Rychlé připomenutí vlastností funkcí, které v příkladech budeme používat:

absolutní hodnota

Absolutní hodnota je funkce $|\cdot| : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty)$ definovaná následovně:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Navíc splňuje následující vlastnosti:

(i) $|x| = 0 \iff x = 0$,

(ii) $|ax| = |a| \cdot |x|$ pro každé $a, x \in \mathbb{R}$,

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ (viz příklad 7.(b)).

goniometrické funkce

Funkce $\sin, \cos$ jsou definovány pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Funkce $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ je definována pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Funkce $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ je definována pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Na definičních oborech příslušných funkcí platí

(i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

(ii) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,

(iii) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

(iv) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$,

(v) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,

(vi) $\sin(-x) = -\sin x$,

(vii) $\cos(-x) = \cos x$,

(viii) $\tan(-x) = -\tan x$,

(ix) $\cot(-x) = -\cot x$.

exponenciála a logaritmus

Funkce $\log_a$ (logaritmus o základu $a, a > 0$) je definová pro $x \in (0, \infty)$. Pokud píšeme pouze log, míníme tím logaritmus o základu e. Funkce exp je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro $x, y, a \in \mathbb{R}, x, y, a > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

(i) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$,

(ii) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$,

(iii) $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$,

(iv) $a^{\log_a(x)} = x$.

Pro $a \in \mathbb{R}, a > 0,\ x, y \in \mathbb{R}$ platí

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,

(ii) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$,

(iii) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,

(iv) $\log_a a^x = x$.

Příklad 1. (a) Obě dvě strany rovnice jsou definovány pro $x \in \mathbb{R}$. Počítejme

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \cos x \\ 2 \sin x \cos x &= \cos x \\ \cos x(2 \sin x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Levá strana je rovna nule právě tehdy, když aspoň jeden ze součinitelů je roven nule. Tedy

$$\cos x = 0 \iff x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

a

$$\begin{aligned} 2\sin x - 1 &= 0 \\ \sin x &= \frac{1}{2} \iff x \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Proto celkem rovnici řeší $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Obě strany jsou opět definovány na celém $\mathbb{R}$. Začněme úpravou rovnice

$$\begin{aligned} 1 - |\sin x| &= \cos^2 x \\ 1 - |\sin x| &= 1 - \sin^2 x \\ \sin^2 x - |\sin x| &= 0. \end{aligned}$$

Nyní kvůli absolutní hodnotě budeme řešit rovnici zvlášť pro $x \in \mathbb{R}$, kde je $\sin x$ nezáporný, a kde je záporný. Prvně řešme na $\{x \in \mathbb{R}\colon\ \sin x \geq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle$:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \sin x &= 0 \\ \sin x(\sin x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že opět řešíme dvě rovnice:

$$\sin x = 0 \iff x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\},$$

a

$$\begin{aligned} \sin x - 1 &= 0 \\ \sin x &= 1 \iff x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Nyní zkontrolujeme, jestli tyto x leží v množině, ve které jsme řešili, tj. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle$ a vskutku tomu tak je.

Nyní řešme rovnici na $\{x \in \mathbb{R}\colon\ \sin x < 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$. Nyní se nám kvůli absolutní hodnotě obrátí znaménko u $\sin x$.

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \sin x &= 0 \\ \sin x(\sin x + 1) &= 0. \end{aligned}$$

$\implies$

$$\sin x = 0 \iff x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}, \tag{1}$$

a

$$\begin{aligned} \sin x + 1 &= 0 \\ \sin x &= -1 \iff x \in \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Vidíme, že hodnoty x, které nám vyšly v (1) neleží v množině na které jsme nyní řešili tj. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$. Nicméně řešení z (2) tam leží.

Celkem rovnici řeší $x \in \{\frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(c) Nejprve zjistíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou výrazy definované. Logaritmus je definovaný jen pro kladná čísla, dostáváme tedy sadu podmínek $x^2 + 8 > 0$ a $2 - x > 0$. První z nich zřejmě platí. Druhá platí právě tehdy, když $x < 2$. Proto budeme rovnici řešit na $(-\infty, 2)$.

$$\begin{aligned} \log(x^2 + 8) &= 2\log(2 - x) \\ \log(x^2 + 8) &= \log(2 - x)^2 \\ x^2 + 8 &= (2 - x)^2 \\ x^2 + 8 &= 4 - 4x + x^2 \\ 4 &= -4x \\ -1 &= x \end{aligned}$$

kde z druhého na třetí řádek jsme aplikovali inverzní funkci exp. Řešením rovnice je $x = -1$.

(d) Výrazy jsou definovány pro $x > 0$. Počítejme

$$\begin{aligned} \log_4(64x^2) &= (\log_4 x)^2 \\ \log_4 64 + \log_4 x^2 &= (\log_4 x)^2 \\ 3 + 2\log_4 x &= (\log_4 x)^2 && /y = \log_4 x \\ 3 + 2y &= y^2 \\ y^2 - 2y - 3 &= 0 \\ (y-3)(y+1) &= 0, \end{aligned}$$

tedy řešením je $y_1 = -1$ a $y_2 = 3$. Nyní zpětně ze substituce dopočteme hodnoty x. Nejprve dopočteme x_1 z y_1.

$$\begin{aligned} -1 &= \log_4 x_1 \\ 4^{-1} &= x_1 \\ x_1 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Analogicky spočítáme, že $x_2 = 4^{y_2} = 4^3 = 64$.

Celkem rovnici řeší $x \in \{\frac{1}{4}, 64\}$.

(e) Rovnice je definována na celém $\mathbb{R}$. Je

$$\begin{aligned} e^x + 6e^{-x} &= 5 && / \cdot e^x \\ (e^x)^2 - 5e^x + 6 &= 0 && /y = e^x \\ y^2 - 5y + 6 &= 0 \\ (y-2)(y-3) &= 0 \iff y \in \{2, 3\}. \end{aligned}$$

Zpětně dopočteme hodnoty x. $x_1 = \log y_1 = \log 2$ a $x_2 = \log 3$.

Celkem rovnici řeší $x \in \{\log 2, \log 3\}$.

(f) Nulový bod pro $|2x|$ a $|x|$ je $x = 0$. Budeme proto řešit zvlášť na intervalu $(-\infty, 0)$, kde jsou funkce x a $2x$ záporné a na $\langle 0, \infty)$, kde jsou obě nezáporné. Prvně na $(-\infty, 0)$, kde tedy u příslušných absolutních hodnot změníme znaménko:

$$\begin{aligned} |x - |2x|| &= 1 - |x| \\ |x - (-2x)| &= 1 - (-x) \\ |3x| &= 1 + x \\ -3x &= 1 + x \\ -1 &= 4x \\ x &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

a $-\frac{1}{4}$ leží v $(-\infty, 0)$.

Nyní řešme na $\langle 0, \infty)$

$$\begin{aligned} |x - 2x| &= 1 - x \\ |-x| &= 1 - x \\ |x| &= 1 - x \\ x &= 1 - x \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Celkem rovnici řeší $x \in \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$.

(g) Rovnice je definována na $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= 1 \\ \sin x - 1 &= -\cos x && /^2 \\ \sin^2 x - 2\sin x + 1 &= \cos^2 x \\ \sin^2 x - 2\sin x + 1 &= 1 - \sin^2 x \\ 2\sin^2 x - 2\sin x &= 0 \\ \sin x(\sin x - 1) &= 0, \end{aligned}$$

což nastane právě tehdy, když $x \in \{k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Nicméně jsme v postupu mocnili, což není ekvivalentní úprava, takže budeme muset provést zkoušku. Pro $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ máme $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$, tedy vskutku se jedná o řešení rovnice.

Pro $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, máme $\sin(k\pi) + \cos(k\pi) = 0 + (-1)^k = 1 \iff k$ je sudé.

Celkem proto rovnici řeší $x \in \{2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(h) Rovnice je definována pro $x > 0$. Počítejme

$$\begin{aligned} 2\log_3^2 x &= 8\log_3 3 - \log_3 x^6 \\ 2\log_3^2 x &= 8 \cdot 1 - 6\log_3 x && /y = \log_3 x \\ 2y^2 &= 8 - 6y \\ y^2 + 3y - 4 &= 0 \\ (y+4)(y-1) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je tedy $y_1 = -4$ a $y_2 = 1$, tedy $x_1 = \frac{1}{81}$ a $x_2 = 3$.

Řešením rovnice proto jsou $x \in \{\frac{1}{81}, 3\}$.

(i) Rovnice je definována pro $x \in \mathbb{R}$. Počítejme

$$\begin{aligned} 5^{4x-1} + \frac{3}{5}5^{2x+1} &= 20 \\ \frac{1}{5}5^{4x} + 3 \cdot 5^{2x} &= 20 \\ \frac{1}{5}(5^{2x})^2 + 3 \cdot 5^{2x} &= 20 && /y = 5^{2x} \\ \frac{1}{5}y^2 + 3y &= 20 \\ y^2 + 15y - 100 &= 0 \\ (y+20)(y-5) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením jsou $y_1 = -20, y_2 = 5$. Nicméně hodnota -20 neleží v oboru hodnot funkce e^{2x}, takže nás tato hodnota nezajímá. Dopočteme zpětně $x_1 = \frac{1}{2}\log_5 y_2 = \frac{1}{2}$.

Celkem řešením rovnice je $x = \frac{1}{2}$.

(j) Rozdělíme rovnici na čtyři intervaly v závislosti na kořenech lineárních polynomů uvnitř absolutních hodnot. Na příslušných intervalech si pohlídáme znaménka jednotlivých absolutních hodnot. Nulové body polynomů uvnitř absolutních hodnot jsou $4, 2, 0$. Počítejme tedy

Na $(-\infty, 0)$:

$$\begin{aligned} |x-4| - |6-3x| &= -3 + |-x| \\ |x-4| - |6-3x| &= -3 + |x| \\ 4 - x - 6 + 3x &= -3 - x \\ 3x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Hodnot $-\frac{1}{3} \in (-\infty, 0)$ a tudíž máme první řešení.

Na $\langle 0, 2)$:

$$\begin{aligned} 4 - x - 6 + 3x &= -3 + x \\ x &= -1, \end{aligned}$$

ale $-1 \notin \langle 0, 2)$.

Na $\langle 2, 4)$:

$$\begin{aligned} 4 - x + 6 - 3x &= -3 + x \\ 13 &= 5x \\ \frac{13}{5} &= x \end{aligned}$$

a $\frac{13}{5} \in \langle 2, 4)$, máme tudíž druhé řešení.

Na $\langle 4, \infty)$:

$$\begin{aligned} x - 4 + 6 - 3x &= -3 + x \\ 5 &= 3x \\ \frac{5}{3} &= x, \end{aligned}$$

ale $\frac{5}{3} \notin \langle 4, \infty)$.

Celkem tedy rovnici řeší $x \in \{-\frac{1}{3}, \frac{13}{5}\}$.

(k) Rovnice je kvůli logaritmu a jmenovateli zlomku definována pro $x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Počítejme

$$\begin{aligned} \log_{10} x + \frac{8}{\log_{10} x} &= 6 && / \cdot \log_{10} x \\ (\log_{10} x)^2 + 8 &= 6 \log_{10} x && /y = \log_{10} x \\ y^2 - 6y + 8 &= 0 \\ (y - 4)(y - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Zpětným dosazením dostáváme, že řešením rovnice jsou $x \in \{10^2, 10^4\}$.

Příklad 2. (a) Nerovnice je definována na $\mathbb{R}$. Upravme nerovnici

$$\begin{aligned} (x - 2)(x + 2) &\leq 2x - 4 \\ (x - 2)(x + 2) - 2(x - 2) &\leq 0 \\ (x - 2)(x + 2 - 2) &\leq 0 \\ (x - 2)x &\leq 0. \end{aligned}$$

Nyní si uvědomíme, že součin nenulových výrazů je kladný (resp. záporný) právě tehdy, když je počet záporných součinitelů sudý (resp. lichý). Pro lepší představu, kde jsou jaké výrazy kladné a záporné si můžeme například udělat tabulku:

	$(-\infty, 0)$	$\langle 0, 2)$	$\langle 2, \infty)$
x	-	+	+
$x - 2$	-	-	+

Navíc vidíme, že v naší nerovnici je neostrá nerovnost, takže řešením budou i hodnoty, kde je nějaký součinitel nulový.

Proto rovnici řeší $x \in \langle 0, 2\rangle$.

(b) Ihned vidíme, že rovnice je definována na $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Mohli bychom postupovat tak, že vynásobíme výrazem $(x - 3)$. Pak bychom museli ale řešit, kdy je tento výraz kladný/záporný/roven nule. Zkusme tedy postupovat tak, že všechny výrazy převedeme na levou stranu nerovnice. Počítejme

$$\begin{aligned} \frac{5x - 1}{x - 3} &\geq -x - 1 \\ \frac{5x - 1}{x - 3} + x + 1 &\geq 0 \\ \frac{5x - 1 + x^2 - 3x + x - 3}{x - 3} &\geq 0 \\ \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 3} &\geq 0 \\ \frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 3} &\geq 0. \end{aligned}$$

Opět si můžeme sestrojit příslušnou tabulku:

	$(-\infty,-4)$	$\langle -4,1\rangle$	$\langle 1,3)$	$(3,\infty)$
$x+4$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$x-3$	-	-	-	+

Hodnotu 3 jsem v tabulce neuvažovali, neboť tam nerovnice definována není. Opět se v nerovnici vyskytuje neostrá nerovnost, takže ve výsledku se objeví i krajní body intervalů s výjimkou hodnoty 3.

Řešením nerovnice jsou $x \in \langle -4,1\rangle \cup (3,\infty)$.

(c) Nerovnice je definována na $\mathbb{R}$. Opět rozdělíme na dva případy podle znaménka výrazu v absolutní hodnotě. Počítejme:

Na $(-\infty,0)$:

$$\begin{aligned}
\left|x-\left|\frac{x}{2}\right|\right| &< 3\\
\left|x+\frac{x}{2}\right| &< 3\\
\left|\frac{3}{2}x\right| &< 3\\
\frac{3}{2}|x| &< 3\\
|x| &< 2\\
-x &< 2\\
x &> -2.
\end{aligned}$$

Naším prvním řešením jsou tedy $x \in (-\infty,0)\cap(-2,\infty) = (-2,0)$ (pronikli jsme řešení s množinou, na které jsme počítali).

Na $\langle 0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
\left|x-\left|\frac{x}{2}\right|\right| &< 3\\
\left|x-\frac{1}{2}x\right| &< 3\\
\frac{1}{2}|x| &< 3\\
|x| &< 6\\
x &< 6.
\end{aligned}$$

Řešením tedy jsou $x \in \langle 0,\infty)\cap(-\infty,6) = \langle 0,6)$.

Celkem nerovnici řeší $x \in (-2,6)$.

(d) Nerovnice je definována pro $x \in \mathbb{R}$ ($x^2-3x+3>0$). Počítejme

$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) &> 0 && \text{Aplikujeme na obě strany nerovnice exponenciální funkci o základu } \frac{1}{3}\\
x^2-3x+3 &< 1\\
x^2-3x+2 &< 0\\
(x-2)(x-1) &< 0,
\end{aligned}$$

kde znaménko nerovnosti se převrátilo díky tomu, že exponenciála se základem $\frac{1}{3}$ (obecněji pro základy <1) je klesající funkce. Opět si můžeme udělat tabulku:

	$(-\infty,1)$	$\langle 1,2)$	$\langle 2,\infty)$
$x-1$	-	+	+
$x-2$	-	-	+

Všimněme si, že v této nerovnici máme ostrou nerovnost, a tudíž krajní hodnoty intervalů se ve výsledku neobjeví, neboť v těchto hodnotách je buď $x-2$ nebo $x-1$ rovno nule.

Rovnici tedy řeší $x \in (1,2)$.

(e) Rovnice je definována na $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Převeďme na levou stranu a počítejme

$$\begin{aligned}\frac{(x-4)(x+2)}{x-3} - x - 2 &\geq 0\\ \frac{x^2-2x-8-x^2+3x-2x+6}{x-3} &\geq 0\\ \frac{-x-2}{x-3} &\geq 0\\ \frac{x+2}{x-3} &\leq 0.\end{aligned}$$

Rovnici proto řeší $x \in \langle -2, 3)$.

(f) Budeme řešit zvlášť na třech intervalech podle toho, kdy jsou výrazy uvnitř absolutních hodnot záporné či nezáporné:

Na $(-\infty, -1)$ máme:

$$\begin{aligned}-x-1-2+x &< 1\\ -3 &< 1\end{aligned}$$

a to zřejmě platí. Dostáváme tedy první řešení nerovnice a to $x \in (-\infty, -1)$.

Na $\langle -1, 2)$ máme:

$$\begin{aligned}x+1-2+x &< 1\\ 2x &< 2\\ x &< 1,\end{aligned}$$

a tedy dalšími řešeními jsou $x \in \langle -1, 2) \cap (-\infty, 1) = \langle -1, 1)$.

Na $\langle 2, \infty)$ máme:

$$\begin{aligned}x+1+2-x &< 1\\ 3 &< 1,\end{aligned}$$

ale to neplatí. Tedy na třetím intervalu nemáme žádné řešení.

Celkem nerovnici řeší $x \in (-\infty, 1)$.

(g) Funkce tan je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Tudíž Chceme, aby $2x - 1$ bylo různé od $\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \iff 2x$ je různé od $\{\frac{\pi}{2} + 1 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \iff x$ je různé od $\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$. Dostáváme, že nerovnice je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$. Použijme substituci $z = 2x - 1$ a počítejme díky π-periodicitě funkce na tan na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ze znalostí tabulkových hodnot pro tan ($\tan -\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$) a faktu, že je rostoucí na tomto intervalu ihned dostáváme

$$\tan z \geq -\sqrt{3} \iff z \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}).$$

Z π-periodicity tudíž dostáváme, že

$$z \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi).$$

Dosadíme $z = 2x - 1$ a dopočteme x.

$$\begin{aligned}z \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) &\iff 2x - 1 \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)\\ &\iff 2x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{3} + 1 + k\pi, \frac{\pi}{2} + 1 + k\pi)\\ &\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

a to je tedy řešení naší nerovnice.

(h) Nerovnice je definována na $\mathbb{R}$. Počítejme

$$
\begin{aligned}
\cos 2x &< \sin x \\
\cos^2 x - \sin^2 x &< \sin x \\
1 - \sin^2 x - \sin^2 x &< \sin x \\
-2\sin^2 x - \sin x + 1 &< 0 \\
\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x &> \frac{1}{2} \\
\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{16} &> \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \\
(\sin x + \frac{1}{4})^2 &> \frac{9}{16} \\
\left|\sin x + \frac{1}{4}\right| &> \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

Nyní opět budeme řešit zvlášť na množinách podle znaménka obsahu absolutní hodnoty:

Na $\{x \in \mathbb{R}\colon \sin x + \frac{1}{4} \geq 0\}$ máme

$$
\begin{aligned}
\sin x + \frac{1}{4} &> \frac{3}{4} \\
\sin x &> \frac{1}{2} \iff x \in A := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi).
\end{aligned}
$$

Všimneme si nyní, že $A \subset \{x \in \mathbb{R}\colon \sin x + \frac{1}{4} \geq 0\}$, neboť pro $x \in A$ máme, že $\sin x > \frac{1}{2}$ a tedy $\sin x + \frac{1}{4} > \frac{3}{4} \geq 0$.

Na $\{x \in \mathbb{R}\colon \sin x + \frac{1}{4} < 0\}$ máme

$$
\begin{aligned}
-\sin x - \frac{1}{4} &> \frac{3}{4} \\
-\sin x &> 1 \\
\sin x &< -1,
\end{aligned}
$$

ale to zřejmě neplatí pro žádné x. Tudíž na $\{x \in \mathbb{R}\colon \sin x + \frac{1}{4} < 0\}$ nemáme žádné řešení.

Celkem nerovnici řeší $x \in A$.

(i) Nerovnice je definována na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Počítejme nejprve na $(-\infty, 2)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{x+2}{x-1} &\geq 2 - x \\
\frac{x+2}{x-1} + x - 2 &\geq 0 \\
\frac{x + 2 + x^2 - x - 2x + 2}{x-1} &\geq 0 \\
\frac{x^2 - 2x + 4}{x-1} &\geq 0
\end{aligned}
$$

a všimneme si, že čitatel je větší než nula pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (třeba tak, že diskriminant čitatele je záporný a koeficient u x^2 je kladný, tedy daná parabola neprotíná osu x a je umístěna nad osou x). Sestrojíme si tabulku:

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$x^2 - 2x + 4$	$+$	$+$
$x - 1$	-	$+$

Tedy máme řešení na $(-\infty, 2)$ a to $x \in (-\infty, 2) \cap (1, \infty) = (1, 2)$.

Na $\langle 2,\infty)$:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x-1} &\geq x-2\\ \frac{x+2}{x-1}-x+2 &\geq 0\\ \frac{x+2-x^2+2x+x-2}{x-1} &\geq 0\\ \frac{-x^2+4x}{x-1} &\geq 0 \qquad\qquad / \cdot (-1)\\ \frac{x(x-4)}{x-1} &\leq 0\end{aligned}$$

a sestrojíme tabulku:

	$(-\infty,0)$	$\langle 0,1)$	$(1,4)$	$\langle 4,\infty)$
x	-	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$x-4$	-	-	-	+

Odtud vidíme, že řešení na $\langle 2,\infty)$ jsou $x\in\langle 2,\infty)\cap((-\infty,0\rangle\cup(1,4\rangle)=\langle 2,4\rangle$.

Celkem nerovnici řeší $x\in(1,4\rangle$.

(j) Nerovnice je definována na $\mathbb{R}$. Řešme nejprve na $(-\infty,0)$:

$$\begin{aligned}3^{-x^3-3} &> 3^{-\left|2x^3\right|}\\ 3^{-x^3-3} &> 3^{2x^3}\\ -x^3-3 &> 2x^3\\ -3 &> 3x^3\\ -1 &> x^3\\ -1 &> x\end{aligned}$$

kde z druhého na třetí řádek jsme aplikovali na obě strany nerovnice funkci logaritmus of základu 3. Ten je rostoucí, a tedy nerovnost zůstala zachována. Řešením na $(-\infty,0)$ tedy jsou $x\in(-\infty,0)\cap(-\infty,-1)=(-\infty,-1)$.

Na $\langle 0,\infty)$:

$$\begin{aligned}3^{-x^3-3} &> 3^{-2x^3}\\ -x^3-3 &> -2x^3\\ x^3 &> 3\\ x &> \sqrt[3]{3}.\end{aligned}$$

Řešením na$\langle 0,\infty)$ tedy jsou $x\in\langle 0,\infty)\cap(\sqrt[3]{3},\infty)=(\sqrt[3]{3},\infty)$.

Celkem nerovnici řeší $x\in(-\infty,-1)\cup(\sqrt[3]{3},\infty)$.

(k) Rovnice je definována na $\mathbb{R}$. Nejprve rozdělíme na dvě množiny podle zmanénka funkce $2x-1$. Počítejme nejprve na $(-\infty,\frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned}|-2x+1-7| &\leq 2\\ |2x+6| &\leq 2.\end{aligned}$$

Nyní v rámci intervalu $(-\infty,\frac{1}{2})$ uvážíme dva případy a to podle znaménka funkce $2x+6$. Na $(-\infty,-3)$, kde je $2x+6$ záporná, máme

$$\begin{aligned}-2x-6 &\leq 2\\ -2x &\leq 8\\ x &\geq -4,\end{aligned}$$

a tedy na $(-\infty, \frac{1}{2}) \cap (-\infty, -3) = (-\infty, -3)$ nerovnici řeší $x \in \langle -4, -3)$. Na $(-\infty, \frac{1}{2}) \cap \langle -3, \infty) = \langle -3, \frac{1}{2})$ máme

$$\begin{aligned} 2x + 6 &\leq 2 \\ x &\leq -2, \end{aligned}$$

a tedy na $(-\infty, \frac{1}{2}) \cap \langle -3, \infty) = \langle -3, \frac{1}{2})$ nerovnici řeší $x \in \langle -3, -2\rangle$. Proto na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$ nerovnici řeší $x \in \langle -4, -2\rangle$.

Na $\langle \frac{1}{2}, \infty)$ budeme postupovat obdobně:

$$\begin{aligned} |2x - 1 - 7| &\leq 2 \\ |x - 4| &\leq 1. \end{aligned}$$

Nyní opět rozdělíme na dva podintervaly. Řešme nejprve na $(-\infty, 4) \cap \langle \frac{1}{2}, \infty)$:

$$\begin{aligned} 4 - x &\leq 1 \\ x &\geq 3. \end{aligned}$$

Řešením na $\langle \frac{1}{2}, 4)$ tedy jsou $x \in \langle 3, 4)$. Na $\langle 4, \infty)$ máme

$$\begin{aligned} x - 4 &\leq 1 \\ x &\leq 5, \end{aligned}$$

a tedy zde nerovnici řeší $x \in \langle 4, 5\rangle$.

Celkem nerovnici řeší $x \in \langle -4, -2\rangle \cup \langle 3, 5\rangle$.

(l) Nerovnice je definována na $\mathbb{R}$. Počítejme

$$\begin{aligned} 2 - \cos 2x - 3\sin x &< 0 \\ 2 - \cos^2 x + \sin^2 x - 3\sin x &< 0 \\ 2 - 1 + \sin^2 x + \sin^2 x - 3\sin x &< 0 \qquad /y = \sin x \\ 2y^2 - 3y + 1 &< 0 \\ y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} &< 0. \end{aligned}$$

Nalezneme nyní kořeny kvadratické rovnice $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$

$$y_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}.$$

Kořeny tedy jsou $y_1 = \frac{1}{2}$ a $y_2 = 1$. Dostáváme tudíž $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = (y - \frac{1}{2})(y - 1)$ a tedy $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} < 0 \iff y \in (\frac{1}{2}, 1)$. Dosadíme zpětně za y a dostáváme podmínku $\sin x \in (\frac{1}{2}, 1)$. To nastane právě tehdy, když $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$ a to je naše řešení nerovnice.

(m) Nerovnice je definována na $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$. Uvědomíme si, že $\sin x^2 \geq -1$, neboť obor hodnot funkce sin je $\langle -1, 1\rangle$.
Odtud $\sin x^2 + 12\,|\tan x| \geq -1 + 0 = -1 \geq -2$. Tedy nerovnice je splněna kdykoliv je levá strana definována.

Nerovnici tudíž řeší $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

(n) Nerovnice je definována na $\mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$. Převedeme vše na jednu stranu a dáme na společného jmenovatele:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+3} &\leq \frac{x+1}{x-2} \\ \frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x-2} &\leq 0 \\ \frac{x^2 - 4x + 4 - x^2 - 4x - 3}{(x+3)(x-2)} &\leq 0 \\ \frac{-8x + 1}{(x+3)(x-2)} &\leq 0 \\ \frac{8x - 1}{(x+3)(x-2)} &\geq 0 \end{aligned}$$

a sestrojíme si tabulku

	$(-\infty,-3)$	$(-3,\frac{1}{8})$	$\langle\frac{1}{8},2)$	$(2,\infty)$
$x+3$	-	$+$	$+$	$+$
$8x-1$	-	-	$+$	$+$
$x-2$	-	-	-	$+$

Odtud vidíme, že nerovnici řeší $x \in (-3,\frac{1}{8}\rangle \cup (2,\infty)$.

Příklad 3. (a) Nerovnice je pro $c \in \mathbb{R}$ definována na $\mathbb{R}$. Všimněme si, že pokud $c > 0$, pak nerovnost $ce^x \leq 0$ nemůže být splněna, neboť $e^x > 0$ pro $x \in \mathbb{R}$. Tedy pro $c > 0$ neexistuje žádné řešení.

Pokud $c = 0$, určujeme $x \in \mathbb{R}$ taková, že $-1 < 0 \leq 0$. To ale jistě platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro $c = 0$ je tedy řešením každé $x \in \mathbb{R}$.

Pokud $c < 0$, tak druhá nerovnost vždy platí, neboť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x > 0$, a tedy $ce^x < 0$. Zameříme se tedy na první nerovnost:

$$\begin{aligned} -1 &< ce^x \\ -\frac{1}{c} &> e^x \\ \log(-\frac{1}{c}) &> x. \end{aligned}$$

Řešením pro $c < 0$ jsou tudíž $x \in (-\infty, \log(-\frac{1}{c}))$.

(b) Nerovnice je pro $c \in \mathbb{R}$ definována na $\mathbb{R}$. Ihned vidíme, že pokud $c \in (-\infty, 0)$, pak nerovnici řeší všechna $x \in \mathbb{R}$. Pokud $c \in \langle 1,\infty)$, pak rovnice nemá žádné řešení. Zbývá tedy vyřešit případ pro $c \in \langle 0,1)$. Funkce $|\sin x|$ je π-periodická, stačí tedy řešit na $\langle 0,\pi\rangle$. Na $\langle 0,\pi\rangle$ je $|\sin x| = \sin x$, řešíme tedy nerovnici $\sin x > c$. Dále si můžeme uvedomit, že funkce sin je symetrická podle osy $x = \frac{\pi}{2}$ (tj. $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$), takže nám stačí vlastně řešit rovnici na $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$. Jelikož nyní řešíme tuto nerovnici na $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$, aplikujeme na obě strany funkci arcsin. Dostáváme tedy $x > \arcsin c$. Na $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ tedy nerovnici řeší $x \in (\arcsin c, \frac{\pi}{2}\rangle$. Ze symetrie pak dostáváme, že na $\langle 0,\pi\rangle$ nerovnici řeší $x \in (\arcsin c, \pi - \arcsin c)$. Proto celkově pro $c \in \langle 0,1)$ nerovnici řeší $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\arcsin c + k\pi, \pi - \arcsin c + k\pi)$.

(c) Nerovnice je pro $c \in \mathbb{R}$ definována na $\mathbb{R}$. Pokud $c \leq 0$, pak nerovnice nemá žádné řešení. Ať tedy $c > 0$. Opět rozdělíme na tři podintervaly podle znamének funkci uvnitř absolutních hodnot.

Na $(-\infty,-3)$:

$$\begin{aligned} -x-x-3 &< c \\ -2x &< c+3 \\ x &> -\frac{c+3}{2}, \end{aligned}$$

a tedy zde nerovnici řeší

$$x \in (-\infty,-3) \cap (-\frac{c+3}{2},\infty) = \begin{cases} \emptyset, & c \leq 3, \\ (-\frac{c+3}{2},-3), & c > 3. \end{cases}$$

Na $\langle -3,0)$:

$$\begin{aligned} -x+x+3 &< c \\ 3 &< c, \end{aligned}$$

a tedy zde jsou řešením

$$x \in \begin{cases} \emptyset, & c \leq 3, \\ \langle -3,0), & c > 3. \end{cases}$$

Na $\langle 0,\infty)$:

$$\begin{aligned} x+x+3 &< c \\ 2x &< c-3 \\ x &< \frac{c-3}{2}, \end{aligned}$$

a tedy zde jsou řešením

$$x \in \langle 0,\infty) \cap (-\infty,\frac{c-3}{2}) = \begin{cases} \emptyset, & c \leq 3, \\ \langle 0,\frac{c-3}{2}), & c < 3. \end{cases}$$

Vidíme, že proto celkem pro $c \leq 3$ neexistuje žádné řešení, a pro $c > 3$ rovnici řeší $x \in (-\frac{c+3}{2}, \frac{c-3}{2})$.

(d) Nerovnice je pro každé $c \in \mathbb{R}$ definována na $\mathbb{R}$. Výraz v absolutní hodnotě můžeme přepsat na $x(x+2)$, takže nejdřív budeme nerovnici řešit tam, kde je tato funkce záporná, tj. na $(-2,0)$:

$$\begin{aligned}-x^2 - 2x &< c + 2x\\ -x^2 - 4x - c &< 0\\ x^2 + 4x + c &> 0.\end{aligned}$$

Nyní spočteme kořeny této kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4c}}{2} = -2 \pm \sqrt{4 - c}.$$

Odtud vidíme, že pokud je $c > 4$, pak je diskriminant $(4 - c)$ záporný, a tedy vzhledem k orientaci paraboly řešením je celý interval $(-2, 0)$. Pokud $c = 4$, pak máme jeden kořen, $x = -2$, ale ten neleží v $(-2, 0)$, takže opět vzledem k orientaci paraboly je řešením celé $(-2, 0)$. Pokud $c < 4$, máme kořeny $x_1 = -2 - \sqrt{4-c}$ a $x_2 = -2 + \sqrt{4-c}$. Řešením tedy v tomto případě budou

$$x \in (-2,0) \cap ((-\infty, -2 - \sqrt{4-c}) \cup (-2 + \sqrt{4-c}, \infty)) = \begin{cases} \emptyset, & c \leq 0,\\ (-2 + \sqrt{4-c}, 0), & c \in (0,4).\end{cases}$$

Na $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 0, \infty)$:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x &< c + 2x\\ x^2 &< c.\end{aligned}$$

Vidíme, že zde nemáme žádné řešení, pokud $c \leq 0$. V opačném případě jsou řešením

$$x \in ((-\infty, -2\rangle \cup \langle 0, \infty)) \cap (-\sqrt{c}, \sqrt{c}) = \begin{cases} \langle 0, \sqrt{c}), & 0 < c \leq 4,\\ (-\sqrt{c}, -2\rangle \cup \langle 0, \sqrt{c}), & c > 4.\end{cases}$$

Celkem tedy:
Pro $c \leq 0$ neexistuje žádné řešení.
Pro $c \in (0, 4\rangle$ nerovnici řeší $x \in (-2 + \sqrt{4-c}, \sqrt{c})$.
Pro $x > 4$ nerovnici řeší $x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$.

(e) Rovnice je definována pro každé $c \in \mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Všimněme si, že pro $c = 1$ se jedná o lineární rovnici $-2x - 1 + 8 = 0$, kteoru řeší $x = \frac{7}{2}$. Ať tedy $c \neq 1$. Pak vydělíme rovnici výrazem $c - 1$ a dostáváme

$$x^2 - \frac{2c}{c-1}x + \frac{-c+8}{c-1} = 0.$$

Spočteme nejdříve diskriminant D a určíme, kdy je kladný, roven nule a záporný. Je

$$\begin{aligned}D &= \frac{4c^2}{(c-1)^2} - 4\frac{8-c}{c-1}\\ &= \frac{4c^2 + 4c^2 - 32c - 4c + 32}{(c-1)^2}\\ &= \frac{4}{(c-1)^2}(2c^2 - 9c + 8).\end{aligned}$$

Tudíž kladnost/zápornost diskriminantu závisí na hodnotě výrazu $2c^2 - 9c + 8$. Dopočteme kořeny tohoto polynomu

$$c_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 64}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Koeficient u c^2 je kladný, a tedy

$$\begin{aligned}D < 0 &\iff c \in (\frac{9-\sqrt{17}}{4}, \frac{9+\sqrt{17}}{4}),\\ D = 0 &\iff c \in \{\frac{9-\sqrt{17}}{4}, \frac{9+\sqrt{17}}{4}\},\\ D > 0 &\iff c \in (-\infty, \frac{9-\sqrt{17}}{4}) \setminus \{1\} \cup (\frac{9+\sqrt{17}}{4}, \infty),\end{aligned}$$

kde v případě $D > 0$ vyškrtáváme hodnotu jedna, neboť uvažujeme pouze $c \neq 1$.

Pokud je $D < 0$, nemá rovnice řešení.

Dopočteme nyní kořeny kvadratické rovnice pro $D \geq 0$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{\frac{2c}{c-1} \pm \sqrt{D}}{2} \\ &= \frac{c}{c-1} \pm \frac{1}{|c-1|}\sqrt{2c^2 - 9c + 8}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že pokud $D = 0$, pak máme jeden kořen, a to $x = \frac{c}{c-1}$.

Pokud $D > 0$, pak máme dva kořeny. $x_1 = \frac{c}{c-1} - \frac{1}{|c-1|}\sqrt{2c^2 - 9c + 8}$ a $x_2 = \frac{c}{c-1} + \frac{1}{|c-1|}\sqrt{2c^2 - 9c + 8}$.

Celkem tedy máme: pokud $c = 1$, tak $x = \frac{7}{2}$.

Pokud $c \in \{\frac{9-\sqrt{17}}{4}, \frac{9+\sqrt{17}}{4}\}$, tak $x = \frac{c}{c-1}$.

Pokud $c \in (\frac{9-\sqrt{17}}{4}, \frac{9+\sqrt{17}}{4})$ tak nemáme žádné řešení.

Pokud $c \in (-\infty, \frac{9-\sqrt{17}}{4}) \setminus \{1\} \cup (\frac{9+\sqrt{17}}{4}, \infty)$, tak rovnici řeší $x \in \{\frac{c}{c-1} - \frac{1}{|c-1|}\sqrt{2c^2 - 9c + 8}, \frac{c}{c-1} + \frac{1}{|c-1|}\sqrt{2c^2 - 9c + 8}\}$.

Příklad 5. (a) Například $(x-4)(x+6) > 0$.

(b) Například $(x+2)^2 \geq 0$.

(c) Například $x^2 < 0$.

(d) Například $x(x-2) \leq 0$.

Příklad 6. Použijeme vzorečky pro dvojnásobné úhly:

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = 2 \cdot 2 \sin x \cos x \cdot (\cos^2 - \sin^2 x) = 4 \sin x \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cos x,$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - (2 \sin x \cos x)^2 = \cos^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x.$$

Příklad 7. (a) Uvažujme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$. Upravujme

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ (x + \frac{b}{2a})^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \end{aligned}$$

kde odstranění absolutní hodnoty v jmenovateli výsledek nezmění, pouze by se změnilo $\pm$ na $\mp$. Kořeny nicméně vycházejí stejně.

(b) Počítejme pro $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x| \cdot |y| + y^2 = |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Odmocněním dostáváme požadovaný výsledek.

(c) Pro $x, y \in \mathbb{R}$ máme z (b)

$$|y| = |x + y - x| \leq |x| + |y - x|,$$

neboli

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$$

a

$$|x| = |y + x - y| \leq |y| + |x - y|,$$

neboli

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Z těchto dvou nerovností a definice absolutní hodnoty již plyne $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

(d) Nechť $n, k \in \mathbb{N}, n > k > 0$. Rozepíšeme z definice a počítáme

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!k}{(n-k)!(k-1)!k} + \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-1-k)!(n-k)k!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{(n-k)!k!} = \frac{(n-1)!n}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$