

7. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Limita integrálu závislého na parametru). *Nechť P je metrický prostor a $A \subset P$. Bud' $a \in \overline{A} \setminus A$. Nechť funkce $f : A \times D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ má následující vlastnosti:*

(Li-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ existuje $\lim_{t \rightarrow a, t \in A} f(t, x)$.*

(Li-2) *pro všechna $t \in A$ je funkce $f(t, \cdot)$ měřitelná,*

(Li-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in A$ a $x \in D$ je $|f(t, x)| \leq g(x)$.*

Potom

$$\int_D \lim_{t \rightarrow a, t \in A} f(t, x) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow a, t \in A} \int_D f(t, x) d\mu(x).$$

speciálně výrazy vyskytující se výše mají smysl.

Věta 2 (Spojitost integrálu závislého na parametru). *Nechť P je metrický prostor. Bud' $a \in P$ a U okolí bodu a v P . Nechť funkce $f : U \times D \rightarrow \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(Sp-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ spojitá v a ,*

(Sp-2) *pro všechna $t \in U$ je funkce $f(t, \cdot)$ měřitelná,*

(Sp-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in U$ a $x \in D$ je $|f(t, x)| \leq g(x)$.*

Potom pro všechna $t \in U$ je $f(t, \cdot)$ integrovatelná a funkce

$$F : t \mapsto \int_D f(t, x) d\mu(x)$$

je spojitá v bodě a .

Lemma 3 (Fatouovo). *Nechť $D \in S$ a $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D . Potom*

$$\int_D \liminf_j f_j \leq \liminf_j \int_D f_j.$$

Věta 4. *Funkce f je spojitá v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0, q_0] \subset (p, q)$.*

Funkce f je spojitá v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $(p_0, q_0] \subset (p, q)$.

Funkce f je spojitá v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0, q_0) \subset (p, q)$.

Příklady

1. Ukažte, že funkce F

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx,$$

je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.

Spočtěte

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} F(\alpha).$$

2. Ukažte, že funkce F

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx,$$

je spojitá v intervalu $[0, \infty)$.

3. Určete

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} F(a), \quad \lim_{a \rightarrow \infty} F(a)$$

kde

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + \alpha \sin x)}{x} dx,$$

$\alpha \in (0, \infty)$.

4. Ukažte, že funkce F

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx,$$

je spojitá v intervalu $(0, 1)$.

5. Ukažte, že funkce F

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{x^2} dx,$$

je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.

6. Ukažte, že funkce F

$$F(\alpha) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x - \alpha) dx,$$

je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.

7. Ukažte, že funkce F

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

(tzv. Gamma funkce) je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.

Spočtěte

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F(\alpha).$$

8. Ukažte, že funkce F

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x}{2+x^{\alpha}} dx,$$

je spojitá v intervalu $(2, \infty)$.

9. Ukažte, že funkce F

$$F(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}} dx,$$

je spojitá v intervalu $(1, \infty)$.