Cvičení 9

Příklad 1 (Základy, aritmetika derivací)**.** Určete definiční obor funkce, derivaci funkce a definiční obor spočtené derivace.

(a) $f(x) = x^5 - 17x^3 + \sqrt{3x} - 8$

(b) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$

(c) $f(x) = x + 2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$

(d) $f(x) = x \log x + x \log_3 x + 2e^x$

(e) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

(f) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$

(g) $f(x) = \frac{x^2-2x+7}{x^2+5x-6}$

(h) $f(x) = \log x + \frac{\cos x}{\pi}$

(i) $f(x) = \frac{x \cos x - 2}{\log x}$

(j) $f(x) = \tan x - \sin x$

(k) $f(x) = \sin x \cos x - \tan x$

(l) $f(x) = \arcsin x - 3 \operatorname{arccotan} x$

(m) $f(x) = 2 \arctan x + 5 \arccos x$

Příklad 2 (Složené funkce)**.** Určete definiční obor funkce, derivaci funkce a definiční obor spočtené derivace.

(a) $f(x) = (x^2 + 50x + 12)^{78}$

(b) $f(x) = x^3(x+2)^8(x-7)^{-11}$

(c) $f(x) = \operatorname{arccotan}(2x)$

(d) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$

(e) $f(x) = \log(x^2 + x + 2)$

(f) $f(x) = \cos(x^3 - x + 2)^9$

(g) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(h) $f(x) = \frac{1}{\log x}$

(i) $f(x) = \cos^9(x^3 - x + 2)$

(j) $f(x) = \sin(\sin(\sin x)))$

(k) $f(x) = 2 \log \frac{x^2-1}{x^2+1}$

(l) $f(x) = \sin^2 x - \sin(x^2)$

(m) $f(x) = \log(\log^2(\log^3(x)))$

(n) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

(o) $f(x) = \frac{x^2(1-x)^3}{1+x}$

(p) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

(q) $f(x) = x^x$

(r) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(s) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

(t) $f(x) = \arcsin(\cos x)$

(u) $f(x) = \log(\arccos x)$

(v) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccotan} \frac{\sqrt{2}}{x}$

(w) $f(x) = e^{x^2-x+1} - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

(x) $f(x) = \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$

(y) $f(x) = x\left(\arcsin(x^3)\right)^2$

Příklad 3 (Funkce definované „po větvích“)**.** Určete definiční obor funkce, derivaci funkce a definiční obor spočtené derivace.

(a) $f(x) = |x|$

(b) $f(x) = \min\{x^2, -x^2 + 3x\}$

(c) $f(x) = \max\{-x^2, 2x - 3\}$

(d) $f(x) = |\log |x||$

(e) $f(x) = e^{\log |x|}$

(f) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0] \\ \log(1+x), & x \in (0, \infty) \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in (-\infty, 1) \\ (1-x)(2-x), & x \in [1, 2] \\ -(2-x), & x \in (2, \infty) \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$

Cvičení 9 - výsledky

Příklad 1

(a) $\mathcal{D}_f = [0,\infty)$; $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - 51x^2 + 5x^4$; $\mathcal{D}_{f'} = (0,\infty)$

(b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = e^x(1+x^2)$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

(c) $\mathcal{D}_f = [0,\infty)$; $f'(x) = 1 + \frac{1}{4x^{3/4}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\mathcal{D}_{f'} = (0,\infty)$

(d) $\mathcal{D}_f = (0,\infty)$; $f'(x) = 1 + 2e^x + \frac{1}{\log 3} + (1 + \frac{1}{\log 3})\log x$; $\mathcal{D}_{f'} = (0,\infty)$

(e) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \log(\frac{3}{2})(\frac{3}{2})^x$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

(f) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $f'(x) = \frac{9-4x-x^2}{x^4}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(g) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-6,1\}$; $f'(x) = \frac{-23-26x+7x^2}{(x-1)^2(6+x)^2)}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{-6,1\}$

(h) $\mathcal{D}_f = (0,\infty)$; $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\sin x}{\pi}$; $\mathcal{D}_{f'} = (0,\infty)$

(i) $\mathcal{D}_f = (0,\infty)\setminus\{1\}$; $f'(x) = \frac{2+x\cos(x)(-1+\log(x))-x^2\log(x)\sin(x)}{x\log^2(x)}$; $\mathcal{D}_{f'} = (0,\infty)\setminus\{1\}$

(j) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus(\pi/2+\pi\mathbb{Z})$; $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x)$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$

(k) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus(\pi/2+\pi\mathbb{Z})$; $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) - \frac{1}{\cos^2(x)}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$

(l) $\mathcal{D}_f = [-1,1]$; $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{(1+x^2)}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-1,1)$

(m) $\mathcal{D}_f = [-1,1]$; $f'(x) = -\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{1+x^2}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-1,1)$

Příklad 2

(a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 78(x^2+50x+12)^{77}\cdot(x^2+50x+12)$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

(b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{7\}$; $f'(x) = -\frac{3x^2(x+2)^7(31x+14)}{(x-7)^{-12}}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{7\}$

(c) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = -\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

(d) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{3+4x-3x^2}{(1+x^2)^2}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

(e) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

(f) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = -\sin(x^3-x+2)^9\cdot 9(x^3-x+2)^8\cdot(3x^2-1)$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

(g) $\mathcal{D}_f = [-2,2]$; $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-2,2)$

(h) $\mathcal{D}_f = (0,\infty)\setminus\{1\}$; $f'(x) = -\frac{1}{x\log^2 x}$; $\mathcal{D}_{f'} = (0,\infty)\setminus\{1\}$

(i) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 9\cos^8(x^3-x+2)\cdot(-\sin(x^3-x+2)\cdot(3x^2-1)$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

(j) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \cos(\sin(\sin(x)))\cdot\cos(\sin(x))\cdot\cos x$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

(k) $\mathcal{D}_f = (-\infty,1)\cup(1,\infty)$; $f'(x) = \frac{8x}{x^4-1}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-\infty,1)\cup(1,\infty)$

(l) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \sin(2x) - 2x\cos(x^2)$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

(m) $\mathcal{D}_f = (1,\infty)\setminus\{e\}$; $f'(x) = \frac{6}{x\log(x)\log(\log^3(x))}$; $\mathcal{D}_{f'} = (1,\infty)\setminus\{e\}$

(n) $\mathcal{D}_f = (-3,3)$; $f'(x) = 9\cdot(9-x^2)^{-\frac{3}{2}}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-3,3)$

(o) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $f'(x) = \frac{x(1-x)^2\left(2-4x^2-4x\right)}{(1+x)^2}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

(p) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $f'(x) = 2e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^3}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(q) $\mathcal{D}_f = (0,\infty)$; $f'(x) = x^x\cdot(\log x + 1)$; $\mathcal{D}_{f'} = (0,\infty)$

(r) $\mathcal{D}_f = (0,\infty)$; $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-\log x}{x^2}+1\right)$; $\mathcal{D}_{f'} = (0,\infty)$

(s) $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,\pi+2k\pi)$; $f'(x) = e^{\cos x\cdot\log\sin x}\cdot\left(-\sin x\log\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$; $\mathcal{D}_{f'} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,\pi+2k\pi)$

(t) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

(u) $\mathcal{D}_f = [-1,1)$; $f'(x) = \frac{1}{\arccos x}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-1,1)$

(v) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $f'(x) = \frac{-1}{2+x^2}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(w) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = e^{x^2-x+1}\cdot(2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}\cdot\frac{e^{2x}\left(1-e^{2x}\right)}{(e^{2x}+1)^2}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

(x) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus(0,1)$; $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt{x^2-1}-\log x\cdot 2x^2}{x^3-x}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus(0,1)$

(y) $\mathcal{D}_f = [-1,1]$; $f'(x) = \left(\arcsin\left(x^3\right)\right)^2 + 2x\cdot\arcsin\left(x^3\right)\cdot\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-1,1)$

Příklad 3

(a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \operatorname{sgn} x$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; v $x = 0$ je derivace zleva -1, zprava 1

(b) $f' = \begin{cases} 3 - 2x, & x \in (-\infty, 0) \cup (3/2, \infty), \\ 2x, & x \in (0, 3/2) \\ nedef, & x \in \{0, 3/2\} \end{cases}$,

$f'_-(0) = 3$, $f'_+(0) = 0$, $f'_-(3/2) = 3$, $f'_+(3/2) = 0$

(c) $f' = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty), \\ -2x, & x \in (-3, 1) \\ nedef, & x \in \{-3, 1\} \end{cases}$,

$f'_-(-3) = 2$, $f'_+(-3) = 6$, $f'_-(1) = -2$, $f'_+(3/2) = 2$

(d) $f' = \begin{cases} 1/x, & x \in (-1, 0) \cup (1, \infty), \\ -1/x, & x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1),, \\ nedef, & x \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$

$f'_-(-1) = -1$, $f'_+(-1) = 1$, $f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = -\infty$, $f'_-(1) = -1$, $f'_+(1) = 1$

(e) $f'(x) = \operatorname{sgn} x$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(f) $f' = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0], \\ 1/(1+x), & x \in (0, \infty) \end{cases}$,

Pozor. Bod $x = 0$ je třeba vyšetřit zvláště.

(g) $f' = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 1], \\ 2x - 3, & x \in (1, 2), \\ 1, & x \in [2, \infty) \end{cases}$,

Pozor. Body $x = 1$ a $x = 2$ je třeba vyšetřit zvláště.

(h) $f' = \begin{cases} -\frac{1}{3} x^{2/3} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

Pozor. Bod $x = 0$ je třeba vyšetřit zvláště.

(i) $f' = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ -\infty, & x = 0 \end{cases}$

Cvičení 9 - řešení

Příklad 1 (a) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^{\alpha})' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce je definována na $[0, \infty)$, neboť potřebujeme nezáporné číslo pod sudou omocninou. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladné číslo pod sudou omocninou ve jmenovateli.

Příklad 1 (b) $((x^2 - 2x + 3)e^x)' = ((x^2 - 2x + 3))' \cdot e^x + (x^2 - 2x + 3) \cdot (e^x)' = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 3)e^x = (x^2 + 3)e^x$. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R}$.

Příklad 1 (c) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^{\alpha})' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce je definována na $[0, \infty)$, neboť potřebujeme nezáporné číslo pod sudou omocninou. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladné číslo pod sudou omocninou ve jmenovateli.

Příklad 1 (d) $(x \log x + x \log_3 x + 2e^x)' = x' \log x + x(\log x)' + x' \log_3 x + x(\log_3 x)' + (2e^x)' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} + \log_3 x + x \cdot (\frac{\log x}{\log 3})' + 2e^x = \log x + 1 + \log_3 x + \frac{1}{\log 3} + 2e^x$.

Funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladná číslo uvnitř logaritmu. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$ ze stejného důvodu.

Příklad 1 (e) $((\frac{3}{2})^x)' = (e^{x \cdot \log \frac{3}{2}})' = \log \frac{3}{2} \cdot e^{x \cdot \log \frac{3}{2}} = \log \frac{3}{2} \cdot (\frac{3}{2})^x$, nebo lze alternativně použít vzorec $c \cdot a^x = c \log a \cdot a^x$ Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R}$, neboť mocněný výraz je kladný.

Příklad 1 (f) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^{\alpha})' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce i derivace jsou definovány na $R \setminus \{0\}$, neboť potřebujeme nenulové číslo ve jmenovateli.

Příklad 1 (g)

$$\left(\frac{x^2 - 2x + 7}{x^2 + 5x - 6}\right)' = \frac{(x^2 - 2x + 7)' \cdot (x^2 + 5x - 6) - (x^2 - 2x + 7) \cdot (x^2 + 5x - 6)'}{(x^2 + 5x - 6)^2} =$$

$$\frac{(2x - 2) \cdot (x^2 + 5x - 6) - (x^2 - 2x + 7) \cdot (2x + 5)}{(x^2 + 5x - 6)^2} = \frac{2x^3 + 8x^2 - 22x + 12 - (2x^3 + x^2 + 4x + 35)}{(x^2 + 5x - 6)^2} = \frac{7x^2 - 26x - 23}{(x^2 + 5x - 6)^2},$$

kde jsme využili vzorce pro derivaci podílu. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R} \setminus \{-6, 1\}$ kvůli nenulovosti jmenovatele.

Příklad 1 (h) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorece $(c \cdot \log x)' = c \cdot \frac{1}{x}$ a $(c \cdot \cos x)' = c \cdot (-\sin x)$. Funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladná číslo uvnitř logaritmu. Derivace je pak také definována na $(0, \infty)$.

Příklad 1 (i)

$$\left(\frac{x \cos x - 2}{\log x}\right)' = \frac{(x \cos x - 2)' \cdot (\log x) - (x \cos x - 2) \cdot (\log x)'}{(\log x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot (\log x) - (x \cos x - 2) \cdot \frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{x(\cos x - x \sin x) \cdot (\log x) - x \cos x + 2}{x(\log x)^2},$$

kde jsme využili vzorce pro derivaci podílu. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $(0, \infty) \setminus \{0\}$ kvůli definičnímu oboru logaritmu a požadavku na nenulovost jmenovatele.

Příklad 1 (j) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorece $(c \cdot \tan x)' = c \cdot \frac{1}{\cos x^2}$ a $(c \cdot \sin x)' = c \cdot \cos x$. Funkce je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, neboť to je omezní plynoucí z definičního oboru funkce tangens. Derivace je pak také definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1 (k) $(\sin x \cos x - \tan x)' = (\sin x)' \cos x + \sin x(\cos x)' - (\tan x)' = \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1}{\cos x^2}$. Funkce je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, neboť to je omezní plynoucí z definičního oboru funkce tangens. Derivace je pak také definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1 (l) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorece $(c \cdot \arcsin x)' = c \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(c \cdot \operatorname{arccotan} x)' = c \cdot \frac{-1}{1+x^2}$. Funkce je definována na $[-1, 1]$, neboť to je omezní plynoucí z definičního oboru funkce arcussinus. Derivace je pak definována na $(-1, 1)$, neboť ještě navíc požadujeme nenulovost jmenovatele.

Příklad 1 (m) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorece $(c \cdot \arccos x)' = c \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(c \cdot \operatorname{arccotan} x)' = c \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Funkce je definována na $[-1, 1]$, neboť to je omezní plynoucí z definičního oboru funkce arcuscosinus. Derivace je pak definována na $(-1, 1)$, neboť ještě navíc požadujeme nenulovost jmenovatele.

Příklad 2 (a) Nahlédneme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme za věty o derivaci složené funkce

$$\left((x^2+50x+12)^{78}\right)' = 78(x^2+50x+12)^{77}(x^2+50x+12)' = 78(x^2+50x+12)^{77}(2x+50).$$

Odtud vidíme, že i $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

Příklad 2 (b) Vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{7\}$. Použijeme vzorce pro derivaci součinu tří funkcí $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$. Počítejme

$$\begin{aligned}\left(x^3(x+2)^8(x-7)^{-11}\right)' &= 3x^2\cdot(x+2)^8(x-7)^{-11} + x^3\cdot 8(x+2)^7\cdot(x-7)^{-11} + x^3(x+2)^8\cdot(-11)(x-7)^{-12}\\ &= -\frac{3x^2(x+2)^7(31x+14)}{(x-7)^{-12}}.\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{7\}$.

Příklad 2 (c) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme

$$(\operatorname{arccotan}(2x))' = \frac{1}{1+(2x)^2}(2x)' = \frac{2}{1+4x^2}$$

a vidíme, že $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (d) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme dle pravidla pro derivaci součinu

$$\left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{3\cdot(x^2+1)-(3x-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}$$

Příklad 2 (e) Spočítáme, že $x^2+x+2>0$ na $\mathbb{R}$, a tudíž $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme derivaci

$$\left(\log(x^2+x+2)\right)' = \frac{1}{x^2+x+2}\cdot(x^2+x+2)' = \frac{2x+1}{x^2+x+2}.$$

Z toho je vidno, že i $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (f) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme derivaci

$$\left(\cos(x^3-x+2)^9\right)' = -\sin(x^3-x+2)^9\cdot\left((x^3-x+2)^9\right)' = -\sin(x^3-x+2)^9\cdot 9(x^3-x+2)^8\cdot(3x^2-1).$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (g) Chceme, aby výraz v odmocnině byl kladný. Odtud dostáváme $\mathcal{D}_f = [-2,2]$. Spočítáme derivaci

$$\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(4-x^2)' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = (-2,2)$.

Příklad 2 (h) Snadno nahlédneme, že $\mathcal{D}_f = (0,\infty)\setminus\{1\}$. Spočítáme derivaci

$$\left(\frac{1}{\log x}\right)' = -\frac{1}{\log^2 x}\cdot(\log x)' = -\frac{1}{x\log^2 x}.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = (0,,\infty)\setminus\{1\}$.

Příklad 2 (h) Vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme

$$\left(\cos^9(x^3-x+2)\right)' = 9\cos^8(x^3-x+2)\cdot\left(\cos(x^3-x+2)\right)' = 9\cos^8(x^3-x+2)\cdot(-\sin(x^3-x+2))\cdot(3x^2-1).$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (j) Vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme

$$(\sin(\sin(\sin x))))' = \cos(\sin(\sin x)))\cdot(\sin(\sin x))' = \cos(\sin(\sin x)))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (k) Spočítáme, že $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0$ právě tehdy, když $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) = \mathcal{D}_f$. Spočítáme

$$\left(2 \log \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = 2\frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{8x}{x^4-1}.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Příklad 2 (l) Vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme

$$\left(\sin^2 x - \sin(x^2)\right)' = 2 \sin x \cdot \cos x - \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (m) Dostáváme sadu podmínek $x > 0, \log^3 x > 0$ a $\log^2(\log^3(x)) > 0$. Dopočítáme se, že $\mathcal{D}_f = (1, \infty) \setminus \{e\}$. Spočítáme

$$\begin{aligned}\left(\log(\log^2(\log^3(x)))\right)' &= \frac{1}{\log^2(\log^3(x))} \cdot \left(\log^2(\log^3(x))\right)' = \frac{1}{\log^2(\log^3(x))} \cdot 2\log(\log^3(x)) \cdot \left(\log(\log^3(x))\right)' \\ &= \frac{2}{\log(\log^3(x))} \cdot \frac{1}{\log^3(x)} \cdot \left(\log^3(x)\right)' = \frac{2}{\log(\log^3(x))\log^3(x)} \cdot 3\log^2(x) \cdot (\log(x))' \\ &= \frac{6}{\log(\log^3(x))\log(x)x}.\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $\mathcal{D}_{f'} = (1, \infty) \setminus \{e\}$.

Příklad 2 (n)
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$
Definiční obor f
$9 - x^2 > 0 \iff (3-x)(3+x) > 0 \iff x \in (-3, 3) = D(f)$
Derivace f

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)' = \frac{x' \cdot \sqrt{9-x^2} - x \cdot \left(\sqrt{9-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)} = \frac{1 \cdot \sqrt{9-x^2} - x \cdot \frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (9-x^2)'}{9-x^2} =$$
$$\frac{\sqrt{9-x^2} - \frac{x}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x)}{9-x^2} = \frac{9-x^2+x^2}{(9-x^2) \cdot \sqrt{9-x^2}} = 9 \cdot (9-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Definičí obor f' $D(f') = (-3, 3)$

Příklad 2 o
$f(x) = \frac{x^2(1-x)^3}{1+x}$
Definiční obor f $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
Derivace f

$$f'(x) = \left(\frac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right)' = \frac{\left(x^2(1-x)^3\right)' \cdot (1+x) - (x^2(1-x)^3) \cdot (1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{\left((x^2)'(1-x)^3 + x^2\left(((1-x)^3)'\right)\right) \cdot (1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} =$$
$$= \frac{\left(2x(1-x)^3 + x^2(3(1-x)^2 \cdot (1-x)'\right) \cdot (1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} = \frac{2x(1-x)^3(1+x) - 3x^2(1-x)^2(1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} =$$
$$= \frac{x(1-x)^2\left(2(1-x^2) - 3x(1+x) - x(1-x)\right)}{(1+x)^2} = \frac{x(1-x)^2\left(2 - 2x^2 - 3x - 3x^2 - x + x^2\right)}{(1+x)^2} = \frac{x(1-x)^2\left(2 - 4x^2 - 4x\right)}{(1+x)^2}$$

Definičí obor f'
$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Příklad 2 (p)
$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
Definiční obor f $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Derivace f

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (-1)(-2)x^{-3} = 2e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^3}$$

Definičí obor f'
$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Příklad 2 (q)
$f(x) = x^x$
Definiční obor f $D(f) = (0, \infty)$, protože z definice obecné mocniny plyne, že $x^x = e^{x \log x}$.
Derivace f
Využijeme vzorec $a = e^{\log a}$ pro $a > 0$.

$$f'(x) = (x^x)' = \left(e^{x \log x}\right)' = e^{x \log x} \cdot (x \log x)' = e^{x \log x} \cdot (x' \cdot \log x + x \cdot (\log x)') = e^{x \log x} \cdot \left(\log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\log x + 1)$$

Definičí obor f'
$D(f') = (0, \infty)$

Příklad 2 (r)

$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
Definiční obor f
$D(f) = (0, \infty)$
Derivace f
Využijeme vzorec $a = e^{\log a}$ pro $a > 0$.

$$f'(x) = \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}}\right)' = e^{\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\left(\frac{1}{x}\right)' \log x + x \cdot (\log x)'\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\log x + x\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-\log x}{x^2} + 1\right)$$

Definičí obor f'
$D(f) = (0, \infty)$

Příklad 2 (s)
$f(x) = (\sin x)^{\cos x}$
Definiční obor f
Opět z definice obecné mocniny plyne, že je potřeba, aby $\sin x > 0$. Tedy $D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$.
Derivace f

$$f'(x) = \left(e^{\cos x \cdot \log \sin x}\right)' = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot (\cos x \cdot \log \sin x)' = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left((\cos x)' \cdot \log \sin x + \cos x \cdot (\log \sin x)'\right) =$$
$$= e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left(-\sin x \log \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)'\right) = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left(-\sin x \log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$$

Definičí obor f'
$D(f') = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$.

Příklad 2 (t)
$f(x) = \arcsin(\cos x)$
Definiční obor f Definiční obor arcsin je interval $[-1, 1]$ a obor hodnot cos je $[-1, 1]$. Proto $D(f) = D(\cos) = \mathbb{R}$.
Derivace f

$$f'(x) = (\arcsin(\cos x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos x)^2}} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$$

Definičí obor f'
$D(f') = \mathbb{R}$

Příklad 2 (u)
$f(x) = \log(\arccos x)$
Definiční obor f
$D(f) = [-1, 1)$
Derivace f

$$f'(x) = (\log(\arccos x))' = \frac{1}{\arccos x} \cdot (\arccos x)' = \frac{1}{\arccos x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Definičí obor f'
$D(f') = (-1, 1)$ a v bodě -1 má funkce pouze jednostrannou derivaci.

Příklad 2 (v)
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccotan} \frac{\sqrt{2}}{x}$
Definiční obor f
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Derivace f

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccotan} \frac{\sqrt{2}}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{x^2}} \cdot \sqrt{2} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2}{2+x^2} \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2+x^2}$$

Definičí obor f'
$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Příklad 2 (w)
$f(x) = e^{x^2-x+1} - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$
Definiční obor f
$D(f) = \mathbb{R}$
Derivace f

$$f'(x) = \left(e^{x^2-x+1} - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\right)' = e^{x^2-x+1} \cdot \left(x^2-x+1\right)' - \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\right)' = \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}} =$$

$$= e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)' = e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(e^{2x}\right)' \cdot \left(e^{2x}+1\right) - e^{2x} \cdot \left(e^{2x}+1\right)'}{\left(e^{2x}+1\right)^2} =$$

$$= e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x} \cdot \left(e^{2x}+1\right) - e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} =$$

$$= e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{e^{2x}\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

Definičí obor f'
$D(f') = \mathbb{R}$

Příklad 2 (x)
$f(x) = \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$
Definiční obor f
$D(f) = \mathbb{R} \setminus (0, 1)$
Derivace f

$$f'(x)=\left(\arctan\sqrt{x^2-1}-\frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}\right)'=$$
$$=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)'-\frac{(\log x)'\cdot\sqrt{x^2-1}-\log x\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=$$
$$=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x^2-1\right)'-\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2-1}-\log x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}\cdot\left(x^2-1\right)'}{x^2-1}=$$
$$=\frac{2x}{2x^2\cdot\sqrt{x^2-1}}-\frac{x^{-1}\sqrt{x^2-1}-\log x\frac{2x}{2}\cdot 2x}{x^2-1}=$$
$$=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}-\frac{\sqrt{x^2-1}-\log x\cdot 2x^2}{x^3-x}$$

Definičí obor f'
$D(f')=\mathbb{R}\setminus(0,1)$

Příklad 2 (y)
$f(x)=x\left(\arcsin(x^3)\right)^2$
Definiční obor f $D(f)=[-1,1]$
Derivace f

$$f'(x)=\left(x\left(\arcsin(x^3)\right)^2\right)'=x'\cdot\left(\arcsin\left(x^3\right)\right)^2+x\cdot\left(\left(\arcsin\left(x^3\right)\right)^2\right)'=\left(\arcsin\left(x^3\right)\right)^2+x\cdot 2\cdot\arcsin\left(x^3\right)\cdot\left(\arcsin\left(x^3\right)\right)'=$$
$$=\left(\arcsin\left(x^3\right)\right)^2+2x\cdot\arcsin\left(x^3\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}\cdot\left(x^3\right)'=\left(\arcsin\left(x^3\right)\right)^2+2x\cdot\arcsin\left(x^3\right)\cdot\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

Definičí obor f'
$D(f')=(-1,1)$ a vkrajních bodech existují jednostranné derivace.