

8. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. Goniometrické substituce

$$(a) f(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Řešení: Definiční obor funkce f je interval $(-1, 1)$, stačí tedy určit primitivní funkci na tomto intervalu. Provedeme substituci $x = \sin t$. Protože $x \in (-1, 1)$, je $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Potom

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t \implies dx = \cos t dt,$$

a protože $\cos t > 0$ pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podle druhé věty o substituci máme

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{1}{(1-\sin^2 t)^{3/2}} \cos t dt = \int \frac{1}{\cos^3 t} \cos t dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} \stackrel{C}{=} \operatorname{tg} t =$$

a s přihlédnutím k tomu, že pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$, dostaneme

$$= \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(b) f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

Řešení: Je vidět, že $x \in (-a, a)$. Použijeme substituci $x = a \sin t$. Potom

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= \int a \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} \cos t dt = \int a \sqrt{\frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \\ &= \int a(1+\sin t) dt \stackrel{C}{=} at - a \cos t = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} \end{aligned}$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Řešení: Pro $a = 1$ byl příklad řešen výše, substituci $a \sinh t$ lze použít i zde. Ukážeme si jiný postup, použijeme substituci $x = a \operatorname{tg} t$. Potom $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$ a s přihlédnutím ke vztahu $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ platí

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx = \int \frac{1}{a^3 \cdot (\operatorname{tg}^2 t + 1)^{3/2}} \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

$$= \int \frac{1}{a^2} \cos t \, dt \stackrel{C}{=} \frac{1}{a^2} \sin t = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

přičemž poslední vztah plyne z výpočtu

$$\operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} \implies \sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \implies \sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}.$$

2. Hyperbolické:

(a) $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$

Řešení: Použijeme substituci $x = a \sinh t$. Potom $dx = a \cosh t \, dt$ a platí

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx &= \int a^2 \cosh^2 t \, dt \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} (t + \cosh t \sinh t) = \\ &= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arg} \sinh \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$

Řešení:

Použijeme substituci $x = a \cosh t$. Potom $dx = a \sinh t \, dt$ a platí

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx &= \int a^2 \sinh^2 t \, dt \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} (\cosh t \sinh t - t) = \\ &= -\frac{1}{2} a^2 \operatorname{arg} \cosh \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Lze také psát

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}.$$

(c) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$

Řešení: Provedeme substituci $x = \sqrt{2} \cosh t$. Potom $dx = \sqrt{2} \sinh t \, dt$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} \, dx &= \int \frac{2 \cosh^2 t}{\sqrt{2} \sinh t} \sqrt{2} \sinh t \, dt = \int 2 \cosh^2 t \, dt \stackrel{C}{=} (t + \sinh t \cosh t) = \\ &= \operatorname{arg} \sinh \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2} \stackrel{C}{=} \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2} \end{aligned}$$

(d) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

Řešení: Použijeme substituci $x = a \sinh t$. Potom $dx = a \cosh t \, dt$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx &= \int \frac{a^2 \sinh^2 t}{a \cosh t} a \cosh t \, dt = a^2 \int \sinh^2 t \, dt \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} [t - \sinh t \cosh t] = \\ &= \frac{a^2}{2} \operatorname{arg} \sinh \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \end{aligned}$$

3. Důležité:

(a) $f(x) = \frac{3}{5-2x}$

Řešení: Užijeme lineární substituce $y = 5 - 2x$ a získáme

$$\int \frac{3}{5-2x} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \ln|5-2x|$$

(b) $f(x) = \frac{-8}{(3+5x)^4}$

Řešení: Užijeme lineární substituci $y = 3 + 5x$, pak

$$\int \frac{-8}{(3+5x)^4} = -8 \frac{-3}{(3+5x)^3} \cdot \frac{1}{5}$$

(c) $f(x) = \frac{1}{2-3x^2}$

Řešení: Obdobně jako v předchozím příkladu

$$\int \frac{1}{2-3x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 - (\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2} dx =$$

položme $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ a podle věty o lineární substituci dostáváme

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \int \frac{1}{1-y^2} dy \stackrel{C}{=}$$

S přihlédnutím k výše vypočtenému pomocnému výsledku máme

$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = \sqrt{\frac{1}{24}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{2}}x}{1 - \sqrt{\frac{3}{2}}x} \right|.$$

(d) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 2}$

Řešení: Platí, že

$$\int \frac{1}{x^2 - x + 2} dx = \int \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} dx =$$

Použitím lineární substituce $t = x - \frac{1}{2}$ a předchozího příkladu (??) dostaneme, že

$$= \int \frac{1}{t^2 + \frac{7}{4}} dt \stackrel{C}{=} \sqrt{\frac{4}{7}} \arctan \sqrt{\frac{7}{4}} t = \sqrt{\frac{4}{7}} \arctan \sqrt{\frac{4}{7}} \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{7}}$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{3x^2 - 2x - 1}$$

Řešení: Platí, že

$$\int \frac{1}{3x^2 - 2x - 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{4}{9}} dx =$$

Použitím lineární substituce $t = x - \frac{1}{3}$ a příkladu (??) dostaneme, že

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{t^2 - \frac{4}{9}} dt = \int \frac{1}{3t^2 - \frac{4}{3}} dt \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2\sqrt{3 \cdot \frac{4}{3}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3t}}{\sqrt{\frac{4}{3}} - \sqrt{3t}} \right| = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + 3t}{2 - 3t} \right| = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + 3x}{3 - 3x} \right|$$

Poznámka: uvědomte si, že stejně správné jsou i výsledky, kdy je změněné znaménko a v logaritmu prohozený čitatel se jmenovatelem, neboť

$$-\ln z = \ln \frac{1}{z}$$

Uvědomte si také, že čitatel či jmenovatel ve výsledku může být přenásoben libovolným číslem, neboť takové výsledky se liší o konstantu, protože je

$$\ln az = \ln z + \ln a = \ln z + C$$

$$(f) f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Řešení: Použijeme následující rozklad

$$\frac{x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

Důvod je následující: u prvního zlomku bychom rádi použili substituci jmenovatele $t = x^2 + x + 1$, k tomu potřebujeme v čitateli takový člen, aby se nám při substituci pokrátíl. Protože $dt = (2x + 1) dx$, můžeme buď přičíst a odečíst x (taková úprava by se ale minula účinkem, neboť není jasné, co pak s druhým zlomkem) a nebo poupravit absolutního člen, jak jsme provedli výše.

Oba zlomky, resp. integrály nyní budeme vyšetřovat zvlášť. Na první nasadíme popsanou substituci, druhý budeme počítat jako v příkladech výše převedením jmenovatele na kanonický tvar.

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{1}{2} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + \int \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{3}{4}} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2} \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \ln |t| + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{4}} \arctan \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$(g) f(x) = \frac{x^3}{x^4 - x^2 + 2}$$

Řešení: Aplikujeme rozklad

$$\frac{x^3}{x^4 - x^2 + 2} = \frac{x^3 - \frac{1}{2}x}{x^4 - x^2 + 2} + \frac{1}{2} \frac{x}{x^4 - x^2 + 2} = \frac{1}{4} \frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 2} + \frac{1}{4} \frac{2x}{(x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}$$

První zlomek nyní máme připraven na substituci jmenovatele $t = x^4 - x^2 + 2$ a ve druhém můžeme substituovat $y = x^2$, abychom dostali tvar, v němž číselník je číslo a jmenovatel kvadratický trojčlen v kanonickém tvaru. Platí tedy, že

$$\int \frac{1}{4} \frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} \stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \ln |t| = \frac{1}{4} \ln(x^4 - x^2 + 2)$$

a pro druhý zlomek dostaneme, že

$$\int \frac{1}{4} \frac{2x}{(x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} dy = \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{7}{4}} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{y - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\right)^2} dy \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{7} \cdot \sqrt{\frac{7}{4}} \cdot \arctan \frac{y - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{2y - 1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{7}}$$

Pokud dáme oba dílčí výsledky dohromady, máme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^4 - x^2 + 2} &= \int \frac{1}{4} \frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 2} dx + \int \frac{1}{4} \frac{2x}{(x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \ln(x^4 - x^2 + 2) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

4. Libovolné

$$(a) f(x) = x^2 \sqrt[3]{1-x}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = 1 - x$. Potom $dx = -dy$ a $x = 1 - y$ a platí

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx &= \int (1-y)^2 y^{1/3} dy = \int (y^{1/3} - 2y^{4/3} + y^{7/3}) dy \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{3}{4} y^{4/3} - \frac{6}{7} y^{7/3} + \frac{3}{10} y^{10/3} = \frac{3}{4} (1-x)^{4/3} - \frac{6}{7} (1-x)^{7/3} + \frac{3}{10} (1-x)^{10/3} \end{aligned}$$

$$(b) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = 2 - x$. Potom $x = 2 - y$ a $dx = -dy$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx &= - \int \frac{(2-y)^2}{y^{1/2}} dy = - \int (4y^{-1/2} - 4y^{1/2} + y^{3/2}) dy \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -8y^{1/2} + \frac{8}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} = -8\sqrt{(2-x)} + \frac{8}{3}\sqrt{(2-x)^3} - \frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5} \end{aligned}$$

$$(c) f(x) = \cos^5 x \sqrt{\sin x}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dx = \frac{1}{\cos x} dy$ a platí

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int (1 - y^2)^2 y^{1/2} dy = \int (y^{1/2} - 2y^{5/2} + y^{9/2}) dy \\ &\stackrel{C}{=} \frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{4}{7}y^{7/2} + \frac{2}{11}y^{11/2} = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x - \frac{4}{7}\sin^{7/2} x + \frac{2}{11}\sin^{11/2} x \end{aligned}$$

$$(d) f(x) = \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dx = \frac{1}{-\sin x} dy$ a platí

$$\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx = - \int \frac{y^3}{1 + y^2} dy =$$

a protože platí

$$y^3 : (y^2 + 1) = y - \frac{y}{y^2 + 1}$$

můžeme dále psát (druhý integrál lze počítat třeba substitucí $z = y^2 + 1$)

$$= - \int y dy + \int \frac{y}{y^2 + 1} dy \stackrel{C}{=} -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = -\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x)$$

$$(e) f(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{1 + \ln x}$. Potom platí, že

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} \cdot \frac{1}{x}, \quad \ln x = y^2 - 1$$

a s použitím těchto vztahů dostáváme

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx = 2 \int (y^2 - 1) dy \stackrel{C}{=} \frac{2}{3}y^3 - 2y = \frac{2}{3}\sqrt{(1 + \ln x)^3} - 2\sqrt{1 + \ln x}$$

$$(f) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{1+e^x}$. Potom $dx = \frac{2\sqrt{1+e^x}}{e^x} dy$ a platí, že $e^x = y^2 - 1$. Odtud máme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx = 2 \int \frac{1}{e^x} \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} dx = 2 \int \frac{1}{y^2-1} dy \stackrel{C}{=} 2 \ln \left| \frac{1-y}{1+y} \right| = 2 \ln \left| \frac{1-\sqrt{1+e^x}}{1+\sqrt{1+e^x}} \right|$$

$$(g) f(x) = \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arctan \sqrt{x}$. Potom

$$\frac{dy}{dx} = [\arctan \sqrt{x}]' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

a proto

$$\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x} dx = 2 \int y dy \stackrel{C}{=} y^2 = \arctan^2 \sqrt{x}$$