

3. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, kytaristka@gmail.com

Příklady

4.

$$\int_M z dA$$

kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z\}$

elipsoid, sférické s posunutím

5.

$$\int_M \sqrt{x^2 + y^2} dA$$

kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$

paraboloid

6.

$$\int_M x^2 + y^2 + z^2 dA$$

kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 \leq 3z^2\}$

kužel, sférické

7. Spočítejte míru množiny M kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; -1 < x < 1, z > 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$

položený válec

8.

$$\int_M z dA$$

kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$

kužel na podlaze

9. Spočítejte objem tělesa ohraničeného plochou (anuloid - torus) kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2\}$, $0 < b < a$.

anuloid, cylindrické

10. Spočítejte objem tělesa určeného vztahy kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

muffin, sférické

11. Spočtete objem tělesa určeného vztahy

$$M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 16; x^2 + y^2 \leq 4y\}$$

Vivianiho okénko, cylindrické

12. Spočtete objem tělesa určeného vztahy $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)\}$

kornout se zmrzlinou

1. Určete objem tělesa ohraničeného plochami $z = 2(x^2 + y^2)$, $z^2 = 16(x^2 + y^2)$.
2. Určete objem tělesa ohraničeného plochami $(z - 2)^2 = x^2/3 + y^2/2$, $z = 0$.
3. Určete objem tělesa ohraničeného plochami $z = x^2 + y^2 + 4$, $x - y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
4. Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$.
5. Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného asteroidou $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.

Výsledky

4. 8π ;

pro $x = 2r \cos \gamma \cos \beta$, $y = 3r \cos \gamma \sin \beta$, $z = 1 + r \sin \gamma$ jest $0 < r < 1$.

5. $4\pi/15$;

cylindrické, $0 < r < 1$, $z \in (r^2, 1)$

6. $21\pi a^5/10$;

sférické, $\gamma \in (\pi/6, \pi/2)$, $r \in (0, 2a \sin \gamma)$

7. π ;

cylindrické, $x = x$, $y = r \cos \alpha$, $z = r \sin \alpha$, $-1 < x < 1$, $0 < r < 1$, $0 < \alpha < \pi$.

1. $16\pi/3$

cylindrické, $0 < r < 2$, $2r^2 < z < 4r$

2. $8\pi\sqrt{6}/3$

zobecněné cylindrické, $x = \sqrt{3}r \cos \alpha$, $y = \sqrt{2}r \sin \alpha$, $r < 2 - z$

3. $32/3$

žádná substituce, $0 < x < 2$, $x - 2 <$

8. $16\pi/3$;

cylindrické, $r < 2$, $z \in (0, 4 - 2r)$,

9. $2\pi^2 ab^2$;

cylindrické, $\alpha \in (0, 2\pi)$, $r \in (a - b, a + b)$, $z \in (-\sqrt{b^2 - (r - a)^2}, \sqrt{b^2 - (r - a)^2})$

10. $7\pi(2 - \sqrt{2})/3$;

sférické, $r \in (1, 2)$, $\gamma \in (0, \pi/4)$

11. $-\frac{256}{3}(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2})$;

cylindrické, $\alpha \in (0, \pi)$, $r \in (0, \sin \alpha)$, $z \in (-\sqrt{16 - r^2}, \sqrt{16 - r^2})$

12. $32\pi/3$;

cylindrické, $r < 2$, $z \in (r, 6 - r^2)$

$y < 0$, $0 < z < x^2 + y^2 + 4$

4. $3a^2/2$

polární, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < r < \frac{3a \cos \alpha \sin \alpha}{\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha}$

5. $3\pi a^2/8$;

$x = r \cos^3 \alpha$, $y = r^3 \sin \alpha$, $J = 3r \sin \alpha \cos^2 \alpha$