KPMG

Client

Date

Subject

Index | Initials | Date

~~$\sum \frac{x^n}{n}$~~ ~~$\sum nx^n$~~

ODKAZ NA POŽADAVKY NA ZKOUŠKU (ZS → LS!)

TÉMA: SČÍTÁNÍ MOCNINNÝCH ŘAD POMOCÍ DERIVOVÁNÍ A ~~INTEGROVÁNÍ ČL. PO ČL.~~

CO UMÍME SEČÍST?

- Geometrickou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}$

$$\sum_{k=M}^{\infty} x^k = \frac{\text{"PRVNÍ ČLEN"}}{1-\text{KVOCIENT}} = \frac{x^M}{1-x}$$

~~nezapomenout!~~

- známé řady (vytisknout přehled Taylorů z WIKIPEDIE)

CO POTOM DOKÁŽEME SEČÍST?

→ vše, co pomocí derivování a integrováním člen po členu převést na řadu, jejíž součet ~~známe~~

⇒ co se liší o rozložitelý polynom/rac. fci

HVĚZDIČKY

BONPARI

ČOK. BONBÓN

KRAVIČKY

~~$\sum \frac{nx^n}{n}$~~

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$\sum nx^n$ — KDYŽ TO ZINTEGRUJI $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

— ZDERIVUJI nx^{n-1}

TRIK: ROZŠÍŘIT x-em

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right) = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \underline{\ln|1-x| + C \; ?}$$

① $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

- Označme
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$
- Pak na $\underline{\underline{(-1,1)}}$! platí
$$\underline{f'(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n x^{n-1}}{n}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{POSUN INDEXU}}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\underline{\frac{1}{1-x}}$$

POLOMĚR KONVERGENCE:
$$R=\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$$
KONVERGENCE V KRAJ. BODECH:

$x=1$: $\sum\frac{1}{n}$ DIV.

$x=-1$: $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ KONV. dle LEIBNIZE ($\frac{1}{n}\searrow 0$)

Je tedy (viz vlnovky)
$$f'(x)=\frac{1}{1-x}\quad\text{pro } \underline{x\in(-1,1)}!\ \text{a}\ \int\frac{1}{1-x}\,dx\overset{C}{=}-\ln|1-x|$$
pro $x\in(-\infty,1)$ a $x\in(1,+\infty)$

$\Rightarrow$ pro $\underline{x\in(-1,1)}$!
$$f(x)=-\ln|1-x|\,(+C)\quad \boxed{x=0\Rightarrow\sum\frac{x^n}{n}=0 \text{ a } \ln|1-x|=0\Rightarrow C=0}$$

- Podle ABELOVY VĚTY navíc platí, že ~~pro~~ $f(x)=-\ln|1-x|$ i pro $x=-1$, tj.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ABEL}}}{=}\lim_{x\to-1+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\lim_{x\to-1+}-\ln(1-x)=\underline{\underline{-\ln 2}}.$$
neboť řada $\sum\frac{x^n}{n}$ $\underline{\text{KONVERGUJE}}$! pro $x=-1$.

$\to$ 1(a), 1(b) u tabule; PAK $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

$\to$ pak ukázat 2(a)! $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$

$\to$.

(2) $1+2x+3x^2+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

POL. KONV: $\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{n+1}{n+2} = \underline{\underline{1}}$

$\Rightarrow$ řada konv. na $\underline{(-1,1)}$!

KONV. V KRAJNÍCH BODECH:

$x=1$: $\sum(n+1)$ DIV. dle nutné podmínky: $\lim \cancel{a_n}^{(n+1)} \neq 0$

$x=-1$: $\sum(n+1)(-1)^n$ — " —————— : $\lim(-1)^n(n+1) \neq$

Označme $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

INTEGROVÁNÍM ČLEN PO ČLENU DOSTANEME, ŽE

$f(x)=F'(x)$, kde $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=$

$= \frac{x}{1-x}$ (pozor na první člen!)

Tedy $f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$ na $\underline{(-1,1)}$!

VI. 1(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!} = x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^4)^n}{n!} = x^5 \cdot e^{x^4}$

neboť

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{R}, \text{ tedy i pro } z = x^4.$$

VI. 1(b) $\sum n x^n$ viz př. 2a)

VI. 1(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} =: f(x)$

Pak

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1} =$$

PODÍL K: $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$

$\Rightarrow$ konv. na $(-1, 1)$

V KRAJ. BODECH:

$x = 1$: $\sum \frac{1}{n(n+1)} \leq \sum \frac{1}{n^2}$ K.

$x = -1$: KONV. ABSOLUTNĚ, NEB

$$\sum \left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| = \sum \frac{1}{n(n+1)} \cdots$$

~~VI. 1d~~

VI. 1e) viz 2b

VI. 1d) $x \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}}_{f(x)}$ PK: $R=1$.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{Př. (2a)}$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{(1-x)^2 + x \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\rightarrow \sum n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad \text{na } (-1,1) \ \overset{!}{D}_0$$

VI. 1f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = \frac{1}{x} \underbrace{\sum n(n+2)x^{n+1}}_{f(x)}$ PK: $R=1$

$$F(x) = \sum n x^{n+2} = x^2 \sum n x^n = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{3x^2(1-x)^{\cancel{2}} + x^3 \cdot 2\cancel{(1-x)}}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{3x^2 - x^3}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = \frac{3x - x^2}{(1-x)^3} \quad \text{na } (-1,1) \ \overset{!}{D}_0$$

VI. 1g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\qquad e^x = \sum \frac{x^n}{n!} \qquad e^{-x} = \sum (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

$$e^x + e^{-x} = 2 \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow 2\cosh x$$

VI. 1h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \cancel{\cosh(x)} \ \cancel{\frac{x^2}{2!}} \ \cancel{\frac{x^6}{6!}} \ \frac{1}{2}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \cos x\right)$

11.) $\frac{1}{2}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cos x\right)$

$\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cos x =$

$= 1 + 2\frac{x^4}{4!} + 2\frac{x^8}{8!}$

VI.

1i) $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+3)\, x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+3)\, y^n$

NAHRAĎ y^n

PK: $R = 1$.
V KRAJÍCH DIV.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dots = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+3)\, y^n = y \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+3)\, y^{n-1}}_{f(y)}$$

(PRVNÍ ČL. NULA

$$F(y) = \sum_{n=2}^{\infty} (n+3)\, y^n = \frac{1}{y^2} \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} (n+3)\, y^{n+2}}_{g(y)}$$

$$G(y) = \sum_{n=2}^{\infty} y^{n+3} = \frac{y^5}{1-y}$$

$$g(y) = G'(y) = \frac{5y^4(1-y) + y^5}{(1-y)^2} = \frac{5y^4 - 4y^5}{(1-y)^2}$$

$$F(y) = \frac{1}{y^2}\, g(y) = \frac{5y^2 - 4y^3}{(1-y)^2}$$

$$f(y) = F'(y) = \frac{(10y - 12y^2)(1-y) + 2(5y^2 - 4y^3)}{(1-y)^3} =$$

$$= \frac{10y - 12y^2 - \cancel{10y^2} + 12y^3 + \cancel{10y^2} - 8y^3}{(1-y)^3} = \frac{10y - 12y^2 + 4y^3}{(1-y)^3}$$

$$\sum \dots y^n = y \cdot \frac{10y - 12y^2 + 4y^3}{(1-y)^3}$$