CVIČENÍ 8

$(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ je nearchimédovské (Víme)

V: $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ není úplný t.v.s. (nad $\mathbb{Q}$). ← inspirace wikiproofs

Dk.: Pro $p \geq 5$. $1 < a < p-1$ $\exists a$ (pro $p = 2 \vee 3$ ne)

$x_n := a^{p^n}$, $n \in \mathbb{N}$

$|a^{p^{n+1}} - a^{p^n}|_p = |a^{p^n}(a^{p^n(p-1)} - 1)|_p \overset{(*)}{=}$ Dle důsl. Eulerovy věty ($\cong$ malé Fermatovy věty důsl.): $a^{p^n(p-1)} - 1 \equiv 0 (p^n)$, neboť

Eul. fce: $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$:
$$\left.\begin{array}{l} 1, 2, \dots, p-1 \\ p+1, p+2, \dots, 2p-1 \\ \vdots \\ p^{n-1}+1, \dots \; p^{n-1}p - 1 < p^n \end{array}\right\} \begin{array}{l} p^{n-1}(p-1) \\ \text{nesoudělných} \end{array}$$

$$(*) = |a^{p^n}\underbrace{(a^{p^n(p-1)} - 1)}_{p^n |}|_p < p^{-n} \longrightarrow 0, n \to \infty. \text{ Tj.}$$

$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0$. Díky nearchimédovskosti toto

stačí pro cauchyovskost (Jinak $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$.)

Pp. $\exists$ $x_n \to x \in \mathbb{Q}$, $x = \lim_n x_n \implies |x|_p = \lim_n |x_n|_p$

pomocí opačné Δ-nerovnosti.

$\forall n \in \mathbb{N}: p \nmid a^{p^n} \implies |x_n|_p = 1$, tj. $|x|_p = \lim_n 1 = 1$.

Dále $x \neq 0$. Rovněž $x = \lim_n x_n = \lim_n x_{n+1} = \lim_n (x_n)^p =$

$= (\lim_n x_n)^p = x^p \underset{x \neq 0}{\implies} x^{p-1} = 1 \implies x = 1 \vee x = -1$

$0 < x - a < p \implies p \nmid a - x \implies |x-a|_p = 1$

Jelikož $x_n \to x$, tak $\exists n_0\ \forall n \ge n_0\ |x_n - x|_p < |x-a|_p$ (**), tj.

$\varepsilon = 1$

$|a^{p^n} - x|_p < |x-a|_p$. ~~$|x-a|_p = |x - a^{p^n} + a^{p^n} - a|_p$~~

~~$\le \max\{|x-a^{p^n}|_p, |a^{p^n}-a|_p\}$ (nearch.)~~

~~$|x-a|_p > |x-a^{p^n}|_p$ (**) $\Rightarrow |x-a^{p^n}|_p < |a^{p^n}-a|_p$, $|x-a^{p^n}|$~~

~~nemůže být maximum. Tj. max. je $|a^{p^n}-a|_p$.~~

$|a^{p^n} - x|_p = |\underbrace{a^{p^n} - a}\ \underbrace{+ a + x}|_p = |a^{p^n}-a|_p = |a|_p |a^{p^n-1}-1|_p$

[$|a^{p^n}-x| \ne |x-a|_p$ $\forall \Delta$ jsou rovnoramenné] ~~při různých valuacích je $|\cdot|_p = \max$.~~

$= |a^{p^n-1}-1|_p < 1$ dle důsl. malé F. věty.

a $|x-a|_p = 1$. Tj. $(x_n)_n$ je cauchyovská a nekonvergentní!

Def: $\mathbb{Q}_p := \overline{(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)}$, zúplnění! Těleso p-adických čísel.

Def: $(X, |\cdot|_X)$ buď normovaný prostor. $(Y, |\cdot|_Y)$ nazveme zúplnění, pokud $\exists$ izometrie $i: X \to Y$, že $i(X)$ je hustý v Y.

$\exists$: $Y := \{(x_n)_n \mid (x_n)_n \text{ cauchy}\}/\simeq$ $\quad (x_n)_n \simeq (y_n)_n$ iff (def.) $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. $\quad i: X \to Y \quad i(x) := [(x, x, \dots)] \in Y$

kde $|[(x_n)]|_Y := \lim |x_n|_X$.

Korektnost $(x_n)_n$ cauchy $\Rightarrow (|x_n|_X)_n$ cauchy (obr. Δ)

$(|x_n|_X)_n \subseteq \mathbb{R} \wedge \mathbb{R}$ úplné $\Rightarrow \lim_n |x_n|_X$ existuje.

Tvrzení: ~~$\mathbb{Q}$~~ $\forall$ zúplnění tělesa s normou je těleso s přirozenými operacemi.