Sada 4

Tvrzení 1 (Spojitost mocniny)**.** *Nechť* $a > 0$ *a* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel. Pak* $\lim_{n\to\infty}(x_n)^a = (\lim_{n\to\infty} x_n)^a$*, pokud pravá strana dává smysl.*

Příklad 2. Z definice spočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} n$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} e^n$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

(e) $\lim_{n\to\infty} n^n$,

(f) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$,

(g) $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi n)\sqrt{n}$,

(h) $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)n^{-2}$,

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Příklad 3 (Růstová škála)**.** Ukažte, že pro $a > 0, b > 1, c \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{1}{n^a} = \lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{n^a}{b^n} = \lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{b^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Uvědomte si, že z aritmetiky limit pak pro $c \neq 0$ plyne

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{n^a}{1} = \lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{b^n}{n^a} = \lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{n!}{b^n} = \lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{n^n}{n!} = c \cdot \infty.$$

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+7^n-n^{45}}{35+77n^2+3\cdot 7^n}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!+16^n+2}{4n^5+n^n}$.

Příklad 4 (Racionální funkce a binomická věta)**.** Spočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} -32n^4 + 64n^3 - 128$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-4}{n+7}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-7}{-n^4-8}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^5-6n^3+n}{-4n^5+n^2-9}$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{15}-(n+3)^{15}}{(n+2)^{15}-n^{15}}$,

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{21}-(n+1)^{21}}{(2n^2+3)^{10}-(n^2+7)^{10}}$,

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)(2n+4)^3-n^4}{7n(n^2+2)^2+2}$,

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^5+1)^6-(n^5+2)^6}{(n+2)^{26}-(n+1)^{26}}$.

Příklad 5 (Odmocniny, spojitost mocniny)**.** Spočtěte následující limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+7} - \sqrt[3]{n}$,

(c) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

(d) $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$,

(e) $\frac{n+\sqrt{n+\sqrt{n+3}}}{n+1}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+2} - \sqrt[3]{n^3+n}$,

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n+2}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}}$.

Příklad 6 (Dva policajti)**.** Spočtěte následující limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c}, c > 0$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{2\sqrt{n}}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor^3}{n-\lfloor\sqrt{n+9}\rfloor}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(2+\cos n)n}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+4^n}$

Příklad 7 (Všehochuť)**.** Spočtěte následující limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi n}{2}) \cdot n^2 \cdot (\sqrt[4]{n^4+1} - \sqrt[3]{n^3+1})$

Sada 4 - výsledky

Příklad 2

(a) ∞,

(b) 0,

(c) ∞,

(d) 0,

(e) ∞,

(f) neexistuje,

(g) neexistuje,

(h) 0,

(i) 0.

Příklad 3

(a) $\frac{1}{3}$,

(b) 0.

Příklad 4

(a) $-\infty$,

(b) ∞,

(c) 0,

(d) $-\frac{5}{4}$,

(e) $\frac{1}{2}$,

(f) $\frac{1}{2}$,

(g) $\frac{7}{341}$,

(h) $\frac{8}{7}$,

(i) $-\frac{3}{13}$.

Příklad 5

(a) 0,

(b) 0,

(c) neexistuje,

(d) ∞,

(e) 1,

(f) $\frac{1}{2}$,

(g) 0.

Příklad 6

(a) 1,

(b) $\frac{1}{2}$,

(c) 2,

(d) 1,

(e) 4.

Příklad 7

(a) neexistuje.

Sada 4 - řešení

Příklad 2 Když počítáme limity z definice, je dobré mít představu, jak se posloupnost vyvíjí s rostoucím n, odhadnout, zdali konverguje k nějakému číslu, diverguje k $\pm\infty$, nebo limita vůbec neexistuje. Pak se pokusíme náš odhad dokázat.

(a) Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ z definice. Nechť $K > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > K$ (takové existuje díky Archimédově vlastnosti). Pak pro všechna $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ máme $n \geq n_0 > K$. Odtud $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

(b) Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (k tomu se dostaneme například tak, že spočítáme nerovnici $\frac{1}{x} < \varepsilon$, jejíž řešením jsou $x > \frac{1}{\varepsilon}$). Pak pro $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ máme $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tedy vskutku $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(c) Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} e^n = \infty$. Nechť $K > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \log K$ (opět ho můžeme získat z nerovnice $e^x > K$). Pak pro $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ máme z monotonie exponenciály $e^n \geq e^{n_0} > e^{\log K} = K$. Odtud $\lim_{n\to\infty} e^n = \infty$.

(d) Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon$ (například řešíme nerovnici $\log_{\frac{1}{2}} x < \varepsilon$). Pak pro všechna $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ máme z faktu, že funkce $(\frac{1}{2})^x$ je klasjící, že $\left|(\frac{1}{2})^n - 0\right| = (\frac{1}{2})^n \leq (\frac{1}{2})^{n_0} < (\frac{1}{2})^{\log_{\frac{1}{2}} \varepsilon} = \varepsilon$. Proto plyne požadovaný výsledek.

(e) Ukážeme, že posloupnost diverguje do ∞. Volme $K > 0$. Uvědomíme se, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí, že $n^n \geq n$. Tedy, pokud zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > K$, pak pro $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ máme $n^n \geq n \geq n_0 > K$. Odtud $\lim_{n\to\infty} n^n = \infty$.

(f) Vidíme, že posloupnost $(-1)^n$ osciluje mezi -1 a $+1$, takže ukážeme, že limita neexistuje. Předpokládejme pro spor, že posloupnost $(-1)^n$ konverguje k nějakému $A \in \mathbb{R}$, tedy $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = A$. Jelikož $(-1)^n$ konverguje k A, nalezneme z definice konvergence pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ máme $|(-1)^n - A| < \frac{1}{2}$. Pak ale pro všechna $m, n \geq n_0$ máme z trojúhelníkové nerovnosti, že $|(-1)^n - (-1)^m| \leq |(-1)^n - A| + |(-1)^m - A| < 1$. Nicméně, pokud vezmeme $n \geq n_0$ tak pak jistě i $2n \geq n_0$ a $2n+1 \geq n_0$, ale $|(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}| = 2$, a to je spor. Proto $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ neexistuje.

(g) Uvědomíme si, že $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Vidíme, že jako v předchozím příkladě naše posloupnost mění znaménka, ale zároveň i v absolutní hodnotě roste. Ukážeme, že limita neexistuje. Opět budeme postupovat sporem. Nechť tedy pro spor $\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)\sqrt{n} = A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ máme $|\cos(n\pi)\sqrt{n} - A| < \frac{1}{2}$. Analogicky jako v minulém příkladě vyvodíme, že pro všechna $m, n \geq n_0$ máme $|\cos(n\pi)\sqrt{n} - \cos(m\pi)\sqrt{m}| < 1$. Opět, pro $n \geq n_0$ máme, že $\left|\cos(2n\pi)\sqrt{2n} - \cos((2n+1)\pi)\sqrt{2n+1}\right| = \left|(-1)^{2n}\sqrt{2n} - (-1)^{2n+1}\sqrt{2n+1}\right| = \left|\sqrt{2n} + \sqrt{2n+1}\right| = \sqrt{2n} + \sqrt{2n+1} \geq \sqrt{2n} \geq 1$, což je spor. Proto limita neexistuje.

(h) Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)n^{-2} = 0$. Uvědomíme si, že $\left|\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)\right| \leq 1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (třeba vyřešíme rovnici $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$). Pak pro $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ máme $\left|\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)n^-2 - 0\right| = \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)}{n^2}\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon$. Odtud plyne požadovaný výsledek.

(i) Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. Opět si uvědomíme, že $|\sin n| \leq 1$. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Pak pro všechna $n \geq n_0$ máme $\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Odtud plyne požadovaný výsledek.

Analogicky jako v příkladu (b) bychom mohli z definice ukázat, že pro všechna $a > 0$ je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$.

Výsledek z části (c) a (d) bychom mohli zobecnit na to, že pro $a \in (0, 1)$ je $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ a pro $b \in (1, \infty)$ je $\lim_{n\to\infty} b^n = \infty$. Důkaz by proběhl zcela analogicky.

Příklad 3

Pokud je $c = 0$, tvrzení triviálně platí, můžeme tedy předpokládat, že $c \neq 0$. K důkazu použijeme následující tvrzení ze superseminaře:

Tvrzení 8. *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost kladných reálných čísel splňující*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \quad \textit{nebo} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1.$$

Pak $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot \frac{1}{n^a} = 0$:

Limitu spočteme z definice. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$, Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > (|c|/\varepsilon)^{1/a}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ máme

$$\left| c\frac{1}{n^a} \right| = |c| \frac{1}{n^a} \leq |c| \frac{1}{n_0^a} < |c| \frac{1}{\frac{|c|}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot \frac{n^a}{b^n}$:

Ukážeme, že pro posloupnost $x_n = c\frac{n^a}{b^n}$ platí $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} < 1$. Počítejme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c}{c} \cdot \frac{(n+1)^a}{n^a} \cdot \frac{b^n}{b^{n+1}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b} \left(\frac{n+1}{n} \right)^a \right)$$
$$\stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{b} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^a = \frac{1}{b} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^a = (*)$$

Z definice ověříme, že poslední limita je rovna 1. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N},\ n_0 > \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/a}-1}$. Pak pro $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ platí (podrobně si rozmyslete použité nerovnosti)

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a - 1 \right| \leq \left| \left(1 + \frac{1}{n_0}\right)^a - 1 \right| < \left| \left(1 + (1+\varepsilon)^{1/a} - 1\right)^a - 1 \right| = \left| \left((1+\varepsilon)^{1/a}\right)^a - 1 \right|$$
$$= |1 + \varepsilon - 1| = \varepsilon$$

Platí tedy

$$(*) = \frac{1}{b} \cdot 1 < 1.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit a zároveň ukázali požadovanou nerovnost.

Alternativně místo výpočtu poslední limity z definice, můžeme použít Tvrzení 1 a počítat:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)^a \stackrel{\text{AL}}{=} \left(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \right)^a = (1+0)^a = 1.$$

Pravá strana je definována, a tedy Větu o aritmetice limit lze použít.

$\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot \frac{b^n}{n!}$:

Ukážeme, že pro posloupnost $x_n = c\frac{b^n}{n!}$ platí $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} < 1$. Počítejme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c}{c} \cdot \frac{b^{n+1}}{b^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(b\frac{1}{n+1} \right) \stackrel{\text{AL}}{=} b \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = (*).$$

Nyní si uvědomme, že posloupnost $\frac{1}{n+1}$ je ve skutečnosti podposloupností posloupnosti $\frac{1}{n}$ (vynecháme první člen), a tedy musí mít stejnou limitu. Proto platí

$$(*) = b \cdot 0 < 1.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limita zároveň ukázali požadovanou nerovnost.

$\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot \frac{n!}{n^n}$:

Ukážeme, že pro posloupnost $x_n = c \cdot \frac{n!}{n^n}$ platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$. Počítejme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c \cdot \frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{c \cdot n!}}{n} = (*).$$

Pro n liché odhadneme

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \ldots \cdot n \le \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \cdot n \cdot \ldots \cdot n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} n^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} n^n$$

a pro n sudé odhadneme

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \ldots \cdot n \le \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \cdot n \cdot \ldots \cdot n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} n^n.$$

Dohromady dostáváme odhad

$$n! \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} n^n.$$

Z věty o limitě a uspořádání pak plyne

$$(*) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\left(c \cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} n^n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{c}\left(\frac{1}{2}\right)^2 n}{n} = \frac{1}{4} < 1.$$

Příklad 4 Základní trik pro výpočet limit polynomů a poddílů polynomů je vytýkání nejvyšší mocniny.

(a) Upravíme výraz v limitě:

$$\lim_{n\to\infty}(-32n^4 + 64n^3 - 128) = \lim_{n\to\infty} n^4 \left(-32 + \frac{64}{n} - \frac{128}{n^4}\right) \overset{\text{AL}}{=} \lim_{n\to\infty} n^4 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(-32 + \frac{64}{n} - \frac{128}{n^4}\right)$$
$$\overset{\text{AL}}{=} \lim_{n\to\infty} n^4 \cdot \left(\lim_{n\to\infty} -32 + \lim_{n\to\infty} \frac{64}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{128}{n^4}\right) = (*)$$

Z růstové škály pak máme

$$(*) = \infty \cdot (-32 + 0 + 0) = -\infty.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

(b) Upravíme výraz v limitě:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n - 4}{n + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{4}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} \cdot \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n}}{1 + \frac{4}{n}}$$
$$\overset{\text{AL}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n}}{1 + \frac{4}{n}} \overset{\text{AL}}{=} \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n}}$$
$$= \infty \cdot \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0} = \infty \cdot 1 = \infty.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

(c) Upravíme výraz v limitě:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-7}{-n^4-8} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1-\frac{7}{n}\right)}{n^4\left(-1-\frac{8}{n^4}\right)} \overset{\text{AL}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{7}{n}}{-1-\frac{8}{n^4}} = 0 \cdot (-1) = 0.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

(d) Upravíme výraz v limitě

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{5n^5-6n^3+n}{-4n^5+n^2-9} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^5(5-\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^4})}{n^5(-4+\frac{1}{n^3}-\frac{9}{n^5})} \\ &\overset{\text{AL}}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}(5-\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^4})}{\lim_{n\to\infty}(-4+\frac{1}{n^3}-\frac{9}{n^5})} = -\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

(e) Upravíme výraz v limitě s použitím binomické věty:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}n^k4^{n-k} - \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}n^k3^{n-k}}{\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}n^k2^{n-k} - n^{100}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}+400n^{99}+\sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}n^k4^{100-k} - \left(n^{100}+300n^{99}+\sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}n^k3^{100-k}\right)}{n^{100}+200n^{99}+\sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}n^k2^{100-k} - n^100} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{100n^{99}+\sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}n^k4^{100-k} - \sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}n^k3^{100-k}}{200n^{99}+\sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}n^k2^{100-k}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{99}}{n^{99}} \cdot \frac{100+\sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}n^{k-99}4^{100-k} - \sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}n^{k-99}3^{100-k}}{200+\sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}n^{k-99}2^{100-k}} \\ &\overset{\text{AL}}{=} \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{100+\sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}\cdot 0\cdot 4^{100-k} - \sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}\cdot 0\cdot 3^{100-k}}{200+\sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}\cdot 0\cdot 2^{100-k}} \\ &= 1 \cdot \frac{100}{200} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Alternativní (příčetný) přístup. Nejprve si uvědomíme následující: je-li $P_{\leq k}(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i n^i$ poynom stupně nejvýše k v proměnné n, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k} a_i n^{i-k-1} \overset{\text{AL}}{=} \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 0 = 0.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit. Využili jsme toho, že $i-k-1<0$ pro všechna $i \in \{0,\dots,k\}$. S použitím binomické věty jako výše dostaneme

$$(n+4)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} n^k 4^{n-k} = n^{100} + 400n^{99} + P_{\leq 98}(n),$$

$$(n+3)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} n^k 3^{n-k} = n^{100} + 300n^{99} + Q_{\leq 98}(n),$$

$$(n+2)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} n^k 2^{n-k} = n^{100} + 200n^{99} + R_{\leq 98}(n),$$

kde $P_{\leq 98}(n), Q_{\leq 98}(n), R_{\leq 98}(n)$ jsou vhodné polynomy stupně nejvýše 98. S použitím pozorování uvedeného výše spočteme:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}+400n^{99}+P_{\leq 98}(n)-(n^{100}+300n^{99}+Q_{\leq 98}(n))}{n^{100}+200n^{99}+R_{\leq 98}(n)-n^{100}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{100n^{99}+P_{\leq 98}(n)-Q_{\leq 98}(n)}{200n^{99}+R_{\leq 98}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{99}}{n^{99}} \cdot \frac{100+\frac{P_{\leq 98}(n)}{n^99}-\frac{Q_{\leq 98}(n)}{n^{99}}}{200+\frac{R_{\leq 98}(n)}{n^{99}}} \\
&\overset{\text{AL}}{=} 1 \cdot \frac{100+0-0}{200+0} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 5 V příkladech s odmocninami se hodí znát vzorec

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall a, b \in \mathbb{R}\colon a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1})$$

(a) Počítejme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\
&\overset{\text{AL}}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} \overset{\text{T1}}{=} 0 \cdot \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

kde T1 je Tvrzení 1. Použili jsme ho v obou limitách v poslední rovnosti.

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+7}-\sqrt[3]{n} &= \lim_{n\to\infty} (n+7)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+7-n}{(n+7)^{\frac{2}{3}}+(n+7)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^{\frac{2}{3}}(1+\frac{7}{n})^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}}(1+\frac{7}{n})^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^{\frac{2}{3}}((1+\frac{7}{n})^{\frac{2}{3}}+(1+\frac{7}{n})^{\frac{1}{3}}+1)} \\
&\overset{\text{AL}}{=} \lim_{n\to\infty} 7 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}((1+\frac{7}{n})^{\frac{2}{3}}+(1+\frac{7}{n})^{\frac{1}{3}}+1)} \\
&\overset{\text{AL}}{=} \lim_{n\to\infty} 7 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{7}{n})^{\frac{2}{3}}+\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{7}{n})^{\frac{1}{3}}+\lim\limits_{n\to\infty} 1} \\
&\overset{\text{T1}}{=} 7 \cdot 0 \cdot \frac{1}{1+1+1} = 0.
\end{aligned}$$