

9. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Integrace per partes). Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I . Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I . Pak platí

$$\int g(x)F(x)dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)dx \text{ na } I.$$

Příklady

1. $f(x) = xe^{-x}$

Řešení: Per partes: $u' = e^{-x}$, $u = -e^{-x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int xe^{-x} dx = [-xe^{-x}] - \int -e^{-x} dx \stackrel{C}{=} -xe^{-x} - e^{-x}$$

2. $f(x) = x \cos x$

Řešení: Per partes: $u' = \cos x$, $u = \sin x$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int x \cos x dx = [x \sin x] - \int \sin x dx \stackrel{C}{=} x \sin x + \cos x$$

3. $f(x) = \ln x$

Řešení:

Položme $u' = 1$, $v = \ln x$. Potom $u = \int 1 dx = x$ a $v' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ a použitím vztahu pro integraci per partes dostáváme

$$\int \ln x dx = [x \ln x] - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \stackrel{C}{=} x \ln x - x$$

4. $f(x) = \sin x \ln(\operatorname{tg} x)$

Řešení: Per partes: $u' = \sin x$, $u = -\cos x$, $v = \ln(\operatorname{tg} x)$, $v' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$.

$$\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{1}{\sin x} dx \stackrel{C}{=} -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

5. $f(x) = \arctan x$

Řešení:

Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int 1 \cdot \arctan x \, dx = [x \arctan x] - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx =$$

Substitute $y = 1 + x^2$.

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} \, dy \stackrel{C}{=} x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |y| = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

6. $f(x) = x^2 e^{-2x}$

Řešení:

První per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x^2$, $v' = 2x$.

$$\int x^2 e^{-2x} \, dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \right] + \int x e^{-2x} \, dx =$$

Druhé per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} \right] + \frac{1}{2} \int e^{-2x} \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} \int e^{-2x}$$

7. $f(x) = x^2 \sin 2x$

Řešení:

První per partes: $u' = \sin 2x$, $u = -\frac{1}{2} \cos 2x$, $v = x^2$, $v' = 2x$.

$$\int x^2 \sin 2x \, dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x \right] + \int x \cos 2x \, dx =$$

Druhé per partes: $u' = \cos 2x$, $u = \frac{1}{2} \sin 2x$, $v = x$, $v' = 1$.

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right] - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$$

8. $f(x) = \arcsin x$

Řešení:

Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arcsin x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int 1 \cdot \arcsin x \, dx = [x \arcsin x] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

Substitute $y = 1 - x^2$.

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy \stackrel{C}{=} x \arcsin x + \sqrt{y} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

9. $f(x) = \arctan \sqrt{x}$

Řešení: Per partes: $u' = 1$, $u = x + 1$ (mnohem výhodnější než mechanické x),
 $v = \arctan \sqrt{x}$, $v' = \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\int \arctan \sqrt{x} dx = [(x+1)\arctan \sqrt{x}] - \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \stackrel{C}{=} (x+1)\arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}$$

10. $f(x) = x^n \ln x$, $n \neq -1$

Řešení:

Položme $u' = x^n$, $v = \ln x$. Potom $u = x^{n+1}/n+1$ a $v' = \frac{1}{x}$. Integrace per partes dává

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} dx \stackrel{C}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

11. $f(x) = x^3 e^{-x^2}$

Řešení:

Provedeme substituci $y = x^2$. Pak $dy = 2x dx$ a platí

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int y e^{-y} dy =$$

Nyní aplikujeme per partes: $u' = e^{-y}$, $u = -e^{-y}$, $v = y$, $v' = 1$.

$$= [-y e^{-y}] + \int e^{-y} dy \stackrel{C}{=} -y e^{-y} - e^{-y} = -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}$$

12. $f(x) = \sqrt{x} \ln^2 x$

Řešení: První per partes: $u' = \sqrt{x}$, $u = \frac{2}{3} x^{3/2}$, $v = \ln^2 x$, $v' = 2 \ln x \frac{1}{x}$.

$$\int \sqrt{x} \ln^2 x dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x \right] - \int \frac{2}{3} x^{1/2} \ln x dx =$$

Druhé per partes: $u' = \frac{2}{3} x^{1/2}$, $u = \frac{4}{9} x^{3/2}$, $v = \ln x$, $v' = 1/x$.

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x \right] - \left[\frac{4}{9} x^{3/2} \ln x \right] + \int \frac{4}{9} x^{1/2} dx \stackrel{C}{=} \frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x - \frac{4}{9} x^{3/2} \ln x + \frac{8}{27} x^{3/2}$$

13. $f(x) = x \arctan x$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\begin{aligned} \int x \arctan x dx &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x \end{aligned}$$

14. $f(x) = x^2 \arccos x$

Řešení: Per partes: $u' = x^2$, $u = \frac{x^3}{3}$, $v = \arccos x$, $v' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int x^2 \arccos x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \arccos x \right] + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

Substituce $y = 1 - x^2$, odkud plyne $dy = -2x \, dx$ a $x^2 = 1 - y$.

$$= \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{6} \int \frac{y-1}{\sqrt{y}} \, dy = \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{6} \int \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{9} y^{3/2} - \frac{1}{3} y^{1/2} = \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{9} (1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3} (1-x^2)^{1/2}$$

15. $f(x) = \frac{\arcsin x}{x^2}$

Řešení: Per partes: $u' = \frac{1}{x^2}$, $u = -\frac{1}{x}$, $v = \arcsin x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x} \arcsin x \right] + \int \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

Substituce $y = \sqrt{1-x^2}$. Potom $dy = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ a $x^2 = 1 - y^2$.

$$= -\frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{1}{1-y^2} \, dy \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} -\frac{1}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = -\frac{1}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

16. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

Řešení: Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\int 1 \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx = \left[x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \stackrel{C}{=} x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$$

Poslední integrál lze počítat např. substitucí $y = 1 + x^2$.

17. $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x}$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $v' = \frac{1}{1-x^2}$.

$$\int x \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1-x^2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} x \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

18. $f(x) = \sin(\ln x)$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položíme $v' = 1$, $u = \sin(\ln x)$. Potom $v = x$ a $u' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \sin(\ln x) = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \cos(\ln x)$ a dostaneme

$$\int 1 \cdot \sin(\ln x) = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2 \int 1 \cdot \sin(\ln x) \stackrel{C}{=} x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)$$

$$\int \sin(\ln x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} x (\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$$

19. $f(x) = \cos(\ln x)$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položíme $v' = 1$, $u = \cos(\ln x)$. Potom $v = x$ a $u' = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \sin(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \sin(\ln x)$ a dostaneme

$$\int 1 \cdot \sin(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2 \int 1 \cdot \cos(\ln x) \stackrel{C}{=} x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$$

$$\int \cos(\ln x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} x (\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

20. $e^x \sin x$

Řešení: <http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/zakladni-integracni-metody.html>
č. 330

21. $f(x) = e^{ax} \cos bx$

Řešení:

Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x} \cos(0x) dx = \int 1 dx \stackrel{C}{=} x$.

Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponenciálu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx \stackrel{C}{=} \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $b = 0$, pokud $a \neq 0$, a také pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.

22. $f(x) = e^{ax} \sin bx$

Řešení:

Pro $b = 0$ je $\int e^{ax} \sin(0x) \, dx = \int 0 \, dx \stackrel{C}{=} 1$.

Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponenciálu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \sin bx \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.