

## 11. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>  
kytaristka@gmail.com

### Teorie

$$\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$$

### Příklady

Najděte primitivní funkce na největším možném intervalu:

1. (a)  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$

**Řešení:** Zlomek již máme připraven ve tvaru vhodném k integraci. Použijeme substituci  $x = \operatorname{tg} t$ . Dostaneme, že

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx &= \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^3} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \cos^4 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{1}{4} \int \left( 1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{8} \int (3 + 4 \cos 2t + \cos 4t) dt \stackrel{C}{=} \frac{3}{8} t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{32} \sin 4t \\ &= \frac{3}{8} t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{16} \sin 2t (2 \cos^2 t - 1) \\ &= \frac{3}{8} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{16} \frac{x}{x^2 + 1} \left( \frac{2}{x^2 + 1} - 1 \right) \\ &= \frac{3}{8} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{8} \frac{x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3}{8} \arctan x + \frac{1}{8} \frac{3x^3 + 5x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

(b)  $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)^2}$

**Řešení:** Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{dx + E}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Přenasobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2 + 3x - 2 = A(x^2 + x + 1)^2 + (Bx + C)(x^2 + x + 1)(x - 1) + (dx + E)(x - 1)$$

Roznásobením pravé strany máme

$$x^2 + 3x - 2 = A - C - E + 2Ax - Bx - Dx + Ex + 3Ax^2 + Dx^2 + 2Ax^3 + Cx^3 + Ax^4 + Bx^4$$

odkud porovnáním koeficientů dostaneme, že

$$A = \frac{2}{9}, \quad B = -\frac{2}{9}, \quad C = -\frac{4}{9}, \quad D = \frac{1}{3}, \quad E = \frac{8}{3}$$

Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{2}{9} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{9} \frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{1}{3} \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}$$

Jednotlivé zlomky budeme integrovat zvlášť. Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{9} \frac{1}{x-1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{2}{9} \ln|x-1| \\ -\frac{2}{9} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx &= -\frac{1}{9} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{9} \ln(x^2+x+1) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

a nakonec

$$\frac{1}{3} \int \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx \stackrel{C}{=}$$

(Druhý integrál počítáme převedením jmenovatele na kanonický tvar  $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]$  a substitucí  $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} t$ .)

$$\stackrel{C}{=} \frac{5}{6} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Dohromady dostaneme po úpravě

$$\int \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \frac{5x+2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

(c)  $f(x) = \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}$

**Řešení:** Jmenovatel lze rozložit na součin kvadratických trojčlenů

$$(x^4 + x^2 + 1)^2 = (x^2 + x + 1)^2 (x^2 - x + 1)^2$$

Z toho vyplývá, že rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Kx+L}{x^2-x+1} + \frac{Mx+N}{(x^2-x+1)^2}$$

Například metodou neurčitých koeficientů dostaneme, že

$$A = B = C = D = L = N = \frac{1}{4}, \quad K = M = -\frac{1}{4}$$

Integrací jednotlivých zlomků dostaneme po úpravách

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4} \frac{x+1}{x^2+x+1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8} \ln(x^2+x+1) \\ \int \frac{1}{4} \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12} \frac{x-1}{x^2+x+1} \\ \int -\frac{1}{4} \frac{x-1}{x^2-x+1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8} \ln(x^2-x+1) \\ \int -\frac{1}{4} \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{12} \frac{x+1}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

Sečtením a úpravami dostaneme, že

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx \\ &\stackrel{C}{=} \frac{5}{12\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{12\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6} \frac{2x^2+1}{x^4+x^2+1} \end{aligned}$$

(d)  $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$

**Řešení:** Výsledný zlomek máme přímo ve tvaru rozkladu na parciální zlomky, budeme tedy přímo počítat integrál. Provedeme jej převedením jmenovatele na čtverec a goniometrickou substitucí.

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx = \int \frac{1}{[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2} dx = \frac{16}{9} \int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]^2} dx =$$

Nyní použijeme substituci  $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} t$  a dostaneme, že

$$\begin{aligned} &= \frac{16}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \cos^2 t dt \stackrel{C}{=} \frac{4\sqrt{3}}{9} (t + \sin t \cos t) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2 + (\sqrt{3})^2}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2x+1)^2 + (\sqrt{3})^2}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

(e)  $f(x) = \frac{1}{(x^3+1)^2}$

**Řešení:** Platí, že

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

Rozklad tedy musíme hledat ve tvaru

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}$$

Přenasobením jmenovatelem dostaneme

$$1 = A(x+1)(x^2-x+1)^2 + B(x^2-x+1)^2 + (Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1) + (Ex+F)(x^2-x+1)^2$$

Roznásobením pravé strany máme

$$1 = A+B+D+F - Ax - 2Bx + Cx + Dx + 2Fx + Ex + Ax^2 + 3Bx^2 + Cx^2 + Fx^2 + 2Ex^2 + Ax^3 - 2Bx^3 + Dx^3 + Ex^3 - Ax^4 + Bx^4 + Cx^4 + Dx^4 + Ax^5 + Cx^5$$

odkud sestavíme porovnáním koeficientů soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= A + B + D + F \\ 0 &= -A - 2B + C + D + E + 2F \\ 0 &= A + 3B + C + F + 2E \\ 0 &= A - 2B + D + E \\ 0 &= -A + B + C + D \\ 0 &= A + C \end{aligned}$$

jejíž řešení je

$$A = \frac{2}{9}, B = \frac{1}{9}, C = -\frac{2}{9}, D = \frac{1}{3}, E = -\frac{1}{3}, F = \frac{1}{3}$$

a hledaný rozklad tedy má tvar

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{2}{9} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{9} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{9} \frac{2x-3}{x^2-x+1} - \frac{1}{3} \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}$$

Budeme integrovat zvlášť jednotlivé zlomky. Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{9} \frac{1}{x+1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{2}{9} \ln|x+1| \\ \int \frac{1}{9} \frac{1}{(x+1)^2} dx &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{9} \frac{1}{x+1} \\ \int \frac{1}{9} \frac{2x-3}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{1}{9} \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \int \frac{2}{9} \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{9} \ln(x^2-x+1) - \frac{4}{9\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

a nakonec

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3} \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} dx &= \int \frac{1}{6} \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx - \int \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx = \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{x^2-x+1} - \int \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx \end{aligned}$$

Zbýlý integrál vypočteme takto:

$$\int \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2} dx = \int \frac{1}{6} \frac{16}{9} \frac{1}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]^2} dx =$$

yní aplikujeme substituci  $\operatorname{tg} t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ , přičemž máme, že  $\frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$ , a proto

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{6} \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{4}{9\sqrt{3}} \cos^4 t \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{4}{9\sqrt{3}} \cos^2 t dt \\ &\stackrel{C}{=} \frac{4}{9\sqrt{3}} \frac{t + \sin t \cos t}{2} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{9\sqrt{3}} \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2 + 3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2x-1)^2 + 3}} \\ &= \frac{2}{9\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{18} \frac{(2x-1)}{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

Dáme-li jednotlivé výsledky dohromady, dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^3 + 1)^2} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{9(x+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9} \frac{x+1}{x^2 - x + 1} = \\ &= \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \frac{x}{x^3 + 1} \end{aligned}$$

(f)  $f(x) - \frac{3}{16} \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$

**Řešení:** Integrujeme pomocí substituce  $x = \operatorname{tg} t$ .

$$\begin{aligned} \int -\frac{3}{16} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= -\frac{3}{16} \int \cos^2 t dt \stackrel{C}{=} -\frac{3}{32} (t + \sin t \cos t) \\ &= -\frac{3}{32} \arctan x - \frac{3}{32} \frac{x}{x^2 + 1} \int -\frac{1}{8} \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx = -\frac{1}{8} \int \cos^4 t dt = \end{aligned}$$

Použitím vztahů  $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$  a  $\cos^2 2t = \frac{1}{2}(1 + \cos 4t)$  dostaneme, že

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{64} (3 + 4 \cos 2t + \cos 4t) dt \stackrel{C}{=} -\frac{1}{64} \left( 3t + 2 \sin 2t + \frac{1}{4} \sin 4t \right) = \\ &= -\frac{3}{64} t - \frac{1}{16} \sin t \cos t - \frac{1}{64} \sin t \cos t (2 \cos^2 t - 1) \\ &= -\frac{3}{64} \arctan x - \frac{1}{16} \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{64} \frac{x}{x^2 + 1} \frac{1 - x^2}{x^2 + 1} = \\ &= -\frac{3}{64} \arctan x - \frac{1}{64} \frac{3x^3 + 5x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

(g)  $f(x) = \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}$ .

**Řešení:**

Provedme substituci  $t = x^5$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} dx &= \frac{1}{5} \int \frac{t}{(t^2 + 2t + 2)^2} dt = \frac{1}{10} \int \frac{2t}{(t+1)^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{10} \int \frac{2t+2-2}{((t+1)^2 + 1)^2} dt = \frac{1}{10} \int \frac{2t+2}{((t+1)^2 + 1)^2} dt - \frac{1}{5} \int \frac{1}{((t+1)^2 + 1)^2} dt = \end{aligned}$$

Na první integrál použijeme substituci  $u = (t+1)^2 + 1$ , na druhý  $t+1 = \operatorname{tg} y$  a s přihlédnutím ke vztahům

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \cos^2 y, \quad dt = \frac{1}{\cos^2 y} dy$$

dostaneme, že

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10} \int \frac{du}{u^2} - \frac{1}{5} \int \cos^2 y dy \stackrel{C}{=} -\frac{1}{10} \frac{1}{u} - \frac{1}{5} \frac{y + \sin y \cos y}{2} = \\ &= -\frac{1}{10} \frac{1}{(t+1)^2 + 1} - \frac{1}{10} y - \frac{1}{10} \operatorname{tg} y \cos^2 y = \\ &= -\frac{1}{10} \frac{1}{t^2 + 2t + 2} - \frac{1}{10} \arctan(t+1) - \frac{1}{10} \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \\ &= -\frac{1}{10} \frac{1}{x^{10} + 2x^5 + 2} - \frac{1}{10} \arctan(x^5 + 1) - \frac{1}{10} \frac{x^5 + 1}{x^{10} + 2x^5 + 2} = \\ &= -\frac{1}{10} \frac{x^5 + 2}{x^{10} + 2x^5 + 2} - \frac{1}{10} \arctan(x^5 + 1). \end{aligned}$$

2. (a)  $f(x) = \frac{x}{x^8 - 1}$

**Řešení:** Budeme substituovat  $t = x^2$ . Dostaneme

$$\int \frac{x}{x^8 - 1} dx = \int \frac{1}{2} \frac{1}{t^4 - 1} dt =$$

a nyní použijeme rozklad

$$= \int \left( \frac{1}{4} \frac{1}{t^2 - 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \stackrel{C}{=} \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + \frac{1}{4} \arctan t = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| + \frac{1}{4} \arctan x^2$$

(b)  $f(x) = \frac{x^3}{x^8 + 3}$

**Řešení:** Budeme substituovat  $t = x^4$ . Dostaneme, že

$$\int \frac{x^3}{x^8 + 3} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 3} \stackrel{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{x^4}{\sqrt{3}}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^2 + x}{x^6 + 1}$$

**Řešení:** Budeme integrovat zvlášť

$$\int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx = \int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx + \int \frac{x}{x^6 + 1} dx$$

Na první zlomek použijeme substituci  $t = x^3$  a dostaneme, že

$$\int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \int \frac{1}{3t^2 + 1} \frac{dt}{3} \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \arctan t = \frac{1}{3} \arctan x^3$$

Na druhý zlomek použijeme substituci  $t = x^2$  a dostaneme, že

$$\int \frac{x}{x^6 + 1} dx = \int \frac{1}{2t^3 + 1} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t+1)(t^2 - t + 1)} =$$

a nyní použijeme rozklad na parciální zlomky.

$$\frac{1}{t^3 + 1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2 - t + 1}$$

$$1 = A(t^2 - t + 1) + (Bt + C)(t + 1)$$

$$1 = At^2 - At + A + Bt^2 + Bt + Ct + C$$

odkud vyplývá, že  $A + C = 1$ ,  $B + C - A = 0$  a  $A + B = 0$ , a tedy  $A = -B = \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ , takže

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} \int \frac{1}{t+1} dt - \frac{1}{6} \int \frac{t-2}{t^2 - t + 1} dt = \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{1}{t+1} dt - \frac{1}{12} \int \frac{2t-1}{t^2 - t + 1} dt + \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2 - t + 1} dt \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{6} \ln |t+1| - \frac{1}{6} \ln(t^2 - t + 1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} = \\ &\frac{1}{6} \ln |x^2 + 1| - \frac{1}{6} \ln(x^4 - x^2 + 1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Dohromady dostaneme

$$\int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \arctan x^3 + \frac{1}{6} \ln |x^2 + 1| - \frac{1}{6} \ln(x^4 - x^2 + 1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{3}}$$

$$(d) f(x) = \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)}$$

**Řešení:**

Integrujme zvlášť

$$\int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx = \int \frac{x^4}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx - \int \frac{3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx$$

Na první zlomek aplikujeme substituci  $t = x^4$  a dostaneme (po zkrácení)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^8 + 3x^4 + 2} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2 + 3t + 2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt \stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \left| \ln \frac{t+1}{t+2} \right| = \frac{1}{4} \left| \ln \frac{x^4+1}{x^4+2} \right| \end{aligned}$$

Na druhý zlomek aplikujeme tutěž substituci. Je totiž

$$\int \frac{3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx = \int \frac{3x^3}{x^4(x^8 + 3x^4 + 2)} dx = \frac{3}{4} \int \frac{4x^3}{x^4(x^8 + 3x^4 + 2)} dx =$$

a po substituci rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$= \frac{3}{4} \int \frac{dt}{t(t^2 + 3t + 2)} = \frac{3}{4} \int \frac{dt}{t(t+1)(t+2)} \stackrel{C}{=} \frac{3}{4} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} \right) dt$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} \ln |t| - \ln |3(1+t)| + \frac{1}{2} \ln |3(2+t)| \right) \stackrel{C}{=} \frac{3}{2} \ln |x| - \frac{3}{4} \ln |(1+x^4)| + \frac{3}{8} \ln |(2+x^4)|$$

Dohromady dostaneme po úpravě

$$\int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx \stackrel{C}{=} -\frac{3}{2} \ln |x| + \ln(1+x^4) - \frac{5}{8} \ln(2+x^4)$$

(e)  $f(x) = \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2}$

**Řešení:** Použijeme substituci  $t = x^4$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{x^8 \cdot 4x^3}{x^8 + 3x^4 + 2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{t^2}{t^2 + 3t + 2} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(t^2 + 3t + 2) - (3t + 2)}{t^2 + 3t + 2} dt = \frac{1}{4} \int 1 dt - \frac{1}{4} \int \frac{3t + 2}{t^2 + 3t + 2} dt = \\ \frac{1}{4}t - \frac{3}{8} \int \frac{2t + 3}{t^2 + 3t + 2} dt + \frac{5}{8} \int \frac{1}{t^2 + 3t + 2} dt &\stackrel{C}{=} \frac{1}{4}t - \frac{3}{8} \ln |t^2 + 3t + 2| + \frac{5}{8} \ln \left| \frac{t+1}{t+2} \right| = \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{8} \ln |x^8 + 3x^4 + 2| + \frac{5}{8} \ln \left| \frac{x^4 + 1}{x^4 + 2} \right| \end{aligned}$$



(f)  $f(x) = \frac{1}{x(x^{10} + 2)}$ .

**Řešení:** Použijeme substituci  $t = x^5$ . Protože  $dt = 5x^4 dx$  a platí, že

$$\frac{1}{x(x^{10} + 2)} = \frac{5x^4}{5x^5((x^5)^2 + 2)},$$

máme, že

$$\int \frac{1}{x(x^{10} + 2)} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{t(t^2 + 2)} dt.$$

Nyní použijeme rozklad na parciální zlomky, který budeme hledat ve tvaru

$$\frac{1}{t(t^2 + 2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 2}.$$

Odtud vyplývá, že

$$1 = A(t^2 + 2) + (Bt + C)t$$

$$1 = 2A + Ct + (A + B)t^2$$

a tudíž

$$A = \frac{1}{2}, \quad C = 0, \quad B = -A = -\frac{1}{2}.$$

Nyní se výpočet snadno dokončí.

$$\frac{1}{5} \int \frac{1}{t(t^2 + 2)} dt = \frac{1}{10} \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \frac{2t}{t^2 + 2} \right) dt \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{10} \ln |t| - \frac{1}{10} \ln \sqrt{t^2 + 2} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2}} \right| = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x^5}{\sqrt{x^{10} + 2}} \right|.$$

3. (a)  $f(x) = \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ .

**Řešení:** Použijeme substituci  $t = x^n$ . Potom s přihlédnutím ke vztahu

$$dt = nx^{n-1} dx$$

dostaneme, že

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx = \int \frac{1}{n} \frac{nx^n \cdot x^{n-1}}{x^n + 1} dx = \frac{1}{n} \int \frac{t}{t + 1} dt = \frac{1}{n} \int \left( 1 - \frac{1}{t + 1} \right) dt$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{n} t - \frac{1}{n} \ln |t + 1| = \frac{x^n - \ln |x^n + 1|}{n}.$$

(b)  $f(x) = \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ .

**Řešení:** Použijeme substituci  $t = x^n$ . Potom  $dt = nx^{n-1} dx$  a

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx = \int \frac{1}{n} \frac{nx^{n-1}x^{2n}}{(x^{2n} + 1)^2} dx = \frac{1}{n} \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)^2} dt = \frac{1}{n} \int \frac{t^2 + 1 - 1}{(t^2 + 1)^2} dt =$$

a po roztržení zlomku na dva sčítance použijeme na druhý z integrálů substituci  $\operatorname{tg} y = t$ . Dostaneme

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt - \frac{1}{n} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt = \frac{1}{n} \arctan t - \frac{1}{n} \int \cos^2 y dy \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{n} \arctan(x^n) - \frac{1}{n} \frac{y + \sin y \cos y}{2} = \frac{1}{n} \arctan(x^n) - \frac{y}{2n} - \frac{1}{2n} \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}^2 y + 1} \\ &= \frac{1}{n} \arctan(x^n) - \frac{\arctan(x^n)}{2n} - \frac{1}{2n} \frac{x^n}{x^{2n} + 1} = \frac{\arctan(x^n)}{2n} - \frac{1}{2n} \frac{x^n}{x^{2n} + 1}. \end{aligned}$$