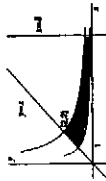


Příklad 323. $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $x = 8$

Rěšení:

$$\begin{aligned}
 P &= \iint_D dx dy = \int_1^2 \left(\int_1^x dy \right) dx + \int_2^8 \left(\int_{\frac{4}{x}}^x dy \right) dx = \\
 &= \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx + \int_2^8 \left(x - \frac{4}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln|x| \right]_1^2 + \\
 &+ 3 \left[\ln|x| \right]_2^8 = 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 3(\ln 8 - \ln 2) = \frac{3}{2} + \ln \frac{8^3}{2 \cdot 2^3} = \\
 &= \frac{3}{2} + \ln 32. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$



Příklad 324. Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného osou x a jedním obloukem cykloidy o parametrických rovnicích $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Rěšení:

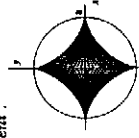


Jeden oblouk cykloidy opisá bod kružnice, která se kotlí po přímce $y = 0$, tj. $t \in (0, 2\pi)$.

$$\begin{aligned}
 P &= \iint_D dx dy = \int_0^{2\pi} y \dot{x} dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt = \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \left[t - 2 \sin t \right]_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\
 &= a^2 \cdot 2\pi + \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi a^2 + a^2 \pi = 3\pi a^2. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Příklad 325. Určete plošný obsah rovinného obrazce D omezeného asteroidou $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Rěšení:



$$P = \iint_D dx dy$$

Použijeme transformace do souřadnic:

$$\begin{cases} x = r \cos^3 \varphi \\ y = r \sin^3 \varphi \end{cases}$$

$$(r \cos^3 \varphi)^{2/3} + (r \sin^3 \varphi)^{2/3} = a^{2/3} \rightarrow r^{2/3} = a^{2/3} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}, \quad J = \begin{vmatrix} \cos^3 \varphi & -3r \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ \sin^3 \varphi & 3r \sin^2 \varphi \cos \varphi \end{vmatrix} = 3r \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + 3r \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi =$$

$$= 3r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

$$P = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a 3r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi dr \right) d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \cdot 3 \int_0^a r dr =$$

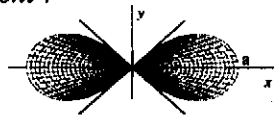
$$= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} d\varphi \cdot 3 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi \cdot \frac{3}{2} a^2 = \frac{3}{4} a^2 \left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{3}{4} a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} \pi a^2. \quad \blacksquare$$

• Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného uzavřenou křivkou:

Příklad 326. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (Bernoulliiova lemniskáta)

Řešení :



$$P = \iint_D dx dy = \begin{bmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{bmatrix}$$

Po dosazení do zadání dostáváme postupně : $r^4 = a^2 r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$, $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$,

$$0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\varphi} \rightarrow \cos 2\varphi \geq 0, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right).$$

$$\begin{aligned} P &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr \right) d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \\ &= 2a^2 \left[\frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2. \end{aligned}$$

Příklad 327. $(x^2 + 9y^2)^2 = x^2 y$

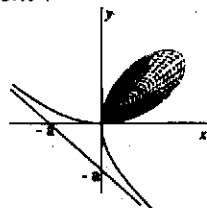
$$\text{Řešení : } P = \iint_D dx dy = \begin{bmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = \frac{r}{3} \sin \varphi \\ J = \frac{1}{3} r \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} r^4 &= r^2 \cos^2 \varphi \cdot \frac{r}{3} \sin \varphi \\ 0 \leq r &\leq \frac{1}{3} \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ \cos^2 \varphi \sin \varphi &\geq 0 \rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\frac{1}{3} \cos^2 \varphi \sin \varphi} \frac{1}{3} r dr \right) d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{3} \cos^2 \varphi \sin \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^\pi \frac{1}{9} \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{54} \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{27} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 \varphi - \cos^6 \varphi) d\varphi = (\text{Wallisova formule}) = \frac{1}{27} \left(\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{864}. \end{aligned}$$

2.

Příklad 328. $(x^3 + y^3) = 3axy$ (Descartesův list)

Řešení :



$$P = \iint_D dx dy = \begin{bmatrix} x = r \cos \varphi & 0 \leq r \leq r(\varphi) \\ y = r \sin \varphi & \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ J = r \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_0^{r(\varphi)} r dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Nyní určíme $r(\varphi)$ a dosadíme do posledního integrálu.

$$x^3 + y^3 = 3axy \rightarrow r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi = 3ar^2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad \text{takže}$$

$$r(\varphi) = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad r(0) = r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} \right)^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi =$$

$$\left[\begin{array}{l} (\text{čitatel a jmenovatel vydělíme } \cos^6 \varphi) \\ = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg}^2 \varphi}{(\text{tg}^3 \varphi + 1)^2} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \left[\frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = du \right] = \frac{9a^2}{2 \cdot 3} \int_0^\infty \frac{3u^2}{(u^3 + 1)^2} du = \end{array} \right.$$

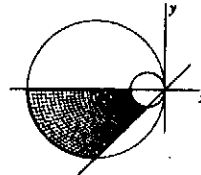
$$= \frac{3}{2} a^2 \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_0^C \frac{3u^2}{(u^3+1)^2} du = \frac{3a^2}{2} \lim_{C \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{u^3+1} \right]_0^C = \frac{3a^2}{2} \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{C^3+1} + 1 \right) = \frac{3a^2}{2}.$$

Příklad 329. Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného křivkami $x^2 + y^2 + x = 0$, $x^2 + y^2 + 4x = 0$, $y = x$, $y = 0$.

Řešení:

$$x^2 + y^2 + x = 0 \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 4$$



$$P = \iint_D dx dy = \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \middle| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + x = 0 \rightarrow r = -\cos \varphi \\ x^2 + y^2 + 4x = 0 \rightarrow r = -4 \cos \varphi \\ -\cos \varphi \leq r \leq -4 \cos \varphi \\ \pi \leq \varphi \leq \frac{5}{4}\pi \end{array} \right] =$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \left(\int_{-\cos \varphi}^{-4 \cos \varphi} r dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} [r^2]_{-\cos \varphi}^{-4 \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (16 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi =$$

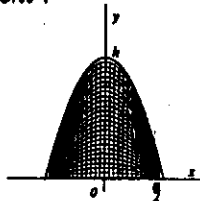
$$= \frac{15}{2} \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{15}{2} \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{15}{4} \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} =$$

$$= \frac{15}{4} \left(\frac{5}{4}\pi + \frac{\sin \frac{5}{2}\pi}{2} - \pi - \frac{\sin 2\pi}{2} \right) = \frac{15}{4} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{15(\pi+2)}{16}.$$

Příklad 330. Je dána parabolická úseč s tětivou kolmou k ose. Délka tětivy je a , výška úseče h , a hustota $\rho = 1$. Určete:

- a) moment setrvačnosti úseče vzhledem k tětivě, b) těžiště úseče.

Řešení:



Analytické vyjádření této paraboly bude $y - h = px^2$.

Použijeme-li bod $\left[\frac{a}{2}, 0\right]$, pak $-h = p \frac{a^2}{4} \rightarrow p = \frac{-4h}{a^2} \rightarrow$

$$y = h - \frac{4h}{a^2} x^2.$$

- a) Moment setrvačnosti k tětivě je nyní momentem setrvačnosti vzhledem k ose x .

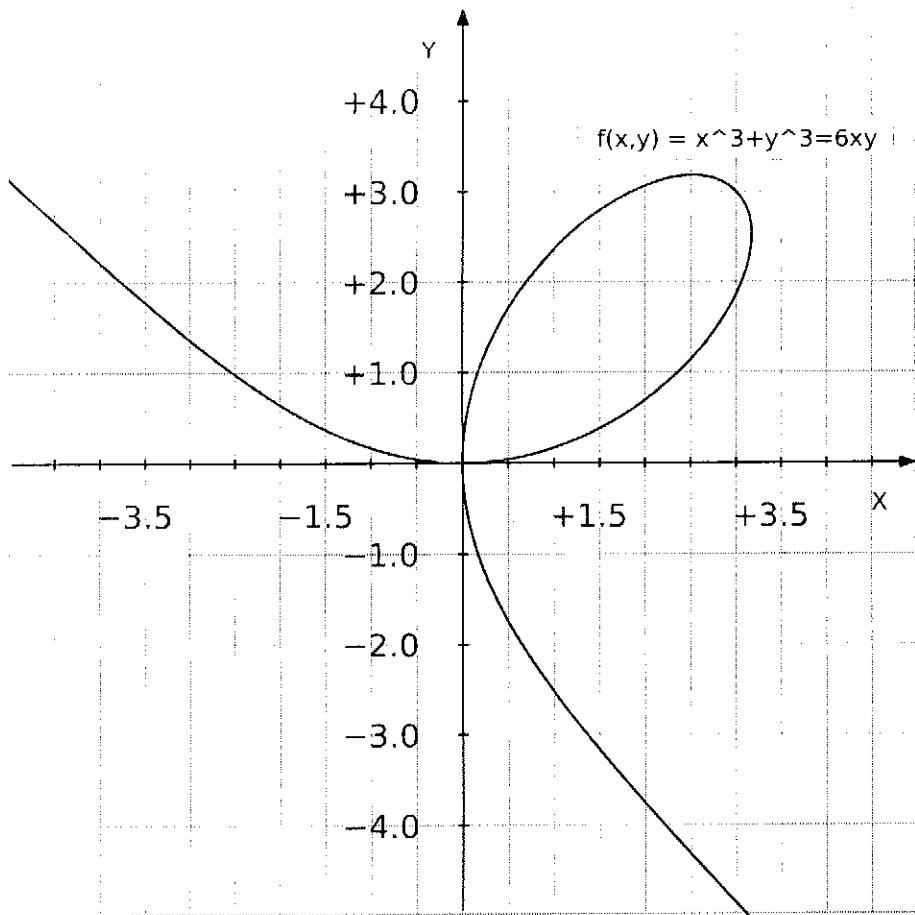
$$I_x = \iint_D y^2 dx dy = \left[D: \begin{array}{l} 0 \leq y \leq h - \frac{4h}{a^2} x^2 \\ -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \end{array} \right] = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\int_0^{h - \frac{4h}{a^2} x^2} y^2 dy \right) dx =$$

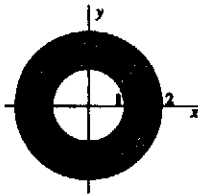
$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [y^3]_0^{h - \frac{4h}{a^2} x^2} dx = \frac{1}{3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(h - \frac{4h}{a^2} x^2 \right)^3 dx = \frac{h^3}{3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{4x^2}{a^2} \right)^3 dx =$$

$$= \frac{2h^3}{3} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{12x^2}{a^2} + \frac{48x^4}{a^4} - \frac{64x^6}{a^6} \right) dx = \frac{2h^3}{3} \left[x - \frac{4x^3}{a^2} + \frac{48x^5}{5a^4} - \frac{64x^7}{7a^6} \right]_0^{\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{2h^3}{3} \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{3a}{10} - \frac{a}{14} \right) = \frac{h^3 a}{3} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{16 h^3 a}{105}.$$

b) $T = [0, y_T]$, $y_T = \frac{M_x}{m}$

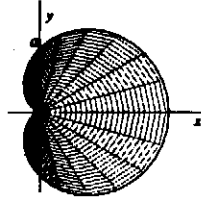




$$I_{[0,0]} = k \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = [\text{polární souřadnice}] = \\ = k \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^3 dr d\varphi = \frac{15}{2} k\pi. \quad \blacksquare$$

Příklad 334. Určete polohu těžiště obrazce omezeného kardioidou $r = a(1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $a > 0$, $\rho = 1$.

Řešení :



$$T = [x_T, 0], m = P_D = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \\ (\text{viz př. 328})$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ = \frac{1}{2} a^2 [\varphi + 2 \sin \varphi]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = a^2 \pi + a^2 \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} a^2 \pi,$$

$$M_y = \iint_D x dx dy = [\text{polární souř.}] = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^2 \cos \varphi dr \right) d\varphi = \\ = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot a^3 (1 + \cos \varphi)^3 d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi + 3 \cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi = \\ = \frac{5}{4} a^3 \pi; \quad x_T = \frac{5a}{6}. \quad \blacksquare$$

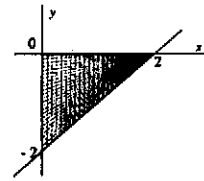
• Vypočítejte objem tělesa W omezeného plochami :

(3)

Příklad 335. $z = x^2 + y^2 + 4$, $x - y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

Řešení :

W je část trojbokého hranolu se základnou v rovině $z = 0$. Hranol je shora omezený rotačním paraboloidem.



$$V = \iiint_W dx dy dz = \left[W: \begin{array}{l} 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 4 \\ x - 2 \leq y \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{array} \right] = \\ = \int_0^2 \left(\int_{x-2}^0 \left(\int_0^{x^2+y^2+4} dz \right) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_{x-2}^0 (x^2 + y^2 + 4) dy \right) dx = \\ = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + 4y \right]_{x-2}^0 dx = - \int_0^2 \left(x^2(x-2) + \frac{(x-2)^3}{3} + 4(x-2) \right) dx = \\ = - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{(x-2)^4}{12} + 2x^2 - 8x \right]_0^2 = \frac{32}{3}. \quad \blacksquare$$

Podle vět 2.10 a 1.22 pak pro integrál I platí

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot 6\rho^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta) \, d\vartheta \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 3\rho^3 \sin 2\vartheta) \, d\vartheta \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left[6\rho^2 \sin \vartheta - \frac{3}{2}\rho^3 \cos 2\vartheta \right]_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\rho = 2\pi \int_0^1 12\rho^2 \, d\rho = 24\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = \\
 &= 24\pi \cdot \frac{1}{3} = 8\pi. \quad \blacktriangle
 \end{aligned}$$

2.4 Některé aplikace trojného integrálu

2.4.1 Objem tělesa

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je měřitelná množina. Pak objem tělesa M definujeme pomocí vztahu

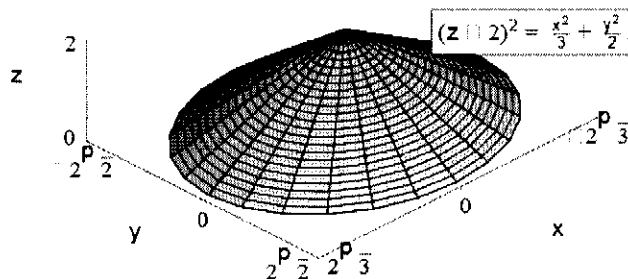
$$\lambda(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Poznámka 2.27. Uvažujme množinu T stejnou jako v kapitole 1.6.2. Pak zřejmě platí $V(T) = \lambda(T)$.

Příklad 2.28. Vypočítejte objem tělesa $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ohraničeného plochami

$$(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}, \quad z = 0.$$

Řešení. Naše těleso M je částí eliptického kužele.



5.

Jeho průnikem s rovinou $z = z_0$, kde $0 \leq z_0 \leq 2$, je množina

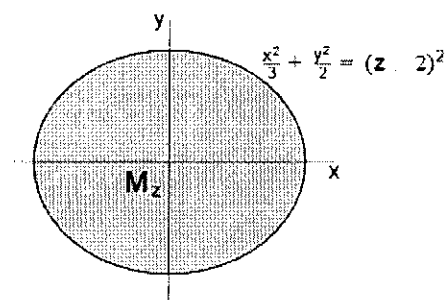
$$\left\{ (x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq (z_0 - 2)^2 \right\} \quad (\text{t.j. elipsa}).$$

Není obtížné si uvědomit, že pro objem tělesa M platí (viz věta 2.10)

$$\lambda(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \left(\iint_{M_z} 1 \, dx \, dy \right) dz,$$

kde

$$M_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq (z - 2)^2 \right\}.$$



Pro výpočet vnitřního integrálu $\iint_{M_z} 1 \, dx \, dy$ použijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic

$$x = \sqrt{3} \cdot r \cos t,$$

$$y = \sqrt{2} \cdot r \sin t.$$

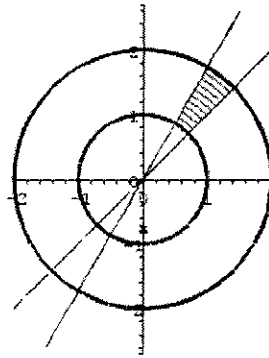
Jacobián tohoto zobrazení je zřejmě $J = \sqrt{6} \cdot r$. Přitom množinu M_z (pro $z \in \langle 0, 2 \rangle$) lze v těchto zobecněných polárních souřadnicích popsat nerovnostmi

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2 - z.$$

Odtud a z vět 1.30 a 1.22 plyne, že

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \left(\iint_{M_z} 1 \, dx \, dy \right) dz = \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2-z} \sqrt{6} \cdot r \, dr \right) dt \right) dz = 2\pi \int_0^2 \left[\sqrt{6} \cdot \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{2-z} dz = \\ &= 2\pi \int_0^2 \sqrt{6} \cdot \frac{(2-z)^2}{2} dz = \pi\sqrt{6} \cdot \left[-\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8\pi\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

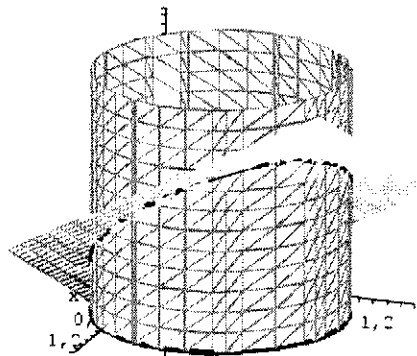
▲



Obr. 7

6.

Řešení: Těleso, jehož objem máme nalézt, je část rotačního válce určeného řídicí kružnicí $x^2 + y^2 = x + y$, zdola ohraničeného rovinou $z = 0$ a shora rovinou $z = x + y$. (Obr.8)



Obr. 8

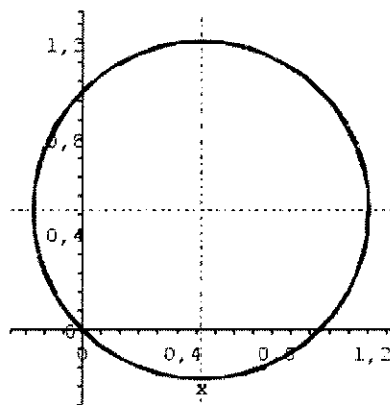
Jak víme již z příkladu 1.11, je objem takového tělesa číselně roven hodnotě dvojného integrálu $\int_M (x + y) dA$, kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x + y \right\}.$$

Doplněním na čtverec a úpravou můžeme podmínku $x^2 + y^2 \leq x + y$ upravit na tvar

$$(5) \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Z (5) je zřejmé, že množina M je kruh se středem v bodě $(1/2, 1/2)$ a poloměrem $\sqrt{2}/2$ (Obr. 9).



Obr. 9

Dvojný integrál $\int_M (x + y) dA$ budeme opět počítat pomocí substituce do polárních souřadnic. (Tato substituce převádí integraci přes kruh na integraci přes dvojrozměrný interval.) V našem případě však „posuneme“ těleso tak, aby střed řídicí kružnice byl počátek. Toho dosáhneme tak, že substituci do polárních souřadnic budeme volit ve tvaru

$$(6) \quad x = \frac{1}{2} + r \cos \phi, \quad y = \frac{1}{2} + r \sin \phi \quad \text{a } J = r.$$

Dosazením do (5) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}, \\ 0 &\leq (\frac{1}{2} + r \cos \phi - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} + r \sin \phi - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}, \\ 0 &\leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Pro ϕ jsme nedostali žádnou omezující podmínku, je tedy $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Potom

$$\begin{aligned} \int_M (x + y) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}/2} (r + r^2(\cos \phi + \sin \phi)) dr d\phi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}(\cos \phi + \sin \phi) \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}/2} d\phi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{12}(\cos \phi + \sin \phi) \right) d\phi = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}. \end{aligned}$$

Při počítání objemu jsme mohli místo substituce pomocí „posunutých“ polárních souřadnic (6) použít substituci (4). Dosazením (4) do podmínky $x^2 + y^2 \leq x + y$

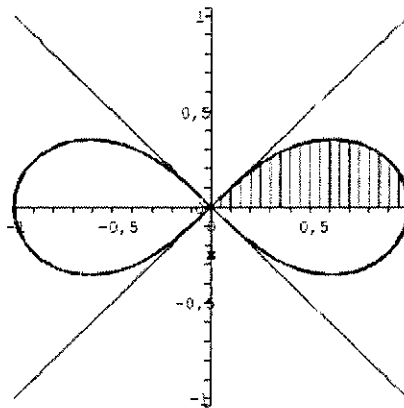
postupně dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq r^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \leq r(\cos \phi + \sin \phi), \\ 0 &\leq r \leq (\cos \phi + \sin \phi). \end{aligned}$$

Z podmínky $0 \leq r \leq \cos \phi + \sin \phi$ pak plyne $-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}$. Odtud

$$\begin{aligned} \int_M (x+y) \, dA &= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^{\cos \phi + \sin \phi} (r^2(\cos \phi + \sin \phi)) \, dr \right) d\phi = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos \phi + \sin \phi)^4 \, d\phi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

V tomto případě je však výpočet posledního integrálu složitější než při substituci (6).



Obr. 10

Příklad 1.26. Vypočítejme obsah množiny M , která je ohraničená lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ (Obr. 10).

Řešení: Pro obsah množiny M platí

$$\mu(M) = \int_M dA,$$

kde v našem případě je

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2\}.$$

Z rovnice lemniskáty je vidět, že tato křivka je symetrická podle osy x i podle osy y (je sudá v obou proměnných). Při výpočtu obsahu plochy ohraničené touto