Cvičení 6

Příklad 1. Spočtěte z definice, nebo z definice dokažte, že limita neexistuje:

(a) $\lim_{x\to 5} x$,

(b) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$,

(c) $\lim_{x\to 0} x\sin x$,

(d) $\lim_{x\to 0} \sin x$,

(e) $\lim_{x\to 0} f(x)$, kde f je definována předpisem $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$

Příklad 2. Spočtěte následující limity.

(a) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan x$

(b) $\lim_{x\to -\infty} (x+2)^2$

(c) $\lim_{x\to \infty} e^{-x}$

(d) $\lim_{x\to \infty} \frac{-3}{7+x}$

(e) $\lim_{x\to -7} \frac{-3}{7+x}$

(f) $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{\log x+1}$

(g) $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor - x$

(h) $\lim_{x\to 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x-1}$

(j) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$

(k) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+3x+5-\frac{1}{x}}{8x^3+4x^2-3}$

(l) $\lim_{x\to 2} \log(x-3)$

(m) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x}{2x^3+x^2-3x}$

(o) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

(p) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

(q) $\lim_{x\to \infty} x + \sin x$

(r) $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

(s) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9}$

(t) $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2-(1-x)^3}{1-x^n}$, $n \in \mathbb{N}$

(u) $\lim_{x\to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{2x} \right\rfloor \right\rfloor$

Cvičení 6 - výsledky

Příklad 1

(a) 5

(b) ∞

(c) 0

(d) 0

(e) neexistuje

Příklad 2

(a) 1

(b) ∞

(c) 0

(d) 0

(e) neexistuje

(f) 0

(g) neexistuje

(h) 1

(i) 6

(j) neexistuje

(k) 1/8

(l) neexistuje

(m) ∞

(n) $\frac{2}{3}$

(o) $\frac{3^{10}}{2^{10}}$

(p) 6

(q) ∞

(r) $\frac{12}{5}$

(s) $-\frac{1}{16}$

(t) 0

(u) $\frac{1}{2}$

Cvičení 6 - řešení

Příklad 1 (a) Ukážeme, že $\lim_{x\to 5} x = 5$. Nechť $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \varepsilon$. Pak pro $x \in P(5,\delta) : |x-5| < \delta = \varepsilon$, což jsme chtěli ukázat.

Příklad 1 (b) Ukážeme, že $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$. Nechť $K > 0$. Položme $\delta = \frac{1}{K}$. Pak pro všechna $x \in P^+(2,\delta)$ máme $x - 2 < \delta = \frac{1}{K}$, ekvivalentně $\frac{1}{x-2} > K$. Vskutku tedy $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$.

Příklad 1 (c) Ukážeme, že $\lim_{x\to 0} x \sin x = 0$. Využijeme odhadu $|\sin x| \le 1$ na $\mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Pak pro $x \in P(0,\delta)$ máme $|x\sin x - 0| = |x \sin x| \le |x| < \delta = \varepsilon$.

Příklad 1 (d) Ukážeme, že limita je rovna nule. Využijeme znalosti $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Nechť $0 < \varepsilon < 1$. Nalezneme $\varepsilon > \delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in P(0,\delta) : \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right|$, ekvivalentně

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon < \frac{\sin x}{x} - 1 < \varepsilon \\
1 - \varepsilon < \frac{\sin x}{x} < 1 + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Odtud pro $x \in P^+(0,\delta)$ máme

$$0 \le (1-\varepsilon)x < \sin x < (1+\varepsilon)x < 2\delta < 2\varepsilon.$$

Pro $x \in P^-(0,\delta)$ máme

$$-2\varepsilon < -2\delta < (1+\varepsilon)x < \sin x < (1-\varepsilon)x \le 0.$$

Odtud již plyne požadovaná limita.

Příklad 1 (e) Ukážeme, že limita neexistuje - pro všechna $A \in \mathbb{R}$ nalezneme ε takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in P(0,\delta)$ takové, že $|f(x) - A| \ge \varepsilon$. Nechť $A \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Nechť $\delta > 0$. Nyní si vezmeme dva body z $P(0,\delta)$, konkrétně $x_1 = -\frac{\delta}{2}$ a $x_2 = \frac{\delta}{2}$. Pak z definice f máme $f(x_1) = 0$ a $f(x_2) = 1$. Pak nutně jedna z těchto funkčních hodnot má vzdálenost od A aspoň $\frac{1}{3}$: kdyby tomu tak nebylo a $|A-1| < \frac{1}{3}$ a $|A-0| < \frac{1}{3}$, tak z trojúhelníkové nerovnosti máme $1 = |1-0| \le |1-A| + |A-0| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1$, což je spor.

Příklad 2 a.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan x \overset{\text{spoj.}}{=} \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

Příklad 2 b.

$$\lim_{x\to-\infty} (x+2)^2 = \lim_{x\to-\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 \overset{\text{VoAL}}{=} \infty$$

Příklad 2 c.

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} \overset{\text{VoAL}}{=} 0$$

Příklad 2 d.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3}{7+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{-3}{\frac{7}{x}+1} \overset{\text{VoAL}}{=} 0$$

Příklad 2 e. Pro pravé prstencové okolí dostáváme

$$\lim_{x\to-7+} \frac{-3}{7+x} \overset{\text{VoAL}}{=} \frac{-3}{\lim_{x\to-7+}(7+x)} = \infty$$

Pro levé prstencové okolí ovšem dostáváme

$$\lim_{x\to -7-} \frac{-3}{7+x} \overset{\text{VoAL}}{=} \frac{-3}{\lim_{x\to -7-}(7+x)} = -\infty$$

Limita tedy neexistuje.

Příklad 2 f.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x + 1} \overset{\text{VoAL}}{=} \frac{1}{\lim_{x\to\infty}(\log x + 1)} = 0$$

Příklad 2 g. Pro pravé prstencové okolí dostáváme

$$\lim_{x\to 1+} \lfloor x \rfloor - x \overset{\text{spoj.} + \text{VoAL}}{=} 1 - 1 = 0.$$

Pro levé prstencové okolí ovšem dostáváme

$$\lim_{x\to 1-} \lfloor x \rfloor - x \overset{\text{spoj.} + \text{VoAL}}{=} 0 - 1 = -1.$$

Limita tedy neexistuje.

Příklad 2 h.

Platí $\frac{1}{x} - 1 \le \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \le \frac{1}{x}$, a tedy

$$\forall x > 0\colon x\left(\frac{1}{x} - 1\right) \le x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \le x\frac{1}{x},$$
$$\forall x < 0\colon x\frac{1}{x} \le x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \le x\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Platí

$$\lim_{x\to 0_+} x\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x\to 0_+} 1 - x \overset{\text{spoj.}}{=} 1 = \lim_{x\to 0_+} 1 = \lim_{x\to 0_+} x\frac{1}{x}$$

Tedy z Věty o dvou strážnících dostáváme $\lim_{x\to 0_+} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$. Analogicky odvodíme $\lim_{x\to 0_-} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$, a tedy $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

Příklad 2 i.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x + 5 \overset{\text{spoj.}}{=} 6.$$

Poznamenejme, že výrazem $x - 1$ můžeme dělit, protože je na prstencových okolích bodu 1 nenulový.

Příklad 2 j.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+5)}{(x-1)}$$

Na pravých prstencových okolích 1 máme $x - 1 \ge 0$, $\lim_{x\to 1_+} x + 5 = 6 > 0$ a $\lim_{x\to 1_+} x - 1 = 0$, tedy podle Věty 23 ("omezená krát nulová") platí $\lim\limits_{x\to 1_+} \frac{(x+5)}{(x-1)} = \infty$. Analogicky odůvodníme $\lim\limits_{x\to 1_-} \frac{(x+5)}{(x-1)} = -\infty$. Tedy $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+5)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$ neexistuje.

Příklad 2 k.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3 + 3x + 5 - \frac{1}{x}}{8x^3 + 4x^2 - 3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3(1 + 3\frac{1}{x^2} + 5\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4})}{x^3(8 + 4\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^3})} == \lim_{x\to -\infty} \frac{1 + 3\frac{1}{x^2} + 5\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}{8 + 4\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^3}}$$
$$\overset{\text{AL}}{=} \frac{1 + 3\cdot 0 - 5\cdot 0 - 0}{8 + 4\cdot 0 - 3\cdot 0} = \frac{1}{8}$$

Příklad 2 l.

Výraz $\log(x-3)$ není na žádném prstencovém okolí bodu 2 definován, limita tudíž neexistuje.

Příklad 2 m.

Na pravých prstencových okolích 1 máme $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \geq 0$, $\lim_{x\to 1_+} x = 1 > 0$. Z věty o limitě složené funkce (varianta zprava, zprava) pro $f(y) = \frac{1}{y}$, $A = 0$, $B = \infty$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$, $c = 1$ s předpokladem (P) (g je na intervalu $(1, \infty$ prostá) plyne

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \overset{\text{VOLSF}}{=} \infty.$$

Tedy podle Věty 23 ("omezená krát nulová") platí

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \infty.$$

Příklad 2 n.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x}{2x^3+x^2-3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-2)}{x(2x^2+x-3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-2}{2x^2+x-3} \overset{\text{spoj.}}{=} \frac{2}{3}$$

Příklad 2 o.

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} \overset{\text{spoj.} + \text{VoAL}}{=} \frac{3^{10}}{2^{10}}$$

Příklad 2 p.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^3+7x^2+6x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^3+7x^2+6x}{x} = \lim_{x\to 0} 6x^2+7x+6 \overset{\text{spoj.}}{=} 6$$

Příklad 2 q.
Užitím věty o dvou policajtech na $x-1 \leq x+\sin x$ dostáváme $\lim_{x\to\infty} x+\sin x = \infty$.
Příklad 2 r.

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{9+2x}+5}{\sqrt{9+2x}+5} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot 2+2^2}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot 2+2^2} =$$
$$= \lim_{x\to 8} \frac{(9+2x-25)((\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)} = \lim_{x\to 8} \frac{2(x-8)((\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)} = \lim_{x\to 8} \frac{2((\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt{9+2x}+5)} \overset{\text{spoj.} + \text{VoAL}}{=} \frac{12}{5}$$

Příklad 2 s.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9} \cdot \frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{1+x}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+13)-4(1+x)}{x^2-9} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-3(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{-3}{x+3} \overset{\text{spoj.} + \text{VoAL}}{=} -\frac{1}{16}$$