$$\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\, dx$$

(1) $\ln x \ln(1-x) = \ln x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1}$

(2) $- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln x)\, x^{n+1}}{n+1}$ $\quad \} \geq 0 \quad$ Levi

$\leq 0 \qquad \geq 0$

(3)

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^1 (\ln x)\, x^{n+1}\, dx =$$

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \; \underbrace{x^{n+1}}_{v'} = \ln x \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2} - \int \frac{x^{n+1}}{n+2}$$

$$u' = \frac{1}{x} \qquad v = \frac{x^{n+2}}{n+2} \qquad \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2}$$

$$= - \sum \frac{1}{n+1} \left[\frac{(\ln x)\, x^{n+2}}{n+2} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} \right]_0^1 =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{-1}{(n+2)^2} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)^2}}}$$

$$\int_0^1 \ln x \ \ln(1+x)\, dx$$

(1) $f(x) = \ln x \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(2) $g_n = (-1)^n \cdot \Big[\underbrace{\ln x \ \frac{x^{n+1}}{n+1}}_{h_n}\Big]$

(d) $h_n \overset{?}{\geq} h_{n+1}$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \geq \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

$$\frac{n+2}{n+1} \geq x \quad \in (0,1) \ \checkmark$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-1)^n \int_0^1 \ln x \ \ x^{n+1} dx = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{-1}{(n+2)^2}}$

(7)

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x}$$

(1) $\ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(2) Levi

(3) $\int f = \sum \int_0^1 \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+x^3}\,dx$$

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+x^3} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^3} \quad x\in(0,\infty)$

(2) Levi

$0 \leq f_1 \leq f_2 \ \dots$

$\frac{\operatorname{arctg} nx}{1+x^3} \overset{?}{\leq} \frac{\operatorname{arctg} (n+1)x}{1+x^3}$ OZ, arctg rostoucí

(3) $\int_0^\infty \lim \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+x^3} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{1/3}{1+x} + \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x}{1-x+x^2}$

$(1+x^3) = (1+x)(1+x^2-x)$

$A - Ax + Ax^2 + B + Bx + Cx^2 + Cx = 1$

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ -A+B+C &= 0 \\ A\ \ \ +C &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} C &= -\tfrac{1}{3} \\ B &= \tfrac{2}{3} \\ A &= +\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{3}\ln(1+x) + \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{x^2-x+1} + \ln(1+x)^2 + \frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\underline{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}}}\right)$$

(8)

$$\int_0^\infty \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx$$

(1)

$$\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{1-x^2} \qquad \ln 1 = 0$$

$$\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

z mocninné Σ:

$$\frac{2}{1-x^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \qquad \| \text{ obě strany } \int$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(2) Levi

(3) $$\int f = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \underline{2 \ln 2}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots$$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx$

(1) $\displaystyle f(x) = 2\cdot\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2 \sum \frac{x^{2n}}{2n+1}$

(2) Levi

(3) $\displaystyle \int f = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1} = 2 \sum \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \right]_0^1 =$

$\displaystyle = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A^{\infty} \frac{dx}{\ln x + \ln n}$$

dorazić u ∞ :

$$\lim \frac{\frac{1}{\ln x + \ln n}}{\frac{1}{\ln x}} = \lim \frac{\ln x}{\ln x + \ln n} = 1$$

ale $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ u ∞ divergujó

$$\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x}$$

teda

$$\lim \infty = \underline{\underline{\infty}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+e^x}$$

(1) $$\frac{\sin x}{e^x} \cdot \frac{1}{e^{-x}+1} = e^{-x} \sin x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (e^{-x})^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (e^{-x})^{n+1} \sin x$$

(2) (d) $$(-1)^n \cdot \underbrace{\sin x \, (e^{-x})^{n+1}}_{b_n}$$

$$b_n \overset{?}{\geq} b_{n+1}$$

$$\sin x \, (e^{-x})^{n+1} \geq \sin x \, (e^{-x})^{n+2}$$

$1 \geq$ [illegible]

(11) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \qquad |b| < a$

(1) $\sin y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$f(x) = e^{-ax} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{g(x)}$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ax} \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum | \quad |$

$\sum$ $\boxed{\text{píme}}$ $I_n = \int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = \frac{n}{a} I_{n-1} \qquad I_0 = \frac{1}{a}$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ?$$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^\infty e^{-ax} (|b|x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{a} \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{a} \cdots \frac{(2n+1)}{a} |b|^{2n+1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|b|}{a}\right)^{2n+1} \cdot \frac{1}{a} < \infty$$

Geom. $\sum \qquad |b| < a$

(3) Výpočet

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \cdot \frac{b}{a^2} =$$

$$= \frac{b}{a^2} \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

‖ 1/ Ukažte, že $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \longrightarrow 0$ pro $n \longrightarrow +\infty$ na intervalu $(0,1)$,

ale nekonvergují tam stejnoměrně.

Poslední tvrzení dokažte

a/ tím, že ukážete $\sigma_n = \frac{1}{2}$,

b/ podrobně z následujících vztahů:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 1-} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 1-} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) \quad !$$

2/ Použijte Lebesgueovu větu:

"rychlý", ale "hrubý" odhad dává $0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq 1$ v $(0,1)$

anebo "lepší" odhad $0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \frac{x}{1+x^2}$ pro $x \in (0,1)$, $n \in N$.

3/ Použijte Leviho větu . ‖

4,6.	Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx = 0$!

‖ 1/ Využijte odhadu

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx + \int_1^\infty x^{-n}\, dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \quad \text{pro } n \geq 2 .$$

2/ Limitní funkce f : $f(1) = \frac{1}{2}$; $f = 0$ jinde v $(0, +\infty)$.

3/ Ukažte, že posloupnost $\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ nekonverguje k f stejnoměrně v intervalu $(0, +\infty)$

(využijte výsledku z př. 4,5 anebo nespojitosti funkce f !)

Kdyby nicméně bylo $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \rightrightarrows f$ v $(0, +\infty)$, nemohli bychom stejně použít větu 20 (proč?).

4/ Použijte Lebesgueovu větu, vyjde

$$g(x) = \sup_{n\in N} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x}{1+x^2} \text{, tedy } g \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

(je okamžitě vidět, že $\int_0^{+\infty} f_1 = +\infty$), omezme se proto na $n \geq 2$,

potom $\sup_{n\geq 2} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x^2}{1+x^4} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Vše si podrobně rozmyslete a proveďte !

5/ Použijte Leviho větu! ‖

4,7.	Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} = 1$!

1/ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$.

2/ Ukažte, že platí:

$$n \in N\ ;\quad x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\ ,$$

$$n \geq 2\ ,\quad x \in (1,+\infty) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq (1+\frac{x}{n})^{-n} =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot (\frac{x}{n})^j\right]^{-1} \leq \left[\frac{1}{2}\, n\,(n-1)\,\frac{x^2}{n^2}\right]^{-1} \leq \frac{4}{x^2}\ .$$

Položíme-li tedy $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \in (0,1)$, $g(x) = \frac{4}{x^2}$ pro $x \in (1,+\infty)$, jest $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte !) a můžeme použít Lebesgueovu větu .

4,8. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\log(x+n)}{n}\, e^{-x} \cos x\, dx = 0$!

1/ Limitní funkce je rovna nule na $(0, +\infty)$.

2/ Použijte Lebesgueovu větu a využijte vztahů:

a/ $n \in N\ ,\ x \in (0,+\infty) \Rightarrow \frac{\log(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq 1 + x$

b/ $e^{-x}(1+x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

4,9. Buď $0 < A < +\infty$, potom $\lim_{n\to\infty} \int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\, dx = 0$.

Použijte Lebesgueovu i Leviho větu, využijte vztahu

$$x \in (0,A)\ ,\ n \in N \Rightarrow \frac{e^{x^3}}{1+nx} \leq e^{x^3} \in \mathcal{L}_{(0,A)}\ .$$

Ne vždy je pravda, že

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{na}\quad M \Rightarrow \int_M f_n \longrightarrow \int_M f$$

Uveďme příklady

4,10. Definujme pro každé $n \in N$ funkci f_n na $\langle 0,1\rangle$ takto:

$f_n(x) = n \sin(\pi n x)$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{n})$,

$f_n(x) = 0$ pro $x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle$.

Potom a/ $f_n \to 0$ v $\langle 0,1\rangle$,

b/ $\int_0^1 f_n = \frac{2}{\pi}$, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Může být $f_n \rightrightarrows 0$ v $\langle 0,1\rangle$?

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}}_{\to e^{x}} \cdot \sin\frac{x}{n}$$

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \cdot \sin\frac{x}{n} \overset{\text{VAL}}{=} e^{-x} \cdot 0 = 0$

(2) $|f(x)| \leq \left|\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right| \to e^{-x}$

Pro $x \in (1, \infty)$ - binomický rozvoj jeho prve

Pro $x \in (0, 1)$

$$\frac{\sin\frac{x}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \leq 2 \in L^1(0,1)$$