6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Levi)**.** Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in S$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ a $f = \lim_{j\to\infty} f_j$. Pak

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \mathrm{d}\mu$$

Věta 2 (Lebesgue)**.** Nechť f a $\{f_j\}$ jsou měřitelné funkce na $D \in S$, Nechť posloupnost $\{f_j\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje integrovatelná funkce g (majoranta) tak, že

$$|f_j(x)| \leq |g(x)| \qquad j \in \mathbb{N}, \quad x \in D.$$

Potom

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \mathrm{d}\mu.$$

Věta 3 (Záměna řady a integrálu)**.** Nechť $D \in \mathcal{S}$ a g_j, $j = 1, 2, \ldots$ jsou měřitelné funkce na D. Předpokládejme, že je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:

(a) $g_j = aq^j$, kde a, q jsou měřitelné funkce, $|q| < 1$, a $\int_D \frac{a}{1-q}\, d\mu$ konverguje (geometrická řada),

(b) $\sum_j \int_D |g_j|\, d\mu < \infty$,

(c) $\int_D \sum_j |g_j|\, d\mu < \infty$,

(d) $g_j = (-1)^j h_j$, $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \cdots \geq 0$, $h_j \to 0$, h_1 je integrovatelná (alternující řada).

Potom řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude a platí vzorec

$$\int_D \sum_j g_j\, d\mu = \sum_j \int_D g_j\, d\mu,$$

Věta 4 (Leviho pro řady)**.** Nechť $D \in S$ a g_j, $j = 1, 2, \ldots$, jsou nezáporné měřitelné funkce na D. Potom

$$\int_D \sum_j g_j = \sum_j \int_D g_j$$

Věta 5 (Lebesgueova věta pro řady)**.** Nechť $D \in S$ a g_j, $j = 1, 2, \ldots$, jsou měřitelné funkce na D. Nechť řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude. Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná majoranta) tak, že

$$\Big|\sum_{j=1}^{k} g_j(x)\Big| \leq g(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad x \in D.$$

Potom

$$\int_D \sum_j g_j \, d\mu = \sum_j \int_D g_j \, d\mu.$$

Příklady

1. $$\int_0^1 \ln x \ln(1-x) \, \mathrm{d}x$$

2. $$\int_0^1 \ln x \ln(1+x) \, \mathrm{d}x$$

3. $$\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x}$$

4. $$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\arctan nx}{1+x^3} \, \mathrm{d}x$$

5. $$\int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \, \mathrm{d}x = 2 \ln 2$$

6. $$\int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$$

7. $$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\ln x + \ln n}$$

8. $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+e^x} \, \mathrm{d}x$$

9. $$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, \mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2},$$

   $|b| < a$

10. $$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}}$$

11. $$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{x}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$