5. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Poloměr konvergence)**.** Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $R \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < R$, uvedená řada konverguje absolutně,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > R$, uvedená řada diverguje.

Prvek R splňuje

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

kde výrazem $1/0$ zde rozumíme $+\infty$ a výrazem $1/\infty$ zde rozumíme 0.

Poznámka 2. Mějme mocninnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|,$$

potom je rovna poloměru konvergence R této mocninné řady.

Věta 3 (Operace s mocninnými řadami)**.** Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ mají kladné poloměry konvergence R_1 a R_2. Pak

(a) $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(x - x_0)^n$, $|x - x_0| < \min\{R_1, R_2\}$,

(b) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i)(x - x_0)^n$, $|x - x_0| < \min\{R_1, R_2\}$.

Hint

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}, \qquad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Příklady

Určete poloměr konvergence R následujících mocninných řad a také konvergenci na hranici.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n,$$
   kde $(0 < \alpha < 1)$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p},$$
   kde $p \in \mathbb{R}$.

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} \cdot x^n,$$
   kde $(a > 1)$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n},$$
   kde $a > 0$, $b > 0$.

9. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

10. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$$

11. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},$$
    kde $a > 0$.

12. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) \cdot x^n,$$
    kde $a > 0$, $b > 0$.