

## Cvičení 8

**Příklad 1.** Limity s parametrem.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^n}, n \in \mathbb{Z},$       (c)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}, a \in \mathbb{R},$       (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, a \in \mathbb{R}, a > 0,$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7} - \sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n}, n \in \mathbb{Z},$       (d)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}, m, n \in \mathbb{N},$       (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x, a \in \mathbb{R}.$

**Příklad 2.** Pomocí Heineho věty následující limity spočítejte, nebo dokažte, že neexistují.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$       (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cotan\left(\frac{1}{x}\right)$       (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$   
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n+\cos \frac{3}{n}}}{\sqrt[6]{n^2 + \sin \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{n}}$       (g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\frac{1}{x} + \frac{\sin x}{2x}\right)$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$       (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(\sqrt{n^2 + \sin^2 n} - \sqrt{n^2 - \cos^2 n})}{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}$

**Příklad 3.** Zkouškové příklady:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\arctan(\arcsin x)},$       (g)  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})},$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{x^2},$       (h)  $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 - \sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1 - \cos x}}},$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{5}{2}} \arcsin(\sqrt{x^5 + 1} - \sqrt{x^5 - 1}),$       (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1\right)^{\frac{x^2+1}{3x}},$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2) \frac{\cos x}{1 + \sin x},$       (j)  $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x})}{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}},$   
 (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log \sqrt{1+x^2}},$

## Cvičení 8 - výsledky

### Příklad 1

	$n \in \mathbb{Z}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^n}$
	$> 1$ , liché	$\infty$
(a)	$> 1$ , sudé	$\nexists$
	1	1
	$< 1$	0

	$n \in \mathbb{Z}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7} - \sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n}$
	$> 1$ , liché	$-\infty$
(b)	$> 1$ , sudé	$\nexists$
	1	$\frac{-1}{12}$
	$< 1$	0

(c)  $\cos a$

(d)  $(-1)^{m-n} \frac{m}{n}$

(e)  $\log(a)$

(f)  $e^{2a}$

### Příklad 2

(a) neexistuje

(d) neexistuje

(g)  $-\infty$

(b)  $\frac{9}{2}$

(e)  $\frac{1}{2}$

(c) neexistuje

(f) 1

### Příklad 3

(a) 1

(e) 1

(h)  $e^{-\sqrt[4]{2}}$

(b)  $\frac{1}{2}$

(f)  $-1$

(i)  $e^{8/3}$

(c) 1

(d)  $24\pi$

(g) 1

(j)  $2\sqrt[3]{15}$

## Cvičení 8 - řešení

**Příklad 1 a** Necht'  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^n} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{x^n \cdot (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^n \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^{n-1} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-1}} \end{aligned}$$

Dále platí  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \stackrel{\text{VoAL} + \text{spoj.}}{=} \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = 1$ .

Je-li  $n-1 = 0$ , čili  $n = 1$ , pak  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1$ .

Je-li  $n-1 > 0$  a sudé, čili  $n > 1$  a liché, pak zlomek  $\frac{1}{x^{n-1}}$  je kladný nezávisle na kladnosti  $x$ . Proto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-1}} = \infty$  (nebo  $\frac{1}{+0} = \infty$ ).

Je-li  $n-1 > 0$  a liché, čili  $n > 1$  a sudé, pak zlomek  $\frac{1}{x^{n-1}}$  je kladný pro kladná  $x$  a záporný pro záporná  $x$ . Platí tedy  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{n-1}} = -\infty$  a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{n-1}} = \infty$ . Tedy zadaná limita nekonverguje.

Je-li  $n-1 < 0$ , čili  $n < 1$ , pak  $\frac{1}{x^{n-1}} = x^{1-n}$ , kde  $1-n > 0$ . Proto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ .

**Závěr:**

$n \in \mathbb{Z}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^n}$
$> 1$ , liché	$\infty$
$> 1$ , sudé	$\nexists$
$1$	$1$
$< 1$	$0$

**Příklad 1 b**

Necht'  $n \in \mathbb{Z}$ .

Použijeme vzorec  $A^n - B^n$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7} - \sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7} - \sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x^2+7})^2 + \sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x^3+7} + (\sqrt[3]{x^3+7})^2}{(\sqrt[3]{x^2+7})^2 + \sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x^3+7} + (\sqrt[3]{x^3+7})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+7 - (x^3+7)}{(x-1)^n (\sqrt[3]{x^2+7})^2 + \sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x^3+7} + (\sqrt[3]{x^3+7})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2(x-1)}{(x-1)^n \cdot x^2 \left( \left( \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + \left( \sqrt[3]{1 + \frac{7}{x^3}} \right)^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^{n-1} \left( \left( \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + \left( \sqrt[3]{1 + \frac{7}{x^3}} \right)^2 \right)} = \\ &\stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\left( \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + \left( \sqrt[3]{1 + \frac{7}{x^3}} \right)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^{n-1}} \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\left( \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + \left( \sqrt[3]{1 + \frac{7}{x^3}} \right)^2} &\stackrel{\text{VoAL} + \text{spoj.}}{=} \frac{-1}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\left( \sqrt[3]{\frac{1}{1} + \frac{7}{1^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{1} + \frac{7}{1^3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{1^3}} + \left( \sqrt[3]{1 + \frac{7}{1^3}} \right)^2}} = \frac{-1}{12}. \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^{n-1}} &\stackrel{\text{VOLS F (P)}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^{n-1}} \end{aligned}$$

V závislosti na kladnosti a sudosti čísla  $n-1$  limita  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^{n-1}}$  nekonverguje, či konverguje k nekonečnu, nebo k 0, nebo k 1.

**Závěr:**

$n \in \mathbb{Z}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x^2+7} - \sqrt[n]{x^3+7}}{(x-1)^n}$
$> 1$ , liché	$-\infty$
$> 1$ , sudé	$\frac{7}{2}$
1	$\frac{-1}{12}$
$< 1$	0

**Příklad 1 c** Necht'  $a \in \mathbb{R}$ .

Použijeme vzorec z přednášky:  $\sin x - \sin a = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)$ . Pak platí následující.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \stackrel{\text{vzorec}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \stackrel{\text{spoj.} + \text{ZL}}{=} \cos\left(\frac{a+a}{2}\right) \cdot 1 = \cos a$$

Výpočet platí pro libovolné  $a \in \mathbb{R}$ .

**Příklad 1 d**

Necht'  $m, n \in \mathbb{N}$ . Provedme nejdříve úpravu:  $\sin(mx) = \sin(mx - m\pi + m\pi) = \sin(m(x - \pi) + m\pi) \stackrel{\text{součtový vzorec}}{=} \sin(m(x - \pi)) \cos(m\pi) + \cos(m(x - \pi)) \sin(m\pi)$ . Přičemž  $\cos(m\pi) = (-1)^m$  a  $\sin(m\pi) = 0$ , neb  $m \in \mathbb{N}$ . Proto platí  $\sin(mx) = (-1)^m \sin(m(x - \pi))$  a analogicky  $\sin(nx) = (-1)^n \sin(n(x - \pi))$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} &\stackrel{\text{úprava}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(-1)^m \sin(m(x - \pi))}{(-1)^n \sin(n(x - \pi))} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{(-1)^m}{(-1)^n} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(m(x - \pi))}{m(x - \pi)} \frac{m(x - \pi)}{n(x - \pi)} \frac{n(x - \pi)}{\sin(n(x - \pi))} = \\ &\stackrel{\text{VoAL} + \text{VOLSF (P)} + \text{ZL}}{=} (-1)^{m-n} \cdot 1 \cdot \frac{m}{n} \cdot 1 = (-1)^{m-n} \frac{m}{n} \end{aligned}$$

**Příklad 1 e**

Necht'  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ .

Je-li  $a = 1$ , pak  $\frac{a^x - 1}{x - a} = \frac{0}{x - a}$ , a proto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = 0$ .

Pro  $a \neq 1$  užijeme vzorec  $y = e^{\log(y)}$  pro  $y > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log(a)} - 1}{x \log(a)} \cdot \log(a) \stackrel{\text{VoAL} + \text{VOLSF (P)}}{=} \log(a) \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \stackrel{\text{ZL}}{=} \log(a) \cdot 1 = \log(a)$$

**Příklad 1 f** Necht'  $a \in \mathbb{R}$ .

Je-li  $a = 0$ , pak  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1$ .

Pro  $a \neq 0$  použijeme vzorec  $a = e^{\log(a)}$  pro  $a > 0$ . Je proto třeba nejdříve ověřit, že  $\frac{x+a}{x-a} > 0$ . Je-li  $a > 0$ , pak kýžená nerovnost nastane v případě, že  $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ . To je splněno pro dostatečně velká  $x$  a jelikož  $x \rightarrow \infty$ , můžeme předpokládat, že  $\frac{x+a}{x-a} > 0$ . Podobně pro  $a < 0$  dostáváme, že stačí, aby  $x > -a$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x \stackrel{\text{vzorec}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}$$

Spočítejme nyní  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(1 + \frac{2a}{x-a}\right) \cdot \frac{\frac{2a}{x-a}}{\frac{2a}{x-a}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{x-a} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)}{\frac{2a}{x-a}} \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} 2a \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} \stackrel{\text{ZL}}{=} 2a \cdot 1$$

Mohli jsme použít VOLSF, neb  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2a}{x-a} = 0$ .

Pltí tedy následující.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x \stackrel{\text{vzorec}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)} \stackrel{\text{VOLSF (S)}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)} = e^{2a}$$

**Příklad 2. (a)** Ukážeme, že limita neexistuje. K tomu uvážíme posloupnosti  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  definované předpisem  $x_n = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}$  a  $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{N}$ . Pak  $x_n \rightarrow 0$  a  $y_n \rightarrow 0$ . Dále spočítáme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{x_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin(2n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{y_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Z Heineho věty nyní vyvodíme, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$  neexistuje, protože jsme našli dvě posloupnosti  $\{x_n\}$  a  $\{y_n\}$  konvergující k nule takové, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{x_n}\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{y_n}\right)$ .

**Příklad 2. (b)** Použijeme Heineho větu na posloupnost  $x_n = n \rightarrow \infty$ . Počítejme

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x + \cos \frac{3}{x}}}{\sqrt[6]{x^2 + \sin \frac{2}{x}} - \sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1 - x - \cos\left(\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2 + \sin\left(\frac{2}{x}\right)} - x} \cdot \frac{(x^2 + \sin\left(\frac{2}{x}\right))^{\frac{2}{6}} + (x^2 + \sin\left(\frac{2}{x}\right))^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}(x + \cos\left(\frac{3}{x}\right))^{\frac{1}{3}} + (x + \cos\left(\frac{3}{x}\right))^{\frac{2}{3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{3}{x}\right)}{x^2 + \sin\left(\frac{2}{x}\right) - x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \sin\left(\frac{2}{x}\right)} + x}{1} \cdot \frac{x^{\frac{4}{6}} \left( \left(1 + \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}\right)^{\frac{2}{6}} + \left(1 + \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}\right)^{\frac{1}{6}} + 1 \right)}{x^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{x}\right)^{\frac{2}{3}}} \\ &\stackrel{\text{AL+VoLSF(P)}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{3}{x}\right)}{\sin\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot \frac{x \left( \sqrt{1 + \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}} + 1 \right)}{1} \cdot \frac{3}{3} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{3}{x}\right)}{\left(\frac{3}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^2 \cdot \frac{\frac{2}{x}}{\sin\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot \frac{x}{2} \cdot x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{1 + \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{3}{x}\right)}{\left(\frac{3}{x}\right)^2} \cdot 9 \cdot \frac{\frac{2}{x}}{\sin\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{1 + \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}} + 1 \right) \\ &\stackrel{\text{AL+VoLSF(P)} + \text{spoj.}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 - \cos y}{y^2} \right) \cdot 9 \cdot \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{y}{\sin y} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \stackrel{\text{ZL}}{=} \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Přičemž limitu výrazu  $1 + \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}$  jsme počítali následujícím způsobem.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} \stackrel{\text{VoAL} + \text{VOLSF(P)}}{=} 1 + \lim_{y \rightarrow y} \frac{\sin(y)}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} = 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

Z Heineho věty je tedy i původní limita pro  $n$  rovna  $\frac{9}{2}$ .

**Příklad 2. (c)** Ukážeme, že limita neexistuje. Uvažme posloupnosti  $x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$  a  $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ . Pak  $x_n$  konverguje k  $\frac{\pi}{2}$  zleva a  $y_n$  konverguje k  $\frac{\pi}{2}$  zprava. Vypočteme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) = \infty$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) = -\infty.$$

Z Heineho věty tudíž dostáváme, že  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$  neexistuje.

**Příklad 2. (d)** Ukážeme, že limita neexistuje. Uvažujme posloupnosti  $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a  $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + n\pi}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pak  $x_n$  a  $y_n$  obě konvergují k 0. Spočítáme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cotan\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cotan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cotan\left(\frac{1}{y_n}\right) = \cotan\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Z Heineho věty dostáváme, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \cotan\left(\frac{1}{x}\right)$  neexistuje.

**Příklad 2. (e)** Použijeme Heineho větu pro  $x_n = n \rightarrow \infty$ . Počítáme tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Nejdříve upravíme

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Počítáme tedy dvě limity. Spočítejme nejdříve limitu vnitřní funkce první limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = 0.$$

Označme  $g(x) = \sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}$  a  $f(y) = \frac{\arcsin y}{y}$ . Již jsme spočetli  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Snadno ověříme, že pro  $x \in (1, \infty)$  je  $g(x)$  definována a kladná (speciálně  $g(x) \neq 0$ ), a tedy můžeme použít VoLSF(P). Dostáváme, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin y}{y}.$$

Položme nyní  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$  a  $g(y) = \arcsin y$ . Pak  $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = 0$  a  $g$  je prostá. Z VoLSF(P) tudíž dostáváme, že

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin y}{y} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}} \stackrel{\text{ZL}}{=} 1.$$

Dále spočítáme druhou limitu:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin^2 x - x^2 + \cos^2 x}{x^2 + 1 - x^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left( \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{\cos^2 x}{x^2}} \right)}{x \left( \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{\cos^2 x}{x^2}} \right)} \stackrel{\text{AL+VoLSF(P)}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Příklad 2. (f)** Položme  $f(y) = \sqrt{\tan^2 y + 1} \left(\frac{\pi}{2} - y\right)$  a  $g(x) = \arctan x$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$  a zároveň  $g(x) \neq \frac{\pi}{2}$  na  $(1, \infty)$ . Je splněna podmínka (P) VoLSF. Dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sqrt{\tan^2 y + 1} \left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sqrt{(\tan^2 y + 1) \left(\frac{\pi}{2} - y\right)^2}$$

Nyní se podíváme na limitu vnitřní funkce. Počítejme

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan^2 y + 1) \left(\frac{\pi}{2} - y\right)^2 = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} \left(\frac{\pi}{2} - y\right)^2 = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - y)} \left(\frac{\pi}{2} - y\right)^2.$$

Opět použijeme VoLSF. Položíme  $f(x) = \frac{x^2}{\sin^2 x}$  a  $g(y) = \frac{\pi}{2} - y$ . Pak  $\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(y) = 0$  a  $g$  je prostá. Dle VoLSF(P) tudíž dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - y)} \left(\frac{\pi}{2} - y\right)^2 &= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(g(y)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sin^2 x} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2}} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}} \stackrel{\text{ZL}}{=} \frac{1}{1 \cdot 1} = 1. \end{aligned}$$

**Příklad 2. (g)** Spočítáme prvně limitu vnitřní funkce:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{2x} \stackrel{\text{AL}+0 \text{ krát omezená}}{=} 0.$$

Označme  $f(y) = \log y$  a  $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{2x}$ . Právě jsme spočítali, že  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Zároveň vidíme, že  $g(x) \neq 0$  na  $(1, \infty)$ . Z VoLSF(P) dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \log y = -\infty.$$

**Příklad 3 (a)** Budeme chtít využít známých limit a VoLSF.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\arctan(\arcsin x)} \cdot \frac{\tan x}{\tan x} \cdot \frac{\arcsin x}{\arcsin x} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\arcsin x}{\arctan(\arcsin x)} \cdot \frac{x}{\arcsin x} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 1.$$

Poslední rovnost platí, protože:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \stackrel{\text{VoLSF}}{=} 1$ , kde  $g(x) = \tan x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  (ze spojitosti) a  $f(y) = \frac{\sin y}{y}$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$  (známá limita) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ , víme z předchozích cvičení, neb se jedná o limitu odvozenou ze známé limity.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\arctan(\arcsin x)} \stackrel{\text{VoLSF}}{=} 1$ , kde  $g(x) = \arcsin x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  (ze spojitosti) a  $f(y) = \frac{y}{\arctan y}$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$  (odvozené od známé limity) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$ , víme z předchozích cvičení, neb se jedná o limitu odvozenou ze známé limity.

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

**Příklad 3 (b)** Budeme chtít využít známých limit a VoLSF.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{x^2} \cdot \frac{\arctan x}{\arctan x} \cdot \frac{\arctan x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{(\arctan x)^2} \cdot \frac{(\arctan x)^2}{x^2} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{2}.$$

Poslední rovnost platí, protože:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{(\arctan x)^2} \stackrel{\text{VoLSF}}{=} \frac{1}{2}$ , kde  $g(x) = \arctan x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  (ze spojitosti) a  $f(y) = \frac{1 - \cos y}{y^2}$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \frac{1}{2}$  (odvozeno od známé limity) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \cdot \frac{\arctan x}{x} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 1$ , víme z předchozích cvičení, neb se jedná o limitu odvozenou ze známé limity.

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

**Příklad 3 (c)**

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{5}{2}} \arcsin(\sqrt{x^5+1} - \sqrt{x^5-1} \cdot \frac{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}) = \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{5}{2}} \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}{2} = \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}} \cdot \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^5}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^5}}} \stackrel{\text{VOAL}+\text{spoj.}}{=} \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

První VOAL rovnost platí, protože:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} 1,$$

kde  $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \stackrel{\text{VOAL}+\text{spoj.}}{=} 0$  a  $f(y) = \frac{\arcsin y}{y}$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$  (známá limita) a platí podmínka (P). Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

**Příklad 3 (d)** Budeme chtít využít známých limit a VOLSF.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2) \frac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{(x - \frac{3\pi}{2})^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{4x^2 - 9\pi^2}{x - \frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{\cos x}{x - \frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{1 + \sin x} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 24\pi.$$

Poslední rovnost platí, protože:

- $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{4x^2 - 9\pi^2}{x - \frac{3\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(2x-3\pi)(2x+3\pi)}{x - \frac{3\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (2x + 3\pi) \cdot 2 = 12\pi$  (ze spojitosti).
- $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{3\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{2})}{x - \frac{3\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{3\pi}{2})}{x - \frac{3\pi}{2}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} 1$ , kde  $g(x) = x - \frac{3\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} g(x) = 0$  (ze spojitosti) a  $f(y) = \frac{\sin y}{y}$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$  (známá limita) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{1 + \sin x} = \lim_{y \rightarrow -\frac{3\pi}{2}} \frac{(-y - \frac{3\pi}{2})^2}{1 + \sin(-y)} = \lim_{y \rightarrow -\frac{3\pi}{2}} \frac{(y + \frac{3\pi}{2})^2}{1 - \sin(y)}$  dle VOLSF (P) ( $x \rightarrow \frac{3\pi}{2} \iff -x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}$ ).
- $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}} \frac{(x + \frac{3\pi}{2})^2}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}} \frac{(x + \frac{3\pi}{2})^2}{1 - \cos(x - \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}} \frac{(x + \frac{3\pi}{2})^2}{1 - \cos(x + \frac{3\pi}{2})}$ , kde první rovnost plyne z předchozího kroku. Dále platí  $g(x) = x + \frac{3\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}} g(x) = 0$  (ze spojitosti) a  $f(y) = \frac{y^2}{1 - \cos y}$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 2$  (odvozeno od známé limity). Tedy dle VOLSF (P) platí, že  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{1 + \sin x} = 2$ .

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

**Příklad 3 (e)** Budeme chtít využít známých limit a VOLSF.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan((\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}})}{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}} = \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 1. \end{aligned}$$

Poslední rovnost platí, protože:



- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}} \stackrel{\text{VOLSF} + \text{spoj.}}{=} 1$ , kde  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  a  $f(y) = \frac{\arctan y}{y}$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$  (odvozeno od známé limity) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{x^2}}} \stackrel{\text{VOAL} + \text{spoj.} + \text{omez.}}{=} \frac{2}{2} = 1$ .

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

### Příklad 3 (f)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log(\sqrt{1+x^2})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\log(\sqrt{1+x^2})} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} - 1} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin^2 x} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2} - 1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} - 1} \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \left( - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{\sin^2 x} \right) \\ &= \frac{1}{1} \cdot 2 \cdot 1^2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = -1. \end{aligned}$$

Spočetli jsme

- první limitu pomocí VOLSF:  $f(y) = \log(y)/(y-1)$ ,  $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ , předpoklad (P),
- druhou limitu použitím vzorce  $a^2 - b^2$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)}{1+x^2 - 1}$ ,
- třetí limitu jako známou limitu,
- čtvrtou limitu pomocí VOLSF:  $f(y) = (1 - \cos y)/y^2$ ,  $g(x) = \sin x$ , předpoklad (P).

### Příklad 3 (g)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1 + \sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left( \frac{\sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})} \right)^2 \cdot \left( \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} + \frac{e^{\frac{1}{2} \sin x} - 1}{\frac{1}{2} \sin x} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin x}{x} \right) \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \left( \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}} \right)^2 \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} + \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{2} \sin x} - 1}{\frac{1}{2} \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2} \sin x}{x} \right) \\ &= \left( \frac{1}{1} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Spočetli jsme

- první limitu pomocí VOLSF:  $f(y) = \log(1+y)/y$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ , předpoklad (P), a příkladu 7.3(i),
- druhou limitu pomocí VOLSF:  $f(y) = (1 - \cos y)/y^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ , předpoklad (P),
- třetí limitu pomocí VOLSF:  $f(y) = (e^y - 1)/y$ ,  $g(x) = (\sin x)/2$ , předpoklad (P),
- čtvrtou limitu pomocí AL a známé limity.

### Příklad 3 (h) Značíme $\exp(x) = e^x$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1 - \cos x}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \exp \left( \log \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1 - \cos x}} \right)$$

Spočteme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \log \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right) \frac{1}{\sqrt[4]{1 - \cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right)}{-\sqrt{\arcsin x}} \cdot \frac{-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^2}{1 - \cos x}} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \left( \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right)}{-\sqrt{\arcsin x}} \right) \cdot \frac{-1}{\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{x}{\arcsin x}}} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[4]{\frac{1 - \cos x}{x^2}}} \\ &= 1 \cdot \frac{-1}{1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[4]{1/2}}} = -\sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

Spočetli jsme

- první limitu pomocí VOLSF:  $f(y) = \log(1+y)/y$ ,  $g(x) = -\sqrt{\arcsin x}$ , předpoklad (P), a příkladu 7.3(i); limitu  $g(x)$  spočteme ze spojitosti,
- druhou limitu pomocí spojitosti odmocniny a VOLSF:  $f(y) = (\sin y)/y$ ,  $g(x) = \arcsin x$ , předpoklad (P),
- třetí limitu pomocí spojitosti odmocniny a známé limity.

Díky spojitosti exponenciály se pak původní limita rovná  $e^{-\sqrt[3]{2}}$ .

**Příklad 3 (i)** Jako v předchozích případech stačí spočítat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right) \frac{x^2 + 1}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)}{2e^{\frac{4x}{x+1}} - 2} \cdot \frac{2(e^{\frac{4x}{x+1}} - 1)}{\frac{4x}{x+1}} \cdot \frac{4x}{x+1} \cdot \frac{x^2 + 1}{3x} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)}{2e^{\frac{4x}{x+1}} - 2} \cdot 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{4x}{x+1}} - 1}{\frac{4x}{x+1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x+1} \cdot \frac{x^2 + 1}{3x} \\ &= 1 \cdot (2 \cdot 1) \cdot \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Spočetli jsme

- první limitu pomocí VOLSF:  $f(y) = \log(y)/(y-1)$ ,  $g(x) = 2 \exp(\frac{4x}{x+1}) - 1$ , předpoklad (P),
- druhou limitu pomocí VOLSF:  $f(y) = (e^y - 1)/y$ ,  $g(x) = (4x)/(x+1)$ , předpoklad (P),
- třetí limitu standardně.

Díky spojitosti exponenciály se pak původní limita rovná  $e^{8/3}$ .

**Příklad 3 (j)**

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \exp \left( \frac{1}{x} \log \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right) \right)$$

Opět stačí spočítat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \log \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)}{\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} - 1} \left( \frac{4^x - 1}{3} + \frac{5^x - 1}{3} + \frac{6^x - 1}{3} \right) \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)}{\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} - 1} \left( \frac{e^{x \log 4} - 1}{x \log 4} \frac{x \log 4}{3} + \frac{e^{x \log 5} - 1}{x \log 4} \frac{x \log 5}{3} + \frac{e^{x \log 6} - 1}{x \log 6} \frac{x \log 6}{3} \right) \frac{1}{x} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)}{\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} - 1} \cdot \frac{1}{3} \left( \log 4 \left( \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{x \log 4} - 1}{x \log 4} \right) + \log 5 \left( \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{x \log 5} - 1}{x \log 5} \right) + \log 6 \left( \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{x \log 6} - 1}{x \log 6} \right) \right) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} (\log 4 + \log 5 + \log 6) = \frac{1}{3} \log 120 = \frac{1}{3} \log(8 \cdot 15) = \log(2\sqrt[3]{15}). \end{aligned}$$

Díky spojitosti exponenciály se pak původní limita rovná  $2\sqrt[3]{15}$ .