Sada 3

Příklad 1. Pro následující množiny naleněte supremum a infimum. Určete zda existuje maximum a minimum.

(a) $A = \{1, 2\}$,

(b) $B = \{-\pi, -e, 0, 1, \sqrt{5}, 3\}$,

(c) $C = \langle 8, 16)$,

(d) $D = ((-7, -2\rangle \cup (-1, 1) \cup \{2\}) \cap (-8, \frac{1}{2})$,

(e) $E = \mathbb{N}$.

Příklad 2. Pro následující množiny naleněte supremum a infimum. Určete zda existuje maximum a minimum.

(a) $A = \{\frac{1+(-1)^{3n}}{4};\, n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \colon x < 70!\}$,

(c) $C = \{y \in \mathbb{R} \colon y \geq -6\}$,

(d) $D = \{z \in \mathbb{R} \colon z^4 < 16\}$,

(e) $E = \{w \in \mathbb{R} \colon \frac{1}{w-1} > 2\}$,

(f) $F = \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$,

(g) $G = \{e^x \colon x \in (-\infty, 4\rangle\}$,

(h) $H = \{(\sin \frac{n\pi}{2})^2 \colon n \in \mathbb{Z}\}$,

(i) $I = \{2^n - 3^m;\ n, m \in \mathbb{N}\}$,

(j) $J = \{2^n - 3^{-m};\ n, m \in \mathbb{N}\}$

Příklad 3. Položme pro $n \in \mathbb{N}$ množiny $C_n = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 - \frac{x}{n} \leq 0\}$ a $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ a $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Pro následující množiny nalezněte supremum a infimum

(a) C_n, pro $n \in \mathbb{N}$,

(b) C,

(c) D.

Příklad 4. Nechť $I = \langle 0, 1\rangle$, $f : I \to \mathbb{R}$ je klesající. Určete supremum a infimum množiny $f(I)$. Nabývá se zde minima a maxima? Co se dá říct o supremu a infimu množiny $f((0, 1))$?

Příklad 5. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$. Co můžeme říct o infimu a supremu následujících množin ve vztahu k $\inf A$, $\inf B$, $\sup A$, $\sup B$?

(a) $A \cup B$,

(b) $A \cap B$,

(c) $A \setminus B$,

(d) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,

(e) $-A = \{-a;\, a \in A\}$,

(f) $A + B = \{a + b;\, a \in A,\, b \in B\}$,

(g) $A - B = \{a - b;\, a \in A,\, b \in B\}$,

(h) $A \cdot B = \{a \cdot b;\, a \in A,\, b \in B\}$.

Příklad* 6. Určete supremum a infimum množiny $A = \{q \in \mathbb{Q} \colon q^2 < 2\}$ v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$.

Sada 3 - výsledky

Příklad 1 **(a)** $\min A = 1$, $\max A = 2$, **(b)** $\min B = -\pi$, $\max B = 3$, **(c)** $\min C = 8$, $\sup C = 16$, maximum neexistuje, **(d)** $\inf D = -7$, $\sup D = \frac{1}{2}$, minimum ani maximum neexistuje, **(e)** $\min E = 1$, maximum ani supremum neexistuje.

Příklad 2 **(a)** $\min A = 0$, $\max A = \frac{1}{2}$, **(b)** $\inf B$ neexistuje, $\sup B = 70!$, **(c)** $\min C = -6$, $\sup C$ neexistuje, **(d)** $\inf D = -2$, $\sup D = 2$, minimum ani maximum neexistuje, **(e)** $\inf E = 1$, $\sup E = \frac{3}{2}$, minimum ani maximum neexistuje, **(f)** $\inf F = 0$, $\max F = 1$, minimum neexistuje, **(g)** $\inf G = 0$, $\max G = e^4$, minimum neexistuje, **(h)** $\min H = 0$, $\max H = 1$, **(i)** supremum ani infimum neexistuje, **(j)** $\min J = \frac{5}{3}$, supremum neexistuje.

Příklad 3

(a) $\sup C_n = \frac{1}{n}$, $\inf C_n = 0$,

(b) $\sup C = \inf C = 0$,

(c) $\sup C = 1$, $\inf C = 0$.

Příklad 4 $\sup f(I) = \max f(I) = f(0), \inf f(I) = \min f(I) = f(1)$. Platí $f(0) \geq \sup f((0,1)) \geq \inf f((0,1)) \geq f(1)$.

Příklad 5 Označme $\inf A = i_A,\ \sup A = \ s_A,\ \inf B = i_B,\ \sup B = s_B$.

(a) $\inf A \cup B = \min\{i_A, i_B\}$, $\sup A \cup B = \max\{s_A, s_B\}$,
(b) $\inf A \cap B \geq \max\{i_A, i_B\}$, $\sup A \cap B \leq \min\{s_A, s_b\}$,
(c) $\inf A \setminus B \geq i_A$, $\sup A \setminus B \leq s_A$,
(d) $\inf A\Delta B \geq \min\{i_A, i_B\}$, $\sup A\Delta B \leq \max\{s_A, s_B\}$,
(e) $\inf -A = -s_A$, $\sup -A = -i_A$,
(f) $\inf A + B = i_A + i_B$, $\sup A + B = s_A + s_B$,
(g) $\inf A - B = i_A - s_B$, $\sup A - B = s_A - i_B$,
(h) $\inf A \cdot B = \min\{i_A i_B, i_A s_B, s_A i_B, s_A s_B\}$, $\sup A \cdot B = \max\{i_A i_B, i_A s_B, s_A i_B, s_A s_B\}$.

Příklad 6 V $\mathbb{R}$ je $\inf A = -\sqrt{2}$ a $\sup A = \sqrt{2}$, v $\mathbb{Q}$ supremum ani infimum neexistují.