Cvičení 2

Výroková logika

Příklad 1. Dokažte, že výroky jsou ekvivalentní:

(a) A a $\neg(\neg A)$,

(b) $A \implies B$ a $\neg B \implies \neg A$,

(c) $\neg(A \implies B)$ a $A \wedge \neg B$,

(d) $A \implies B$ a $\neg A \vee B$.

Příklad 2. Dokažte, že následující výroky jsou tautologie:

(a) $A \vee (\neg A)$,

(b) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \implies (A \Rightarrow C)$.

Příklad 3. Dokažte, že výroky $A \implies B$ a $\neg(A) \implies \neg(B)$ nejsou ekvivalentní.

Příklad 4. Znegujte následující výroky a rozhodněte o jejich pravdivosti:

(a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N} :\ z > x \implies z > y$,

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R} :\ x + y \geq 0 \implies x \cdot y \geq 0$,

(c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} :\ x \cdot y = 1$,

(d) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R} :\ x \cdot y = 1$,

(e) $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} :\ n < x$,

(f) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists q \in \mathbb{Q} :\ q \leq x \wedge x < q + 1$.

Příklad 5. Nechť L je množina všech lidí, K množina všech knih, $V(c, k)$ je výroková foma "Člověk c vlastní knihu k" a $C(c, k)$ je výroková foma "Člověk c čte knihu k". Zapište symbolicky

(a) Každý čte pouze svoje knihy.

(b) Každou knihu vlastní nějaký člověk.

(c) Každou knihu čte nejvýše jeden člověk.

(d) Každý člověk čte nejvýše jednu knihu.

(e) Existuje kniha, kterou někdo čte.

(f) Existuje člověk, který čte nějakou knihu.

(g) Existuje člověk, který čte cizí knihu.

Příklad 6. Nechť A, B jsou množiny. Dokažte následující tvrzení.

(a) $\emptyset \subset A$,

(b) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$,

(c) $((A \cup B) = A) \iff B \subset A$,

(d) $((A \cap B) = A) \iff A \subset B$.

Zobrazení

Příklad 7. Nechť $A = [0,1]$ a $B = [0,2]$. Určete, které z následujících množin jsou grafem nějakého zobrazení z A do B:

(a) $M_1 = \{(x,y) \in A \times B : x^2 + y^2 = 1\}$,

(b) $M_2 = \{(x,y) \in A \times B : y = x^2 + 1\}$,

(c) $M_3 = \{(x,y) \in A \times B : x^2 + (y-1)^2 = 1\}$.

Příklad 8. Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení, $X, Y \subset A$ a $U, V, U_\alpha \subset B$, $\alpha \in I$. Platí následující tvrzení? Platí jen některé inkluze?

(a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,

(b) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$,

(c) $f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$,

(d) $f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$,

(e) $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$,

(f) $f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$.

Indukce

Příklad 9. Dokažte následující tvrzení pomocí indukce:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon n < 2^n$,

(b) $\forall a, b \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$,

(c) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,

(d) Nechť $x_1, x_2, \ldots \in [0,1]$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje podinterval $[0,1]$ o délce 2^{-n}, který obsahuje nekonečně mnoho hodnot $x_1, x_2, \ldots$.

Navíc

Příklad 10. Nechť A, B, C jsou množiny. Načrtněte Vennovy diagramy pro

(a) $A \cap B^c$,

(b) $(A \cup B)^c$,

(c) $(A \cap B) \setminus C$,

(d) $B \setminus (A \setminus C)$,

(e) $A \cap (B^c \cup C)$,

(f) $A^c \cap B^c \cap C$.

Příklad 11. Dokažte, že skládání zobrazení je asociativní, ale není komutativní.

Příklad 12. Nalezněte zobrazení která zobrazují

(a) $(0,1)$ na $(0,\infty)$,

(b) $[0,1]$ prostě na $[a,b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$,

(c) $(0,1]$ na $(0,\infty)$,

(d) $(0,1)$ na $[0,1)$,

(e) $(0,1)$ prostě na $[0,1)$.

Cvičení 2 - výsledky

Příklad 4 (a) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}:\ z > x \wedge z \leq y$. Platí původní výrok, stačí položit $y = x$.

(b) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x + y \geq 0 \wedge x \cdot y < 0$. Platí negace, stačí vzít $x = 3, y = -2$.

(c)$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}:\ x \cdot y \neq 1$. Platí negace. Vezměme $x = 0$. Pak pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí $x \cdot y = 0$.

(d) $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall y \in \mathbb{R}:\ x \cdot y \neq 1$. Platí původní výrok: Volme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a položme $y = \frac{1}{x}$. Pak $x \cdot y = 1$.

(e)$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{R}:\ n \geq x$. Platí negace: Zvolme $n \in \mathbb{N}$ a položme $x = n$.

(f) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall q \in \mathbb{Q}:\ x < q \vee x \geq q + 1$. Platí původní výrok: stačí položit $q = [x]$.

Příklad 5

(a) $\forall c \in L\ \forall k \in K: C(c, k) \implies V(c, k)$

(b) $\forall k \in K\ \exists c \in L: V(c, k)$

(c) $\forall k \in K\ \forall c_1, c_2 \in L: (C(c_1, k) \wedge C(c_2, k)) \implies c_1 = c_2$

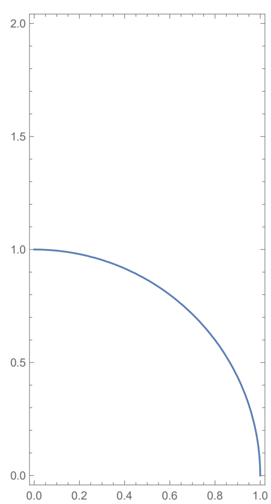
(d) $\forall c \in L\ \forall k_1, k_2 \in K: (C(c, k_1) \wedge C(c, k_2)) \implies k_1 = k_2$

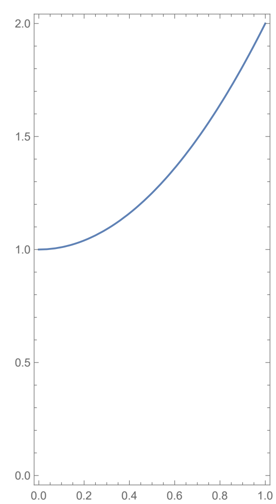
(e) $\exists k \in K\ \exists c \in L: C(c, k)$

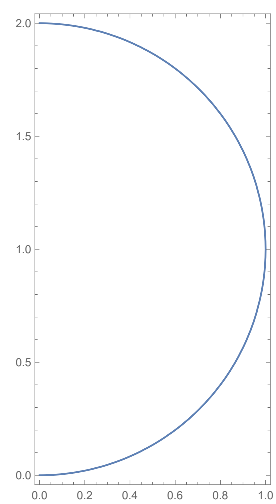
(f) $\exists c \in L\ \exists k \in K: C(c, k)$

(g) $\exists c_1, c_2 \in L\ \exists k \in K: V(c_1, k) \wedge C(c_2, k) \wedge c_1 \neq c_2$

Příklad 7

(a) 

(b) 

(c) 

Příklad 8

(a) Ano.

(b) Platí pouze $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

(c) Ano.

(d) Ano.

(e) Platí pouze $f(X) \setminus f(Y) \subset f(X \setminus Y)$.

(f) Ano.

Cvičení 2 - řešení

Příklad 1 (a)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
0	1	0
1	0	1

(b)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \implies B$	$\neg B \implies \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

(c)

A	B	$\neg B$	$A \implies B$	$\neg(A \implies B)$	$A \wedge \neg B$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0

(d)

A	B	$\neg A$	$A \implies B$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Příklad 2 (a)

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
0	1	1
1	0	1

Příklad 6 (a) Platí triviálně, prázdné tvrzení; chceme ukázat, že $\forall x\colon x \in \emptyset \implies x \in A$. Vezměme tedy nějaké x. Pak ale $x \notin \emptyset$, a tudíž implikace platí, neboť nepravda implikuje pravdu.

(b) Ukážeme platnost dvou inkluzí:

"$\subset$": Nechť $x \in A \cup B$. Pokud $x \in A$, tak tím spíš $x \in A \cup (B \setminus A)$. Pokud $x \notin A$, tak $x \in B \setminus A$, a tedy $x \in A \cup (B \setminus A)$.

"$\supset$": Nechť $x \in A \cup (B \setminus A)$. Pokud $x \in A$, tak zřejmě $x \in A \cup B$. Pokud $x \in B \setminus A$, tak speciálně $x \in B \subset A \cup B$.

(c) "$\Rightarrow$": Je $B \subset A \cup B = A$.

"$\Leftarrow$: Je $A \subset A \cup B \subset A \cup A = A$ a tedy $A = A \cup B$.

(d) Dokáže se analogicky jako (c).

Příklad 8 (a) Ano: ukážeme platnost dvou inkluzí:

"$\subset$": Nechť $y \in f(X \cup Y)$. Pak existuje $x \in X \cup Y$ takové, že $f(x) = y$. Toto x musí ležet buď v X nebo v Y. Každopádně $y \in f(X) \cup f(Y)$.

"$\supset$": Nechť $y \in f(X) \cup f(Y)$. Pak $y \in f(X)$ nebo $y \in f(Y)$. Předpokládejme, že $y \in f(X)$; v opačném případě by důkaz proběhl analogicky. Tedy existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$. Je $X \subset X \cup Y$, a tedy $x \in X \cup Y$. Odtud $y \in f(X \cup Y)$.

(b) Ne: Uvažujme $A = \{0, 1\}, B = \{0\}, X = \{0\}$ a $Y = \{1\}$ a zobrazení $f\colon A \to B$ definováno následovně: $f(0) = 0 = f(1)$. Pak $f(X \cap Y) = f(\emptyset) = \emptyset$, ale $f(X) \cap f(Y) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}$. Zkusme tedy dokázat $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$. Nechť $y \in f(X \cap Y)$. Pak existuje $x \in X \cap Y$ takové, že $f(x) = y$. x leží v obou X a Y, neboli $y \in f(X)$ a $y \in f(Y)$. Odtud $y \in f(X) \cap f(Y)$.

(c) Ano:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) &\iff f(x) \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \\ &\iff \exists \alpha \in I:\ f(x) \in U_\alpha \\ &\iff \exists \alpha \in I:\ x \in f^{-1}(U_\alpha) \\ &\iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha). \end{aligned}$$

(d) Ano: Dokáže se podobně jako (c).

(e) Ne: Uvažme $A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{0, 1\}, X = \{0, 1\}, Y = \{2, 3\}$ a zobrazení $f\colon A \to B$ definováno následovně: $f(0) = f(2) = 0$ a $f(1) = f(3) = 1$. Pak $f(X \setminus Y) = f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$, ale $f(X) \setminus f(Y) = \{0, 1\} \setminus \{0, 1\} = \emptyset$. Zkusme dokázat, že $f(X) \setminus f(Y) \subset f(X \setminus Y)$:

$$\begin{aligned} z \in f(X) \setminus f(Y) &\iff z \in f(X) \wedge z \notin f(Y) \\ &\iff (\exists x \in X:\ f(x) = z) \wedge (\forall y \in Y:\ f(y) \neq z) \\ &\implies \exists x \in (X \setminus Y):\ f(x) = z \\ &\iff y \in f(X \setminus Y). \end{aligned}$$

(f) Ano: dokáže se podobně jako (c).

Příklad 9 (a) **1. krok.** Ověříme platnost tvrzení pro $n = 1$: zřejmě platí, že $1 < 2$.
k-tý krok. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n = 1, 2, \dots k-1$, $k \geq 2$ a z tohoto vyvodíme platnost pro $n = k$. Rozepíšeme $k = (k-1) + 1$ a odhadneme za pomoci indukčního předpokladu:

$$k = (k-1) + 1 < 2^{k-1} + 2 \leq 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k,$$

kde poslední nerovnost platí, neboť $k \geq 2$. Tím je důkaz ukončen.

(b) **1. krok.** Tvrzení zřejmě platí pro $n = 1$.
k-tý krok. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = 1, 2, \dots, k-1, k \geq 2$ a ukážeme platnost pro

$n = k$. Počítejme

$$\begin{aligned}(a+b)^k = (a+b)^{k-1}(a+b) &= \left(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}a^i b^{k-1-i}\right)(a+b)\\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}a^{i+1}b^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}a^i b^{k-i}\\ &= a^k + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\binom{k-1}{i-1}+\binom{k-1}{i}\right)a^i b^{k-i} + b^k\\ &= a^k + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}a^i b^{k-i} + b^k\\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k-i},\end{aligned}$$

kde v druhé rovnosti jsme užili indukčního předpokladu a v páté rovnosti využili Pascalovy identity. Tím je důkaz dokončen.

(c) **1. krok.** Tvrzení zřejmě platí pro $n = 1$.
k**-tý krok.** Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n = 1, 2, \ldots, k-1$. Ukážeme platnost pro $n = k$. Počítejme

$$\sum_{i=1}^{k} i = \sum_{i=1}^{k-1} i + k = \frac{(k-1)k}{2} + k = \frac{k^2-k+2k}{2} = \frac{k^2+k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Důkaz je tímto hotov.

(d) **1. krok:**

Pro $n = 0$ máme $2^{-0} = 1$, tedy za hledaný podinterval můžeme vzít celý interval $[0,1]$.

Indukční krok:

Předpokládejme, že máme interval $[a,b] \subset [0,1]$, který splňuje $b - a < 2^{-(n-1)}$ a množina

$$A = \{i \in \mathbb{N} \colon x_i \in [a,b]\}$$

je nekonečná. Označme

$$B = \left\{i \in \mathbb{N} \colon x_i \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]\right\} \quad \text{a} \quad C = \left\{i \in \mathbb{N} \colon x_i \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]\right\}.$$

Pak $A = B \cup C$, tedy buď B nebo C musí být nekonečná (A je nekonečná tedy nemůže být sjednocením dvou konečných množin). Pak interval $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ nebo $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ musí obsahovat nekonečně mnoho daných hodnot. Navíc platí

$$\left|\frac{a+b}{2} - a\right| = \frac{|b-a|}{2} \leq \frac{2^{-(n-1)}}{2} = 2^{-n}$$

a obdobně $\left|b - \frac{a+b}{2}\right| \leq 2^{-n}$. Našli jsme tedy hledaný interval.

Příklad 11 Nechť $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pak máme

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x),$$

tedy skládání je asociativiní. Jako protipříklad na komutativitu uvažme funkce $f(x) = -x$ a $g(x) = x^2$. Pak

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -(x^2) = -x^2 \quad \text{ale} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (-x)^2 = x^2.$$

Příklad 12 (a) Například $f(x) = \tan(\pi x)$, $x \in (0, 1)$.
(b) Například $f(x) = a + (b - a)x$, $x \in [0, 1]$.
(c) Například

$$f(x) = \begin{cases} \tan(\pi x), & x \in (0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

(d) Například

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \frac{1}{4}), \\ \frac{1}{2} - x, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ 2x - 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

(e) Například

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \frac{1}{2}, \\ 2^{-n}, & x = 2^{-n-1} \text{ pro } n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{jinak.} \end{cases}$$