

22. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a necht' $a < b$. Nechť $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) . Dále necht' $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

- (A) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.
(D) Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklady

Určete (v závislosti na parametru), zda daný integrál konverguje, respektive zda konverguje absolutně. Přitom uvažte $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$.

1. $\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha dx$

Řešení:

Proveďme substituci $t = x^\alpha$, přičemž nezapomeňme, že uvažujeme pouze

$$x = t^{1/\alpha}, \quad dx = t^{1/\alpha-1} dt$$

a platí, že

$$\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-1/\alpha}} dt$$

Na pravém okolí nuly $t \in (0, \pi/2)$ je integrand kladný a můžeme zde použít srovnání s funkcí

$$\frac{\sin t}{t^{1-1/\alpha}} \approx \frac{t}{t^{1-1/\alpha}} = \frac{1}{t^{-1/\alpha}},$$

tudíž integrál $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t^{1-1/\alpha}} dt$ konverguje, a to navíc absolutně, právě když $-1/\alpha < 1$, tedy pokud $\alpha > -1$. Jinak diverguje. Obojí plyne z limitního srovnávacího kritéria. Pro kladné α tedy v okolí nuly není s konvergencí problém.

Zbývá tak vyšetřit integrál

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-1/\alpha}} dt$$

O tomto integrálu víme, že konverguje absolutně, právě když $2 > 1-1/\alpha > 1$, tedy pokud $-1 < \alpha < 0$. Víme také, že konverguje neabsolutně, pokud $2 > 1-1/\alpha > 0$, tedy pokud $\alpha > 1$.

Odtud máme, že absolutní konvergence integrálu v zadání příkladu nenastává pro žádné $\alpha > 0$ a že integrál konverguje neabsolutně pro $\alpha > 1$.

$$2. \int_0^{+\infty} \arcsin \frac{x}{x^2+1} \ln x \cos x \, dx$$

Řešení:

Funkce má spojitě rozšíření do nuly, neboť

$$\arcsin x \approx x \implies \arcsin \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{x}{x^2+1} \approx x$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

Problematický bod je tedy pouze nekonečno. Protože $\frac{x}{x^2+1} \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$, platí také na okolí nekonečna, že

$$\arcsin \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{x}$$

Z odhadu platného pro $x > e$

$$\frac{|\cos x|}{x} \ln x \geq \frac{|\cos x|}{x}$$

vyplývá, že integrál nemůže konvergovat absolutně. Naopak, protože $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow +\infty$ a tato funkce je na nějakém okolí nekonečna monotónní, je integrál neabsolutně konvergentní podle Dirichletova kritéria, neboť funkce $\cos x$ má omezenou primitivní funkci.

Ještě snad k monotonii $\frac{\ln x}{x}$. Na intervalu $(0, +\infty)$ je tato funkce spojitá a má spojitou derivaci, která je pro $x > e$ záporná, jak dostáváme přímým výpočtem:

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha} \, dx$$

Řešení:

Na (dostatečně malém pravém prstencovém) okolí nuly integrand nemění znaménko a chová se přibližně jako

$$f(x) \approx \frac{2}{x^{\alpha-2}}$$

odkud dostáváme podmínku na konvergenci $\alpha - 2 < 1$, tedy $\alpha < 3$.

Na okolí nekonečna nejprve integrand přepíšeme do jiného tvaru pomocí identity

$$\sin x \sin 2x = \frac{\cos x - \cos 3x}{2}$$

Nyní dostaneme pomocí limitního srovnávacího kritéria aplikovaného na funkci $|\cos x|/x^\alpha$, popřípadě na $|\cos 3x|/x^\alpha$ podmínku na absolutní konvergenci $\alpha > 1$.

Protože funkce $\cos x$ i $\cos 3x$ mají omezené primitivní funkce, dostaneme pomocí Dirichletova kritéria podmínku na neabsolutní konvergenci $\alpha > 0$.

Závěr: Integrál konverguje pro $0 < \alpha < 3$, pro $1 < \alpha < 3$ navíc absolutně. Jinak diverguje.

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{e^{x^2} - 1} \sin \frac{1}{x^2} dx$$

Řešení:

Na $[1, +\infty)$ integrál konverguje absolutně srovnáním s $\frac{1}{e^x}$, neboť platí, že

$$\frac{f(x)}{1/e^x} = \frac{x^a}{e^x} \cdot \frac{1}{e^{x^2-2x} - 1} \cdot \sin \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

neboť všechny členy konvergují k nule pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.

Na pravém δ -okolí nuly je (pro dost malé δ)

$$\frac{e^{x^2} - 1}{1} \approx \frac{1}{x^2}.$$

Díky monotonii funkce $\frac{x^2}{e^{x^2}-1}$ na nějakém pravém okolí nuly můžeme (díky Abelovu kritériu nebo limitnímu srovnávacímu kritériu) vyšetřovat konvergenci (resp. absolutní konvergenci) jednoduššího integrálu

$$\int_0^\delta x^{a-2} \sin \frac{1}{x^2} dx$$

Substitucí $t = \frac{1}{x^2}$ dostaneme ekvivalentní integrál

$$\int_{1/\delta^2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{a+1}{2}}} dt$$

o kterém víme, že:

- konverguje podle Dirichletova kritéria, pokud $(a+1)/2 > 0$, tedy $a > -1$
- konverguje absolutně, pokud $(a+1)/2 > 1$, tedy pokud $a > 1$.

Závěr: Integrál konverguje, pokud $a > -1$, pro $a > 1$ navíc absolutně. Jinak diverguje.

$$5. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin e^x dx$$

Řešení:

Provedeme substituci $t = e^x$. Potom $x = \ln t$ a $dx = 1/t dt$, integrál tak přejde na tvar

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

o němž je známo, že konverguje neabsolutně.

$$6. \int_0^1 \arcsin^a(x(1-x)) \sin \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Řešení:

U jedničky platí, že

$$\arcsin x(1-x) \approx x(1-x) \approx (1-x), \quad \sin \frac{1}{x^\alpha} \approx \sin 1$$

(Ověřte! Jde vlastně o rozvíjení \arcsin na okolí nuly.) Protože integrand na vhodném levém okolí jedničky nemění znaménko, stačí podle limitního srovnávacího kritéria vyšetřovat (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_{1-\delta}^1 (1-x)^a dx$$

pro vhodné malé kladné δ , což je ekvivalentní vyšetřování konvergence integrálu

$$\int_0^\delta y^a dy$$

který dostaneme substitucí $y = 1 - x$. O něm víme, že konverguje pro $a > -1$.

U nuly platí, že

$$\arcsin x(1-x) \approx x(1-x) \approx x,$$

a protože $\frac{1}{y} \arcsin y$ je monotónní funkce na nějakém pravém okolí nuly, totéž platí o funkci $x(1-x)$ a také o funkci $(1-x)$, a totéž o a -tých mocninách těchto funkcí, stačí podle limitního srovnávacího kritéria a podle Abelova kritéria vyšetřovat absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\varepsilon x^a \sin \frac{1}{x^\alpha} dx$$

pro vhodné $\varepsilon > 0$. To jsme učinili již v příkladu ??, odkud víme, že pro $a > -1$ tento integrál konverguje absolutně. Vzhledem k podmínce z předchozí části jiné hodnoty a nemusíme vyšetřovat.

Závěr: pro $a > -1$ integrál konverguje, a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

$$7. \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{\ln^\alpha 2x} dx$$

Řešení:

Srovnáním s funkcí $|\cos(\pi x)|/x$ na okolí nekonečna dostaneme, že absolutně integrál nekonverguje pro žádné $\alpha > 0$.

Neabsolutně konverguje na $[1, +\infty)$ podle Dirichletova kritéria, neboť $\cos(\pi x)$ má omezenou primitivní funkci $|\frac{1}{\pi} \sin(\pi x)| \leq 1$ a $\frac{1}{\ln^\alpha 2x} \rightarrow 0$ monotónně pro každé $\alpha > 0$.

Na okolí $1/2$ použijme odhady

$$\cos(\pi x) = \sin(\pi x - \pi/2) \approx (\pi x - \pi/2) = \pi \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\ln(2x) = \ln(1 + (2x - 1)) \approx (2x - 1) = 2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

a tudíž

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2^\alpha} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}$$

odtud máme na absolutní i neabsolutní konvergenci (neboť integrand na $(1/2, 1]$ nemění znaménko) podmínku podle limitního srovnávacího kritéria, že $1-\alpha > -1$, tudíž $\alpha < 2$.

Závěr: integrál konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha < 2$.

8. $\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} x^\alpha dx$

Řešení:

U nuly použijte odhady

$$\ln(1+x) \approx x, \quad x-1 \approx 1$$

a podle Abelova či limitního srovnávacího kritéria stačí vyšetřovat konvergenci integrálu

$$\int_0^\delta \frac{x^{\alpha+1/3-1}}{\ln x} dx$$

Tento integrál konverguje pro $\alpha - 2/3 > -1$, tedy pro $\alpha > -1/3$ (dokáže se pomocí srovnávacího kritéria aplikovaného na funkci $x^{\alpha-2/3-\varepsilon}$, neboť integrand lze psát ve tvaru $x^{\alpha-2/3-\varepsilon} \cdot (x^\varepsilon / \ln x)$, přičemž $\varepsilon > 0$ volíme tak malé, aby exponent prvního zlomku byl stále větší než -1).

U jedničky použijeme odhady

$$x \approx 1, \quad \ln(1+x) \approx \ln 2, \quad \ln x \approx x-1$$

a podle Abelova či limitního srovnávacího kritéria stačí vyšetřovat integrál

$$\int_{1-\delta}^1 (x-1)^{2/3}$$

Tento integrál samozřejmě konverguje absolutně (pozornější si všimnou, že funkce má do jedničky dokonce spojitě rozšíření).

Závěr: Integrál konverguje pro $\alpha > -1/3$, a to dokonce absolutně.

$$9. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^\alpha}{\arctan^\beta x} \sin \frac{1}{x} dx$$

Řešení:

U nuly použijeme odhady

$$\sin x^\alpha \approx x^\alpha, \quad \arctan^\beta x \approx x^\beta$$

stačí tedy vyšetřovat integrál

$$\int_0^\delta x^{\alpha-\beta} \sin \frac{1}{x} dx$$

který lze použitím substituce $t = 1/x$ převést na integrál

$$\int_{1/\delta}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha-\beta+2}} dt$$

Ten konverguje absolutně pro $\alpha > \beta - 1$ a neabsolutně pro $\alpha > \beta - 2$.

U nekonečna použijeme odhady

$$\arctan x \approx \pi/2, \quad \sin(1/x) \approx 1/x$$

a poté substituci $t = x^\alpha$, čímž dostaneme pro konvergenci ekvivalentní integrál

$$\int_M^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$$

který konverguje pouze neabsolutně, ale zato pro každé $\alpha > 0$.

Závěr: konverguje neabsolutně pro $\alpha > \beta - 2$.