

# Vlastnosti jistých funkcí

## Absolutní hodnota

Absolutní hodnota je funkce  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$  definovaná následovně:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Navíc splňuje následující vlastnosti:

- (i)  $|x| = 0 \iff x = 0$ ,
- (ii)  $|ax| = |a| \cdot |x|$  pro každé  $a, x \in \mathbb{R}$ ,
- (iii)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}$  (viz příklad 7.(b)).

## Goniometrické funkce

Funkce  $\sin, \cos$  jsou definovány pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Funkce  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$  je definována pro  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ . Funkce  $\cot = \frac{\cos}{\sin}$  je definována pro  $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ . Na definičních oborech příslušných funkcí platí

- (i)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,
- (ii)  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ,
- (iii)  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ,
- (iv)  $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$ ,
- (v)  $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ ,
- (vi)  $\sin(-x) = -\sin x$ ,
- (vii)  $\cos(-x) = \cos x$ ,
- (viii)  $\tan(-x) = -\tan x$ ,
- (ix)  $\cot(-x) = -\cot x$ .

## Exponenciální funkce a logaritmus

Funkce  $\log_a$  (logaritmus o základu  $a, a > 0$ ) je definována pro  $x \in (0, \infty)$ . Pokud píšeme pouze  $\log$ , míníme tím logaritmus o základu  $e$ . Funkce  $\exp$  je definována pro každé  $x \in \mathbb{R}$ . Pro  $x, y, a \in \mathbb{R}, x, y, a > 0$  a  $n \in \mathbb{N}$  platí

- (i)  $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ ,
- (ii)  $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$ ,
- (iii)  $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$ ,
- (iv)  $a^{\log_a(x)} = x$ .

Pro  $a \in \mathbb{R}, a > 0, x, y \in \mathbb{R}$  platí

- (i)  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ,
- (ii)  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ ,
- (iii)  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ,
- (iv)  $\log_a a^x = x$ .