Cvičení 3

Příklad 1. Pro následující množiny naleněte supremum a infimum. Určete zda existuje maximum a minimum.

(a) $A = \{1, 2\}$,

(b) $B = \{-\pi, -e, 0, 1, \sqrt{5}, 3\}$,

(c) $C = \langle 8, 16)$,

(d) $D = ((-7, -2\rangle \cup (-1, 1) \cup \{2\}) \cap (-8, \frac{1}{2})$,

(e) $E = \mathbb{N}$.

Příklad 2. Pro následující množiny naleněte supremum a infimum. Určete zda existuje maximum a minimum.

(a) $A = \{\frac{1+(-1)^{3n}}{4};\ n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $B = \{x \in \mathbb{R}\colon x < 70!\}$,

(c) $C = \{y \in \mathbb{R}\colon y \geq -6\}$,

(d) $D = \{z \in \mathbb{R}\colon z^4 < 16\}$,

(e) $E = \{w \in \mathbb{R}\colon \frac{1}{w-1} > 2\}$,

(f) $F = \{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\}$,

(g) $G = \{e^x\colon x \in (-\infty, 4\rangle\}$,

(h) $H = \{(\sin\frac{n\pi}{2})^2\colon n \in \mathbb{Z}\}$,

(i) $I = \{2^n - 3^m;\ n, m \in \mathbb{N}\}$,

(j) $J = \{2^n - 3^{-m};\ n, m \in \mathbb{N}\}$

Příklad 3. Položme pro $n \in \mathbb{N}$ množiny $C_n = \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 - \frac{x}{n} \leq 0\}$ a $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ a $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Pro následující množiny nalezněte supremum a infimum

(a) C_n, pro $n \in \mathbb{N}$,

(b) C,

(c) D.

Příklad 4. Nechť $I = \langle 0, 1\rangle$, $f : I \to \mathbb{R}$ je klesající. Určete supremum a infimum množiny $f(I)$. Nabývá se zde minima a maxima? Co se dá říct o supremu a infimu množiny $f((0, 1))$?

Příklad 5. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$. Co můžeme říct o infimu a supremu následujících množin ve vztahu k $\inf A$, $\inf B$, $\sup A$, $\sup B$?

(a) $A \cup B$,

(b) $A \cap B$,

(c) $A \setminus B$,

(d) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,

(e) $-A = \{-a;\ a \in A\}$,

(f) $A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$,

(g) $A - B = \{a - b;\ a \in A,\ b \in B\}$,

(h) $A \cdot B = \{a \cdot b;\ a \in A,\ b \in B\}$.

Příklad* 6. Určete supremum a infimum množiny $A = \{q \in \mathbb{Q}\colon q^2 < 2\}$ v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$.

Příklad 7. Z definice spočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} n$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} e^n$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

(e) $\lim_{n\to\infty} n^n$,

(f) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$,

(g) $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi n)\sqrt{n}$,

(h) $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + \pi n) n^{-2}$,

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Cvičení 3 - výsledky

Příklad 1 **(a)** $\min A = 1$, $\max A = 2$, **(b)** $\min B = -\pi$, $\max B = 3$, **(c)** $\min C = 8$, $\sup C = 16$, maximum neexistuje, **(d)** $\inf D = -7$, $\sup D = \frac{1}{2}$, minimum ani maximum neexistuje, **(e)** $\min E = 1$, maximum ani supremum neexistuje.

Příklad 2 **(a)** $\min A = 0$, $\max A = \frac{1}{2}$, **(b)** $\inf B$ neexistuje, $\sup B = 70!$, **(c)** $\min C = -6$, $\sup C$ neexistuje, **(d)** $\inf D = -2$, $\sup D = 2$, minimum ani maximum neexistuje, **(e)** $\inf E = 1$, $\sup E = \frac{3}{2}$, minimum ani maximum neexistuje, **(f)** $\inf F = 0$, $\max F = 1$, minimum neexistuje, **(g)** $\inf G = 0$, $\max G = e^4$, minimum neexistuje, **(h)** $\min H = 0$, $\max H = 1$, **(i)** supremum ani infimum neexistuje, **(j)** $\min J = \frac{5}{3}$, supremum neexistuje.

Příklad 3

(a) $\sup C_n = \frac{1}{n}$, $\inf C_n = 0$,

(b) $\sup C = \inf C = 0$,

(c) $\sup C = 1$, $\inf C = 0$.

Příklad 4 $\sup f(I) = \max f(I) = f(0), \inf f(I) = \min f(I) = f(1)$. Platí $f(0) \geq \sup f((0,1)) \geq \inf f((0,1)) \geq f(1)$.

Příklad 5 Označme $\inf A = i_A,\ \sup A = \ s_A,\ \inf B = i_B,\ \sup B = s_B$.

(a) $\inf A \cup B = \min\{i_A, i_B\}$,	$\sup A \cup B = \max\{s_A, s_B\}$,
(b) $\inf A \cap B \geq \max\{i_A, i_B\}$,	$\sup A \cap B \leq \min\{s_A, s_b\}$,
(c) $\inf A \setminus B \geq i_A$,	$\sup A \setminus B \leq s_A$,
(d) $\inf A\Delta B \geq \min\{i_A, i_B\}$,	$\sup A\Delta B \leq \max\{s_A, s_B\}$,
(e) $\inf -A = -s_A$,	$\sup -A = -i_A$,
(f) $\inf A + B = i_A + i_B$,	$\sup A + B = s_A + s_B$,
(g) $\inf A - B = i_A - s_B$,	$\sup A - B = s_A - i_B$,
(h) $\inf A \cdot B = \min\{i_A i_B, i_A s_B, s_A i_B, s_A s_B\}$,	$\sup A \cdot B = \max\{i_A i_B, i_A s_B, s_A i_B, s_A s_B\}$.

Příklad 6 V $\mathbb{R}$ je $\inf A = -\sqrt{2}$ a $\sup A = \sqrt{2}$, v $\mathbb{Q}$ supremum ani infimum neexistují.

Příklad 7

(a) ∞,

(b) 0,

(c) ∞,

(d) 0,

(e) ∞,

(f) neexistuje,

(g) neexistuje,

(h) 0,

(i) 0.

Cvičení 3 - řešení

Příklad 7 Když počítáme limity z definice, je dobré mít představu, jak se posloupnost vyvíjí s rostoucím n, odhadnout, zdali konverguje k nějakému číslu, diverguje k $\pm\infty$, nebo limita vůbec neexistuje. Pak se pokusíme náš odhad dokázat.

(a) Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ z definice. Nechť $K > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > K$ (takové existuje díky Archimédově vlastnosti). Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ máme $n \geq n_0 > K$. Odtud $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

(b) Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (k tomu se dostaneme například tak, že spočítáme nerovnici $\frac{1}{x} < \varepsilon$, jejíž řešením jsou $x > \frac{1}{\varepsilon}$). Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ máme $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tedy vskutku $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(c) Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} e^n = \infty$. Nechť $K > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \log K$ (opět ho můžeme získat z nerovnice $e^x > K$). Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ máme z monotonie exponenciály $e^n \geq e^{n_0} > e^{\log K} = K$. Odtud $\lim_{n\to\infty} e^n = \infty$.

(d) Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon$ (například řešíme nerovnici $\log_{\frac{1}{2}} x < \varepsilon$). Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ máme z faktu, že funkce $(\frac{1}{2})^x$ je klasjící, že $\left|(\frac{1}{2})^n - 0\right| = (\frac{1}{2})^n \leq (\frac{1}{2})^{n_0} < (\frac{1}{2})^{\log_{\frac{1}{2}} \varepsilon} = \varepsilon$. Proto plyne požadovaný výsledek.

(e) Ukážeme, že posloupnost diverguje do ∞. Volme $K > 0$. Uvědomíme se, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí, že $n^n \geq n$. Tedy, pokud zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > K$, pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ máme $n^n \geq n \geq n_0 > K$. Odtud $\lim_{n\to\infty} n^n = \infty$.

(f) Vidíme, že posloupnost $(-1)^n$ osciluje mezi -1 a $+1$, takže ukážeme, že limita neexistuje. Předpokládejme pro spor, že posloupnost $(-1)^n$ konverguje k nějakému $A \in \mathbb{R}$, tedy $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = A$. Jelikož $(-1)^n$ konverguje k A, nalezneme z definice konvergence pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ máme $|(-1)^n - A| < \frac{1}{2}$. Pak ale pro všechna $m, n \geq n_0$ máme z trojúhelníkové nerovnosti, že $|(-1)^n - (-1)^m| \leq |(-1)^n - A| + |(-1)^m - A| < 1$. Nicméně, pokud vezmeme $n \geq n_0$ tak pak jistě i $2n \geq n_0$ a $2n+1 \geq n_0$, ale $|(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}| = 2$, a to je spor. Proto $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ neexistuje.

(g) Uvědomíme si, že $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Vidíme, že jako v předchozím příkladě naše posloupnost mění znaménka, ale zároveň i v absolutní hodnotě roste. Ukážeme, že limita neexistuje. Opět budeme postupovat sporem. Nechť tedy pro spor $\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)\sqrt{n} = A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ máme $|\cos(n\pi)\sqrt{n} - A| < \frac{1}{2}$. Analogicky jako v minulém příkladě vyvodíme, že pro všechna $m, n \geq n_0$ máme $|\cos(n\pi)\sqrt{n} - \cos(m\pi)\sqrt{m}| < 1$. Opět, pro $n \geq n_0$ máme, že $\left|\cos(2n\pi)\sqrt{2n} - \cos((2n+1)\pi)\sqrt{2n+1}\right| = \left|(-1)^{2n}\sqrt{2n} - (-1)^{2n+1}\sqrt{2n+1}\right| = \left|\sqrt{2n} + \sqrt{2n+1}\right| = \sqrt{2n} + \sqrt{2n+1} \geq \sqrt{2n} \geq 1$, což je spor. Proto limita neexistuje.

(h) Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)n^{-2} = 0$. Uvědomíme si, že $\left|\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)\right| \leq 1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (třeba vyřešíme rovnici $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$). Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ máme $\left|\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)n^-2 - 0\right| = \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)}{n^2}\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon$. Odtud plyne požadovaný výsledek.

(i) Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. Opět si uvědomíme, že $|\sin n| \leq 1$. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Pak pro všechna $n \geq n_0$ máme $\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Odtud plyne požadovaný výsledek.

Analogicky jako v příkladu (b) bychom mohli z definice ukázat, že pro všechna $a > 0$ je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$.

Výsledek z části (c) a (d) bychom mohli zobecnit na to, že pro $a \in (0, 1)$ je $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ a pro $b \in (1, \infty)$ je $\lim_{n\to\infty} b^n = \infty$. Důkaz by proběhl zcela analogicky.