

Cvičení 1

Rovnice a nerovnice

Příklad 1. Řešte následující rovnice v \mathbb{R} :

- (a) $\sin 2x = \cos x$ (g) $\sin x + \cos x = 1$
(b) $1 - |\sin x| = \cos^2 x$ (h) $2 \log_3^2 x = 8 \log_3 3 - \log_3 x^6$
(c) $\log(x^2 + 8) = 2 \log(2 - x)$ (i) $6^{4x-1} + \frac{1}{2} 6^{2x+1} = \frac{19}{6}$
(d) $\log_4(64x^2) = (\log_4 x)^2$ (j) $|x - 4| - |6 - 3x| = -3 + |-x|$
(e) $e^x + 6e^{-x} = 5$ (k) $\log_{10} x + \frac{8}{\log_{10} x} = 6$
(f) $|x - |2x|| = 1 - |x|$ (l) $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 2} = 3$

Příklad 2. Řešte následující nerovnice v \mathbb{R} :

- (a) $(x + 2)(x - 2) \leq 2x - 4$ (i) $\frac{x+2}{x-1} \geq |2 - x|$
(b) $\frac{5x-1}{x-3} \geq -x - 1$ (j) $3^{-x^3-3} > 3^{-|2x^3|}$
(c) $|x - \frac{x}{2}| < 3$ (k) $||2x - 1| - 7| \leq 2$
(d) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) > 0$ (l) $2 - \cos 2x - 3 \sin x < 0$
(e) $\frac{(x-4)(x+2)}{x-3} \geq x + 2$ (m) $\sin x^2 + 12 |\tan x| \geq -2$
(f) $|x + 1| - |2 - x| < 1$ (n) $\frac{x-2}{x+3} \leq \frac{x+1}{x-2}$
(g) $\tan(2x - 1) \geq -\sqrt{3}$ (o) $\lfloor x \rfloor (x + \frac{1}{2}) \leq x^2 - \frac{1}{4}$
(h) $\cos 2x < \sin x$

Příklad 3. V závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$ řešte (ne)rovnice:

- (a) $-1 < ce^x \leq 0$ (d) $|x^2 + 2x| < c + 2x$
(b) $|\sin x| > c$ (e) $(c - 1)x^2 - 2cx - c + 8 = 0$
(c) $|x| + |x + 3| < c$ (f) $1 < |3 - x^2| \leq c$

Příklad 4. Načrtněte grafy následujících funkcí a uveďte význačné hodnoty (v jakých bodech jsou protnuty osy, horizontální/vertikální asymptoty atd.):

- (a) $f(x) = |||x| - 2| - 3| - 1|$ (c) $h(x) = |e^{|x-1|} - \pi|$
(b) $g(x) = 1 - |\sin \frac{x}{2}|$ (d) $k(x) = \tan |\pi x|$

Příklad 5. Sestrojte kvadratickou nerovnici, která bude mít řešení tvaru:

- (a) $x \in (\infty, 3) \cup (4, \infty)$ (c) \emptyset
(b) $x = -2$ (d) $x \in [0, 2]$

- Kolik takových nerovnic existuje?

Příklad 6. Vyjádřete funkce $\sin 4x$ a $\cos 4x$ pomocí násobků a mocnin $\sin x$ a $\cos x$.

Příklad 7. Ukažte, že platí:

- (a) Známý vzorec pro řešení kvadratické rovnice.
(b) $|x + y| \leq |x| + |y|$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.
(c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.
(d) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ pro $n, k \in \mathbb{N}, n > k > 0$, kde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
(e) $(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2) (\sum_{i=1}^n b_i^2)$ (Cauchyova-Schwarzova nerovnost).

Výsledky

1. (a) $x \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, (b) $x \in \{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$, (c) $x = -1$,
 (d) $x \in \{\frac{1}{4}, 64\}$, (e) $x \in \{\log 2, \log 3\}$, (f) $x \in \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$, (g) $x \in \{2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$,
 (h) $x \in \{\frac{1}{81}, 3\}$, (i) $x = \frac{1}{2}$, (j) $x \in \{-\frac{1}{3}, \frac{13}{5}\}$, (k) $x \in \{10^2, 10^4\}$, (l) $x = 9 - \frac{3\sqrt{19}}{2}$
 2. (a) $x \in [0, 2]$, (b) $x \in [-4, 1] \cup (3, \infty)$, (c) $x \in (-2, 6)$, (d) $x \in (1, 2)$, (e) $[-2, 3)$,
 (f) $x \in (-\infty, 1)$, (g) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{k\pi}{2})$, (h) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$,
 (i) $x \in (1, 4]$, (j) $x \in (-\infty, -1) \cup (\sqrt[3]{3}, \infty)$, (k) $x \in [-4, -2] \cup [3, 5]$,
 (l) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$, (m) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, (n) $x \in (-3, \frac{1}{8}] \cup (2, \infty)$, (o)
 $x \in \bigcup_{n \leq -2} [n, n + \frac{1}{2}] \cup [-1, 0) \cup \bigcup_{n \geq 0} [n + \frac{1}{2}, n + 1)$
 3. (a) (i) $c > 0: \emptyset$, (ii) $c = 0: x \in \mathbb{R}$, (iii) $c < 0: x \in (-\infty, \log(-\frac{1}{c}))$,
 (b) (i) $c < 0: x \in \mathbb{R}$, (ii) $c \geq 1: \emptyset$, (iii) $c \in [0, 1): x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\arcsin(c) + k\pi, \pi - \arcsin(c) + k\pi)$,
 (c) (i) $c \leq 3: \emptyset$, (ii) $c > 3: x \in (-\frac{c+3}{2}, \frac{c-3}{2})$,
 (d) (i) $c \leq 0: \emptyset$, (ii) $c \in (0, 4]: (-2 + \sqrt{4-c}, \sqrt{c})$, (iii) $c > 4: x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$,
 (e) (i) $c = 1: x = \frac{7}{2}$, (ii) $c \in (\frac{9-\sqrt{17}}{4}, \frac{9+\sqrt{17}}{4}): \emptyset$, (iii) $c \in \{\frac{9-\sqrt{17}}{4}, \frac{9+\sqrt{17}}{4}\}: x = \frac{c}{c-1}$,
 (iv) $c \in (-\infty, \frac{9-\sqrt{17}}{4}) \setminus \{1\} \cup (\frac{9+\sqrt{17}}{4}, \infty): x \in \{\frac{c}{c-1} - \frac{\sqrt{2c^2-9c+8}}{|c-1|}, \frac{c}{c-1} + \frac{\sqrt{2c^2-9c+8}}{|c-1|}\}$.
 (f) (i) $c \leq 1: \emptyset$, (ii) $1 < c < 3: x \in [-\sqrt{c+3}, -2) \cup (-\sqrt{2}, -\sqrt{3-c}] \cup [\sqrt{3-c}, \sqrt{2}) \cup (2, \sqrt{c+3}]$, (iii) $c \geq 3: x \in [-\sqrt{c+3}, -2) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (2, \sqrt{c+3}]$