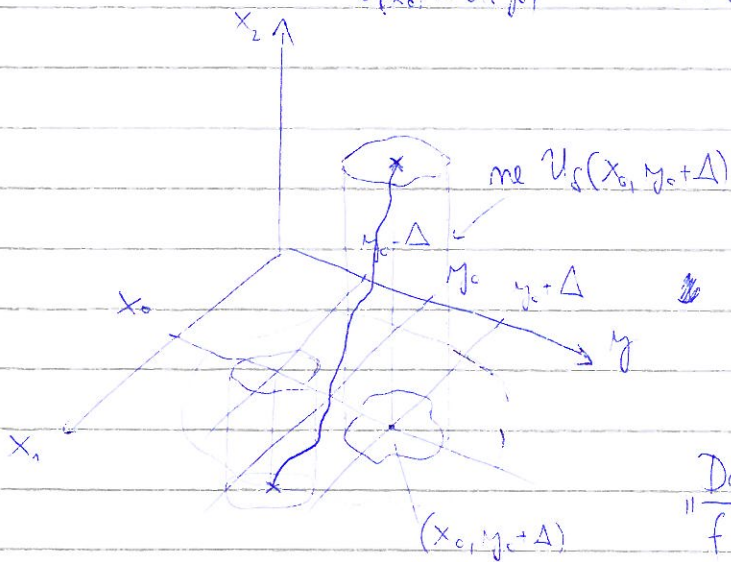
Préciser: $\Delta_n = \sup U(y_n) - y_n$

$$\Delta_2 = y_c - (\inf U(y_c))$$

$$\Delta := \min \{ \Delta_1, \Delta_2 \} \text{ konstruieren}$$

F je ryze monotonní v proměnné y , tj. $F(x_0, y_0 - \Delta) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + \Delta)$
(přesně!)

$$\text{Ze spjjetash } F(\bar{x}, -) : \cancel{U(y_0)} \rightarrow \mathbb{R} \text{ je } F(x, y) < 0 \wedge F(x, y) > 0$$

$$U(x_0) \times U(y_0) \quad \text{no } U(x_0, y_0 - \Delta) \quad \text{no } U(x_0, y_0 + \Delta)$$


• If σ is a Darboux curve with
 $\exists x_1(x) \in F(x, y(x)) = 0$ (existence)

Z monotonicy i promiennosci y i tak $y(x)$ jest m.

Darbouxova věta: [darbuova]

f sp. ma. (a,b) a $f(a) < 0$ a $f(b) > 0 \exists c: f(c) = 0$
(je to důsledkem D. vety, proto to uvažuj)

3 Sporttest. Analogie: $\rightarrow \text{Sporttest} = x$

$$L \quad \forall x \in U_{\delta}(x_0), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(x, \varepsilon) > 0, \text{ s.t. } \forall x \in U_{\delta(x, \varepsilon)}(\bar{x})$$

$$|f(x) - f(\underline{x})| < \varepsilon \iff f(\underline{x}) - \varepsilon < f(x) < f(\underline{x}) + \varepsilon$$

Analogiz jaha v 1

Pozm: $\downarrow$ $\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0 \wedge U(x_0) \times U(y_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) < 0 \wedge U(x_0) \times U(y_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \text{ je ryse monotoni' n } y$

2. Stačí $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ existuje na $U(x_0, y_0)$

$\frac{\partial F}{\partial y}$ je spojitá v (x_0, y_0)

$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

} $\Rightarrow F$ je ryze monotónní v proměnné y

Věta 4.51

Nechť $F: (x^1, x^2, \dots, x^m, y) \mapsto F(x^1, x^2, \dots, x^m, y)$ je globálně. Nechť platí 1 a 3 a Pozn 2, viz vř. $\Rightarrow$ 1 a 3, V. 4.50

(f sp. v p a $f(p) > 0 \Rightarrow \exists \delta \quad f(u, p) > 0$).

Dk $f(p) = m$ a f je sp. v p . $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, že $\forall p' \quad |f(p') - f(p)| < \varepsilon$. tj. $f(p) - \varepsilon < f(p') < f(p) + \varepsilon$

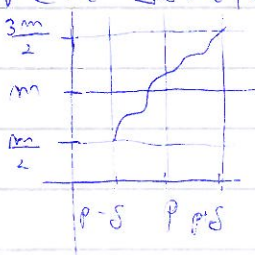
$f(p) + \varepsilon$

$\Rightarrow m - \varepsilon < f(p')$

zvol. $\varepsilon = \frac{m}{2}$

$\frac{m}{2} > 0$

($f = \frac{\partial F}{\partial y}(x, -)$)



□

Pozn: Zřejmě: jedná vřba na $m+1$ proměnných. Systém má m stupňů volnosti. (y má $D_y \subseteq \mathbb{R}^m$, byly b iksy $(x^1, \dots, x^m)$.)

Definice 4

$G: \mathbb{R}^{m+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, nechť $\frac{\partial G^i}{\partial x^j} \exists$. Pak matic

$\left(\frac{\partial G^i}{\partial x^j} \right)_{i=1, \dots, m+m}^{j=1, \dots, m+m}$

$= \text{Jac}(G) :=$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial G^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial G^m}{\partial x^1} \\ \frac{\partial G^1}{\partial x^2} & & \frac{\partial G^m}{\partial x^2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G^1}{\partial x^{m+m}} & & \frac{\partial G^m}{\partial x^{m+m}} \end{pmatrix}$, nazývá Jacobiho maticí.

$J(G) = \det \text{Jac}(G)$, pokud

je G čtvercová. $J(G)$ nazývá jacobian

Pozn: V. 4.51 lze modifikovat:

1. zůstává

2. $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ je spojitá

3. zůstává (tj. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ sp. v (x_0, y_0))

$\Rightarrow$ 1 a 3 možeme $y: X \rightarrow Y$ je sp. a b i mož spojten parciální derivaci

Matematická analýza

23.5.2013

Implicitní funkce

$F(x^1, \dots, x^m, y)$ je ryte rostoucí $n, y \Rightarrow \exists y: (x^1, \dots, x^m) \mapsto y(x^1, \dots, x^m), F(x^1, \dots, x^m, y(x^1, \dots, x^m)) = 0$

Společně se píšou na sp. y . Uveďte bod, tj. neříkáte o číslu $(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0) \in \mathbb{R}^n$.

$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ sp. na okolí $U(x_0, y_0) (x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)) \Rightarrow$ existuje implicitní funkce

v proměnné y

Př. $F(x^1, y) = ax^1 + by + c, a, b, c \in \mathbb{R}$

1, $a \neq 0, F(-\frac{c}{a}, 0) = 0$

2, Sp. F v okolí $U(-\frac{c}{a}, 0)$

3, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = b$

Přímka $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \iff b \neq 0 \Rightarrow y$ lze vyjádřit jako fce x

$$ax^1 + by + c = 0$$

$$by = -c - ax^1$$

$$y(x) = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x^1$$

$$F(x^1, x^2, \dots, x^m, y) = \sum_{i=1}^m a_i x^i + by + c$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = b \quad (\text{y pomocí } x^1, \dots, x^m, b \neq 0)$$

Co když $b=0$, stejně chceme rovnici $F=0$ vyřešit?

Např. chceme x^2 pomocí ost. proměnných

$$x^2 = \frac{1}{a_2} \left(-c - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^m a_i x^i - by \right)$$

Zatímco sp. ne nutně $a_2 = \frac{\partial F}{\partial x^2}$. Zde $2 \geq \sqrt{4.51}$ nelze dle $\frac{\partial F}{\partial x^2} \neq 0$.

Obecně: Vyjádříme-li x^i podle zbytků, nelze dle 2 ve větě V4.51

$$\text{pp. } \frac{\partial F}{\partial x^i}(x_0, y_0) \neq 0$$

o sp. $\frac{\partial F}{\partial x^i}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x^i}$ ne nulový v okolí $U(x_0, y_0)$

Nyní si vezmeme více

$$F^1, \dots, F^m: \mathbb{R}^{m+m} \rightarrow \mathbb{R}$$

Příklad: Systém m konfigurací prostor $\mathbb{R}^{m+m}$. Zadáme m vazeb. Tím konfiguracím

$$\text{prostor zmezzíme na množinu } K = \{(x^1, \dots, x^{m+m}) \in \mathbb{R}^{m+m} \mid F^1(x^1, \dots, x^{m+m}) = 0$$

$$F^2(x^1, \dots, x^{m+m}) = 0$$

$$\vdots$$
$$F^m(x^1, \dots, x^{m+m}) = 0\}$$

, $\dim K$ = počet stupňů volnosti

Číslice v úloze $F'(x,y,z) = z - 40$ (cm)

$$F'(x,y,z) = y - 500$$

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{1+2}$ konfigurací prostor, F' vektor, pohyb je v K , $\dim K = 1$

$$F'(x,y,z) = z - 40 = 0$$

$$F'(x,y,z) = y - 500 = 0$$

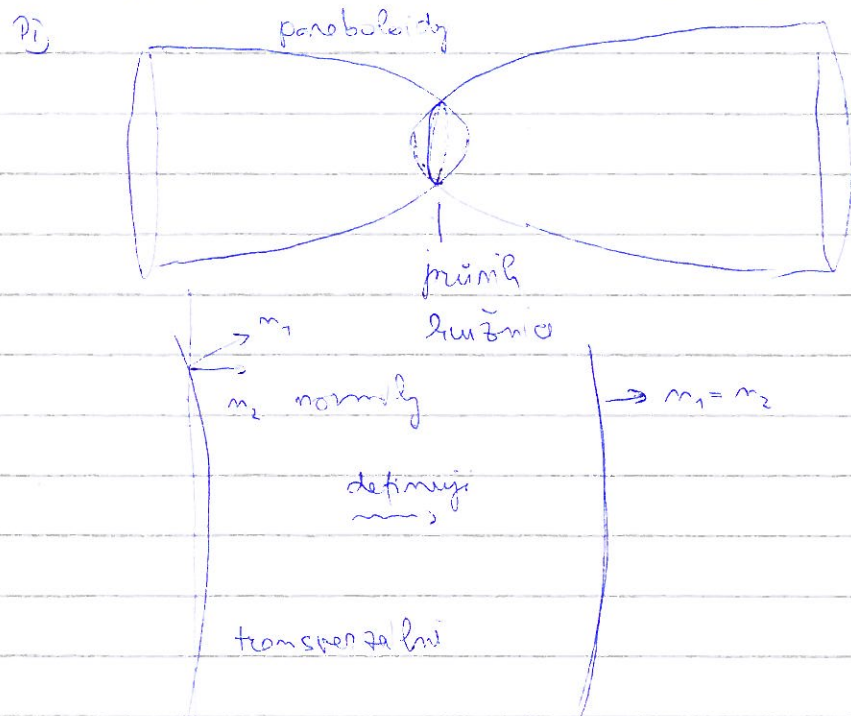
$$R = \{(t, 500, 40), t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y} \\ \frac{\partial F^3}{\partial x} & \frac{\partial F^3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y & \text{ a } z \text{ pomocí } x \\ y &= 500 + 0x \\ z &= 40 + 0x \\ x &= x \end{aligned}$$

Vidíme, že tato úloha souvisí s řešením lineárních rovnic a s pojmem hodnosti

Jacobiho matice. Po příměti vidíme, že chceme-li vyjádřit y a z jako funkce x , stačí aby $\frac{\partial F^1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F^2}{\partial z}$ tvořily regulární matici. (To co chceme spočítat, musí mít regulární matici)

Přes by invertovatelnosti ~~ne~~ vyjádřitelnosti trans implikativ (ze z rovnic $F'(x^1, \dots, x^{n+m}) = 0$ může souviset s lin rovnicemi



(to vypadá teda $\odot$...)

pak je od sebe vzdálený ať je prímítem
bud

Pak použijeme větu + LA (Frobeniusu větu) $Fx = b$ má řešení $\Leftrightarrow \lambda(F) = \lambda(F|b)$

$x = x_p + \ker(F)$ (afinní prostor)

u nás: $x_p \exists$, neb $b=0$ ($h(F) = \lambda(F|0) = h(F|b)$)

$$\dim \text{Ker } F = m + m - h(F)$$

$$F: \mathbb{R}^{m+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$m+m = \text{Ker } F \oplus \text{Im } F$$

$$\dim(\text{Ker } F) = m+m - \dim \text{Im } F$$

$$\text{If } \dim \text{Im } F = m \Rightarrow \dim \text{Ker } F = m$$

Věta 4.52 Věta o implicitních funkcích

Nechť $F^1, \dots, F^{m+m}: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou fce. Nechť $F'(x_0) = 0$

2. $D^\alpha F^i \exists$ na $U(x_0)$ a jsou spojitě $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{m+m}$

$|\alpha| \leq k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$

3. $\exists j_1, \dots, j_m, 1 \leq j_j \leq m+m, j=1, \dots, m$,
 rovněž existují m matice $(\partial_{j_j} F^j)_{j=1, \dots, m}^{j=1, \dots, m}$ mat. hodnost m

Potom $\exists U \exists V$ okolí x_0 platí:

$\forall x \in U \exists ! y \in V$ z $F(x, y) = 0$ a $y: x \mapsto y(x)$ má spojitě parciální derivace

dvoustranně promítnuté do řešení K řešení.

Pozn. $y_j(x) = (y_j^1(x), \dots, y_j^m(x)), \{1, \dots, m+m\} \setminus \{j_1, \dots, j_m\} = \{j_1, \dots, j_m\}$

j_i násle. řadí matici mapející proměnné specifikace y

$$j_j: (x^{j_1}, \dots, x^{j_m}) \mapsto (y_j^1(x^{j_1}, \dots, x^{j_m}), \dots, y_j^m(x^{j_1}, \dots, x^{j_m}))$$

$$U \subseteq \mathbb{R}[x^{j_1}, \dots, x^{j_m}]$$

$$V \subseteq \mathbb{R}[y^1, \dots, y^m], \text{ kde } (D^\alpha f) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_m} x_m}, \text{ kde } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$$

Např. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(D^{(1,2,3,4)} f) = \frac{\partial^4 f}{\partial^1 x_1 \partial^2 x_2 \partial^3 x_3 \partial^4 x_4} \quad \text{čtvrtá derivace}$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \alpha_i \text{ nějaký multiindex}$$

$|\alpha|$... řád multiindexu

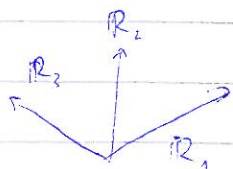
r ... délka multiindexu

Věta 4.53 Nutné podmínky pro stacionární minimum

Nechť F má parciální derivace na $U \subseteq \mathbb{R}^n, U$ otevřená. Nechť $x_0 \in U$ je bod možná lokálního extrému

F má Lt. Pak $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

Dk. Triv. F má nějaké lokální extrémum v x_0 , pak existuje $\exists V \subseteq U$ z $F|_V$ má extrém v x_0 .



$\mathbb{R}_j = j$ -th coordinate case $\mathbb{R}^m \ni \mathbb{R}_j \xrightarrow{\text{ZS}} (F|_{\mathbb{R}_j})(x_0) = c$. All the
def. par. der. of $F|_{\mathbb{R}_j}(x_0) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(x_0), j=1, \dots, m$
 $= 0$ □

Věta 4.54 (Postačující podmínky na otevřených množinách)

Nechť platí pp. VL.53 a nechť navíc

1) $(D^2F)(x_0)$ je pozitivně definitní $\Rightarrow x_0$ je maximum

3) $(D^2F)(x_0)$ je negativně definitní $\Rightarrow x_0$ je maximum (ostré lokální)

3) $(D^2F)(x_0)$ je indefinitní $\Rightarrow x_0$ není žádný lokální extrém

4) $(D^2F)(x_0)$ je semidefinitní $\Rightarrow$ c charakter F v x_0 nic není

Dk: Idea:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)(x^i - x_0^i) + (x - x_0)^T (D^2F)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$$

(tož ale máme, zvláště jen pro 1 proměnnou)

Dále: $(D^2F)(x_0)$ je pozitivně definitní $\Leftrightarrow$ 4 eigenvalues > 0 $(D^2F)(x_0)$ je pos. definitní.

Pak ale $(x - x_0)^T (D^2F)(x_0)(x - x_0) \geq (\min_{i=1, \dots, m} \{ \lambda_i \}) \|x - x_0\|^2$

Analogicky pro negativně definitní

Indefinitní: tiv. $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \approx x^2 - y^2$ □

Pozn:

$D^2F = D^2F, \alpha \in \mathbb{N}_0^m$ Hessova matice (2 derivací)
 $|\alpha| = 2$

Věta 4.55 Věta o lagrangeových multiplikátorech (kopírovat 141)