14. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Abelovo a Dirichletovo kritérium.)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Je-li splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(A)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{je konvergentní;}$$

(D)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{má omezené částečné součty a navíc} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Fakta

První fakt o „goniometrických" řadách. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$$

sice divergují (mimo $x = 0$ modulo 2π u sinové řady), ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ mají stejně omezené částečné součty.

Druhý fakt o „goniometrických" řadách. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}$$

konvergují absolutně pro $\alpha > 1$. Sinová řada konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, absolutně však pouze pro $x = 2n\pi$, kde n je celé číslo (pak je řada nulová). Kosinová řada konverguje neabsolutně pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $2n\pi$, kde n je celé číslo, pro $x = 2n\pi$ diverguje. Pro $\alpha \leq 0$ řady vždy divergují.

Speciálně řady $\sum_k |\sin k|/k$ a $\sum_k |\cos k|/k$ divergují.

Příklady

1. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci následujících řad

   (a)
   $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{k+1}\cos 2k\pi$$

   (b) Použijte Leibnize a pak Abela
   $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{k^2}{k^2+1}$$

   (c)
   $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k+10}{3k+1}\right)^k$$

   (d) Rozepište na $\frac{\sin k}{k}\cdot\frac{k^2}{k^2+1}$, použijte Abela. Ke konvergenci $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin k}{k}$ užijte Dirichleta a roztržení na sudé a liché členy.
   $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k\sin k}{k^2+1}$$

   (e) Užijte faktu $2\sin^2 = 1-\cos 2k$
   $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin^2 k}{k}$$

   (f) Pro neabsolutní konvergenci použijeme srovnání s předchozí řadou. Pro absolutní konvergenci opět přepíšeme sinus jako výše a postupujeme analogicky předchozím příkladům.
   $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k\sin^2 k}{k^2+1}$$

   (g) Fakt: $2\cos k = 1+\cos 2k$.
   $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos^2 k}{\ln k}$$

   (h)
   $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{A^k+1}\sin k,$$
   kde $A>0$.

(i) Užijeme: $2\cosh\, y = e^y + e^{-y}$, $2\sinh\ = e^y - e^{-y}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sinh\, kx + \cosh\, kx}{e^{2kx}},$$

kde $x \in \mathbb{R}$.

2. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci následujících řad s parametrem $x, z \in \mathbb{R}$.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1 + x^{2k}}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

3. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergentní s nekonečným součtem. Lze něco říci o řadách

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n - a_n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n + c_n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n - c_n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \min\{b_n, c_n\}$