

## 18. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>  
kytaristka@gmail.com

### Příklady

1. (a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x]$$

**Řešení:** Užijeme pravidla, že rozdíl logaritmů je logaritmus podílu a spojitosti logaritmu.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \\ &= \ln \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \ln[e] = 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a},$$

kde  $a > 0$

**Řešení:**

Užijeme substituci  $y = x - a$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{y+a}{a}}{y} = \\ \lim_{y \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{y}} &= \ln \left[ \lim_{y \rightarrow 0} \left(1 + \frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{y}} \right] = \ln[e^{1/a}] = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x},$$

kde  $a > 0$ .

**Řešení:**

Substituujeme  $y = x + 1$  a posléze  $y = e^z$ . Pak máme

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y - 1} = 1 \implies \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1 \implies \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Tím jsme spočítali příklad pro speciální případ, kdy  $a$  je rovno Eulerovu číslu  $e$ .

Nyní spočteme limitu pro obecné  $a > 0$ . V závěru substituujeme  $y = x \ln a$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \ln a = \ln a.$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$$

**Řešení:**

Postupujeme vytknutím.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\ln x^{10}(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 + \ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\ln x^{10} + \ln(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} =$$

Je načase využít další hezké vlastnosti logaritmu, konkrétně jeho chování vůči mocninám.

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + \ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{10 \ln x + \ln(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} =$$

A konečně poslední vytknutí

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})/\ln x}{10 + \ln(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})/\ln x} = \frac{2 + 0}{10 + 0} = \frac{1}{5}.$$

Jen pro pohodlí řekněme, že výpočet limity využívá věty o algebre limit a výpočet (s přihlédnutím ke spojitosti logaritmu)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = \ln(1 - 0 + 0) \cdot 0 = 0.$$

To, že  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$  netřeba zdůvodňovat.

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$

**Řešení:**

Sledujte výpočet.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + x \sin x} - 1)/x^2}{(e^{x^2} - 1)/x^2} =$$

Po použití věty o limitě podílu (limita jmenovatele je rovna jedné) pokračujeme rozšířením odmocniny.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - 1}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x \sin x} + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x \sin x} + 1} = 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$$

**Řešení:**

Vytknutím, jako obvykle. Pak použijte větu o algebře limit a spojitost logaritmu.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{3x} + \ln(\frac{2}{e^{3x}} + 1)}{\ln e^{2x} + \ln(\frac{3}{e^{2x}} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(\frac{2}{e^{3x}} + 1)}{2x + \ln(\frac{3}{e^{2x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \ln(\frac{2}{e^{3x}} + 1)/x}{2 + \ln(\frac{3}{e^{2x}} + 1)/x} = \frac{3 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}$$

**Řešení:** Protože  $3^x \rightarrow 0$ , pokud  $x \rightarrow -\infty$ , vede k cíli nenápadné rozšíření.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{3^x}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{2^x}} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x} =$$

Substituce  $y = 3^x$  a  $z = 2^x$  dává ihned v kombinaci s faktem, že  $\frac{3}{2} > 1$ , a tedy  $(\frac{3}{2})^x$  klesá v minus nekonečnu k nule

$$= \frac{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+z)}{z}} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0.$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$$

**Řešení:**

V čitateli vytkněte  $\sqrt{x}$ , dole  $\sqrt[3]{x}$  (oba členy s nejvyšší mocninou u  $x$ ).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x} + \ln(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})}{\ln \sqrt[3]{x} + \ln(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \ln x + \ln(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})}{\frac{1}{3} \ln x + \ln(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} + \ln(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})/\ln x}{\frac{1}{3} + \ln(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})/\ln x} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{\frac{1}{3} + 0} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}}$$

**Řešení:** lze rovnou dosadit.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}} \right) = \ln \frac{1}{1} = \ln 1 = 0.$$

(j)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}$$

**Řešení:**

V čitateli i jmenovateli jsou dominantními členy exponenciály. Vytkneme je tedy. Sledujte, co se bude dít.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3^x (3^{-x} + 1)}{\ln 2^x (2^{-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3^x + \ln(3^{-x} + 1)}{\ln 2^x + \ln(2^{-x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3 + \ln(3^{-x} + 1)}{x \ln 2 + \ln(2^{-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 + \ln(3^{-x} + 1)/x}{\ln 2 + \ln(2^{-x} + 1)/x} = \end{aligned}$$

Věta o limitě podílu a o limitě součtu dává (s přihlédnutím k faktu, že  $0/\infty = 0$ , hranaté závorky naznačují neoficiální část výpočtu; pokud ale máte zavedenu algebru nekonečen, je vše v pořádku)

$$\left\langle \left\langle = \frac{\ln 3 + \ln(0 + 1)/(+\infty)}{2 + \ln(0 + 1)/(+\infty)} \right\rangle \right\rangle = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

(k)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$

**Řešení:**

Sledujte výpočet. Je jednička v čitateli na zmatení?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}/x^2}{(e^{x^2} - 1)/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{x^2} =$$

Protože  $x \sin x$  je kladný výraz na okolí nuly, též tak  $x^2$ , můžeme doplnit absolutní hodnoty.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x \sin x|^{1/2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{1/2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = 1 \cdot +\infty = +\infty$$

(l)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a},$$

kde  $a > 0$ **Řešení:**

Postupujeme trikem vhodného rozšíření za pomoci limity z předchozího příkladu.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - a^a + a^a - x^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - a^a}{x - a} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x - a} =$$

Nyní jde vlastně o počítání derivací funkcí  $a^x$  a  $x^a$  v bodě  $a$ .

$$= \lim_{x \rightarrow a} a^a \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} - \lim_{x \rightarrow a} a^{a-1} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^a - 1}{\frac{x}{a} - 1} =$$

V první limitě substituujeme  $y = x - a$ , ve druhé  $z = x/a$ .

$$= \lim_{y \rightarrow 0} a^a \frac{a^y - 1}{y} - \lim_{z \rightarrow 1} a^{a-1} \frac{z^a - 1}{z - 1} = a^a \ln a - \lim_{z \rightarrow 1} a^{a-1} \frac{e^{a \ln z} - 1}{z - 1} =$$

Nyní chytře rozšíříme a užijeme substituci  $t = z - 1$  na poslední zlomek. Viz též příklad XXI.B.1.

$$= a^a \ln a - \lim_{z \rightarrow 1} a^{a-1} \frac{e^{a \ln z} - 1}{a \ln z} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{a \ln z}{z - 1} =$$

$$= a^a \ln a - a^{a-1} \cdot 1 \cdot a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = a^a \ln a - a^a \cdot 1 = a^a (\ln a - 1).$$

(m)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a},$$

kde  $a > 0$ **Řešení:**

Postupujeme trikem vhodného rozšíření.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - x^a + x^a - a^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - x^a}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x - a} =$$

Druhou limitu už známe a víme, že je rovna  $a^a$  (viz výpočet v minulém příkladu). Zbývá spočítat první limitu.

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - x^a}{x - a} + a^a = \lim_{x \rightarrow a} \left( x^a \frac{x^{x-a} - 1}{x - a} \right) + a^a = \lim_{x \rightarrow a} \left( x^a \frac{e^{(x-a) \ln x} - 1}{x - a} \right) + a^a =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left( x^a \ln x \frac{e^{(x-a) \ln x} - 1}{(x-a) \ln x} \right) + a^a = \lim_{x \rightarrow a} (x^a \ln x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{(x-a) \ln x} - 1}{(x-a) \ln x} + a^a =$$

Substituce  $y = (x - a) \ln x$  na druhou limitu.

$$= a^a \ln a \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} + a^a = a^a \ln a + a^a = a^a (\ln a + 1).$$

2. (a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x + 1}{\ln x} \right)^{\ln x}$$

**Řešení:**

substituce  $y = \ln x$  (věta o limitě složené funkce, varianta s ryze monotónní (nekonstantní) funkcí uvnitř).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x + 1}{\ln x} \right)^{\ln x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{y + 1}{y} \right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y = e.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{c}{x} \right)^x$$

**Řešení:**

Pokud  $c > 0$ , tak substituujeme  $y = x/c$  a dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{c}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^{yc} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^c = e^c,$$

neboť mocninná funkce  $x^c$  je spojitá. Pokud  $c = 0$ , vše je triviální. Pokud  $c < 0$ , potom použijeme substituce  $y = -x/c$  a dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{c}{x} \right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{y} \right)^{-yc} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{y-1}{y} \right)^{-yc} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{y}{y-1} \right)^{yc} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{y-1+1}{y-1} \right)^{yc} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{y-1} \right)^{(y-1)c+c} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{y-1} \right)^{y-1} \right]^c \cdot \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{y-1} \right)^c = e^c \cdot 1^c = e^c. \end{aligned}$$

Limita první plyne třeba substitucí  $z = y - 1$ .

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$$

**Řešení:**

Zde výhodně využijeme znalosti limity  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ . Stačí upravovat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2 + 3}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x^2 - 2} \right)^{x^2 - 2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x^2 - 2} \right)^2 = e^3 \cdot 1^2 = e^3. \end{aligned}$$

Ukažme si také, že trik s číslem  $e$  zde selže, respektive vede na jinou obtížnou limitu.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[ \ln \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right) \cdot x^2 \right] = \exp[\ln 1 \cdot +\infty] = \exp[0 \cdot +\infty] = ???$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x + a}{x - a} \right)^x$$

**Řešení:**

Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + a}{x - a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - a + 2a}{x - a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2a}{x - a} \right)^x = e^{2a}.$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$$

**Řešení:**

Počítejme nejprve jednostrannou limitu  $x \rightarrow 0+$ . Pak můžeme substituovat  $y = \frac{1}{x}$ , neboť pro  $x \rightarrow 0+$  je  $y \rightarrow +\infty$ . Pak uijeme příklad XXII.B.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[x]{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (1 - 2x)^{1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{y} \right)^y = e^{-2}.$$

Stejně vyjde i limita pro  $x \rightarrow 0-$ , neboť

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \sqrt[x]{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (1 - 2x)^{1/x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{2}{y} \right)^y = e^{-2}.$$

Z rovnosti jednostranných limit plyne, že existuje oboustranná a je jim rovna.