Cvičení 10

Příklad 1 (L'Hospital)**.** Spočtěte následující limity pomocí L'Hospitalova pravidla.

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{22x^6+20x-42}{x^{40}-3x+2}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}-\arccos x}{x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cotan(x)-1}{x^2}$

(e) $\lim_{x\to 1-} \log(x)\cdot\log(1-x)$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$

(g) $\lim_{x\to\infty} (e^x + 54x^2)^{\frac{1}{x}}$

(h) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$

Příklad 2 (Zkouškové příklady na procvičení)**.** U následujících funkcí spočtěte jejich derivace, případně jednostranné derivace, pokud existují.

(a) $f(x) = \max\{x + 4\arctan(\sin x), x\}$

(b) $f(x) = \max\{\min\{\cos x, \frac{1}{2}\}, -\frac{1}{2}\}$

(c) $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

(d) $f(x) = x^2 e^{-|x-1|}$

(e) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\tan^2 x\right), & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

(g) $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$

(h) $f(x) = \arccos\frac{1}{1+x^2}$

(i) $f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(j) $f(x) = x^{x^2}$ pro $x > 0$

(k) $f(x) = \max\{x + 4\arctan(\sin x), x\}$

(l) $f(x) = \cos\left(\max\{x, x^2\}\right)$

(m) $f(x) = (\cos x)^{\min\{2, x^3+x^2-2x+2\}}$

(n) $f(x) = \max\{x, 1-x^2, (x-1)^2\}$

Cvičení 10 - výsledky

Příklad 1

(a) $\frac{152}{37}$

(b) 1

(c) $\frac{1}{6}$

(d) $-\frac{1}{3}$

(e) 0

(f) 1

(g) e

(h) $\frac{1}{2}$

Příklad 2

(a) $f' = \begin{cases} 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), k \in \mathbb{Z} \\ \frac{4\cos x}{\sin^2 x + 1} + 1, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$f'_+(2k\pi) = 5,\ f'_-(2k\pi) = 1,\ f'_+((2k+1)\pi) = 1,\ f'_-((2k+1)\pi) = -3$

(b) $f' = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ -\sin x, & x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$f'_-(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = \sqrt{3}/2,\ f'_+(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = 0,\ f'_-(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = 0,\ f'_+(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2,\ f'_-(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2,$
$f'_+(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = 0,\ f'_-(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi) = 0,\ f'_+(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi) = \sqrt{3}/2.$

(c) $f' = \frac{2|x|}{x^3+x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'_-(0) = -2,\ f'_+(0) = 2$

(d) $f'(x) = \begin{cases} e^{x-1}(2x + x^2), & x < 1, \\ e^{1-x}(2x - x^2), & x > 1, \end{cases}\ f'_-(1) = 3, f'_+(1) = -1.$

(e) $f' = \frac{\sqrt{2}}{(\sin x + \cos x)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\pi/4 + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\},$
$f'_-(-\pi/4 + k\pi) = \infty,\ f'_+(-\pi/4 + k\pi) = -\infty$

(f) $f'(x) = \begin{cases} \frac{2\tan x \frac{1}{\cos^2 x}}{1 + \tan^4 x}, & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$

(g) $f' = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'_-(0) = -1,\ f'_+(0) = 1$

(h) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} \cdot (1+x^2)^2}, x \neq 0,\ f'_-(0) = -\sqrt{2}, f'_+(0) = \sqrt{2}.$

(i) $f'(x) = 2x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) - \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'(0) = 0.$

(j) $f'(x) = x^{x^2} \cdot (2x \log x + x).$

Cvičení 10 - řešení

Příklad 1. (d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{cotan}\,x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{\sin x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}$$
$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=-\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\sin x}+\frac{x\cos x}{\sin x}}=-\frac{1}{2+1}=-\frac{1}{3},$$

kde L'hospitalovo pravidlo jsme mohli použít, neboť limita je typu $\frac{0}{0}$.

Příklad 1. (f)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}\right)}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-x^2-1+4x^2)}{3x^2\cdot\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2}\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{3x^2}=1,$$

kde L'Hospitalovo pravidlo jsme mohli použít, neboť limita je typu $\frac{0}{0}$.