

Křivky zadané parametricky a polárně

1. **Příklad** Určete typ křivky zadané následujícími parametrickými rovnicemi a nakreslete tuto křivku.

- a) $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. *Výsledek:* Jde o elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- b) $x = 2 + 3 \cos t, y = 3 + 3 \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle$. *Výsledek:* Jde o horní půlkružnici $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$.
- c) $x = \cos t, y = \sin t, z = t, t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Jde o spirálu.
- d) $x = 2 \sin^2 t, y = \cos^2 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. *Výsledek:* Jde o úsečku AB o rovnici $x + 2y - 2 = 0, A = [2, 0], B = [0, 1]$.
- e) $x = 1 - t^2, y = 3 + t, t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Jde o parabolu $(y - 3)^2 = -(x - 1)$.
- f) $x = t^2, y = t^3, t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Křivku tvoří grafy funkcí $y = \sqrt{x^3}$ a $y = -\sqrt{x^3}$.
- g) $x = t^3, y = t^2, t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Tuto křivku dostaneme otočením křivky $z(f)$ o 90° proti směru oběhu ručiček analogových hodin.
- h) $x = 3 \cos^3 t, y = 3 \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$. *Výsledek:* Návod: určete průsečíky křivky se souřadnými osami a dále s přímkami $y = x, y = -x$. Vyjde známá astroida.

2. **Příklad** Rozhodněte, pro které hodnoty parametru t představuje daná křivka spojitou funkci. Eliminací parametru najděte rovnici této funkce.

- a) $x = \ln t, y = \frac{t^2+1}{2t}, t \in (0, \infty)$. *Výsledek:* Pro $t \in (0, \infty)$ jde o funkci $y = \cosh x$.
- b) $x = 8t^2 - 7, y = 16t^2 - 1, t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Pro libovolné t jde o funkci $y = 2x + 13$.
- c) $x = 5t^2, y = 3t, t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Pro $t \in (0, \infty)$ jde o funkci $y = 3\sqrt{\frac{x}{5}}$, pro $t \in (-\infty, 0)$ jde o funkci $y = -3\sqrt{\frac{x}{5}}$.
- d) $x = e^t + t^3 + 4t + 1, y = 2\ln(t^2 + 1) + \sin t, t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Rovnice představují spojitou funkci pro libovolné t , její analytické vyjádření pomocí vzorečku $y = f(x)$ však nedovedeme nalézt.
- e) $x = 4 \cos t, y = 3 \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle$. *Výsledek:* Jde o funkci $y = 3\sqrt{\frac{16-x^2}{4}}$ pro libovolné t .

3. **Příklad** Určete první a druhou derivaci funkce zadané následujícími parametrickými rovnicemi.

- a) $x = e^{2t}, y = e^{3t}$. *Výsledek:* $f' = \frac{3}{2}e^t, f'' = \frac{3}{4e^t}$.
- b) $x = a(t+1), y = at^3$. *Výsledek:* $f' = 3t^2, f'' = \frac{6}{a}t$.
- c) $x = a \sin t, y = a \cos t$. *Výsledek:* $f' = -\operatorname{tg} t, f'' = -\frac{1}{a \cos^3 t}$.
- d) $x = \frac{t+t^3}{1+t^4}, y = \frac{t-t^3}{1+t^4}$.
- e) $x = 4t + t^2, y = t^3 + t$. *Výsledek:* $f' = \frac{3t^2+1}{4+2t}, f'' = \frac{6t^2+24t-2}{(4+2t)^3}$.
- f) $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t$.
- g) $x = \ln t, y = \sin 2t$. *Výsledek:* $f' = 2t \cos 2t, f'' = 2t \cos 2t - 4t^2 \sin 2t$.

4. **Příklad** Nakreslete následující křivky zadané polárně:

- a) $\rho = 2\varphi, \varphi \in (0, \infty)$. *Výsledek:* Archimédova spirála.
- b) $\rho = 1$. *Výsledek:* Kružnice.

IV. Křivkový integrál

IV.1. Parametrizace křivek

Nechť $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ je zobrazení intervalu (a, b) do E_3 . Platí-li :

- 1) $P(t)$ je spojitě a je prosté na (a, b) (k prostosti stačí, aby aspoň jedna ze složek $x(t), y(t), z(t)$ byla ryze monotónní na (a, b)),
- 2) $\dot{P}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ je omezené a spojitě na (a, b) ,
- 3) $\dot{P}(t) \neq \vec{0}$ pro všechna $t \in (a, b)$.

Potom množinu $c = \{X \in E_3; X = P(t), t \in (a, b)\}$ nazveme jednoduchou hladkou křivkou v E_3 a zobrazení P její parametrizací.

Analogicky definujeme i parametrizaci křivky v E_2 .

Řekneme, že křivka c je orientována souhlasně, resp. nesouhlasně, s parametrizací P , jestliže počáteční bod této křivky je $P(a)$, resp. $P(b)$.

Křivka c v E_3 (též v E_2) se dá orientovat pomocí jednotkového tečného vektoru $\vec{\tau}$

v bodě $P(t)$. Je-li $\vec{\tau} = \frac{\dot{P}(t)}{|\dot{P}(t)|}$ pak říkáme, že křivka c je souhlasně orientována s parametrizací P .

Je-li $\vec{\tau} = -\frac{\dot{P}(t)}{|\dot{P}(t)|}$ pak říkáme, že křivka c je nesouhlasně orientována s parametrizací P .

POZNÁMKA : Jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka c se nazývá kladně, resp. záporně, orientovaná, jestliže pohyb v předepsaném směru je proti směru " hodinových ručiček ", resp. " ve směru hodinových ručiček."

Příklad 386. Je dána křivka $c = \{[x, y] \in E_2; y = x^2, x \in (-4, 4)\}$ s počátečním bodem

$A = [-4, 16]$. Zjistěte, zda zobrazení $P(t) = [x(t), y(t)]$ je parametrizací jednoduché a hladké křivky c , jestliže

- a) $P(t) = [t, t^2], t \in (-4, 4)$,
- b) $P(t) = [t^2, t^4], t \in (-2, 2)$,
- c) $P(t) = [\sqrt{t}, t], t \in (0, 16)$.

Řešení:

- a) $P(t) = [t, t^2], t \in (-4, 4)$ splňuje všechny požadované podmínky definice, a proto $P(t)$ je parametrizací křivky c . Orientace křivky je souhlasná s parametrizací, jelikož $P(-4) = [-4, 16] = A$.
- b) $P(t) = [t^2, t^4], t \in (-2, 2)$ není prosté zobrazení. Např. $P(-1) = P(1) = [1, 1]$, takže $P(t)$ není parametrizací křivky c . Kromě toho $x = t^2 \geq 0$, kdežto bod A má x -ovou souřadnici $-4 < 0$.
- c) $P(t) = [\sqrt{t}, t], t \in (0, 16)$ též není parametrizací, protože $\dot{P}(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 1\right)$ není omezená na $(0, 16)$. ■

Příklad 387. Je dána půlkružnice $c = \{[x, y] \in E_2; x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0\}$ s počátečním bodem $A = [-a, 0]$. Zjistěte, zda zobrazení $P(t)$ je její parametrizací, jestliže a) $P(t) = [a \cos t, a \sin t], t \in (0, \pi)$,
 b) $P(t) = [t, \sqrt{a^2 - t^2}], t \in (-a, a)$, c) $P(t) = \left[\frac{at}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+t^2}} \right], t \in \mathbb{R}$.

Řešení:

a) Ano, $P(t)$ je parametrizací, protože $P(t)$ vyhovuje podmínkám definice. Orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací, protože $A = P(\pi) = [-a, 0]$.

b) Není parametrizací, protože $\dot{P}(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right)$ není omezená na $(-a, a)$.

c) Ano, je parametrizací. Ověříme, že platí $x^2 + y^2 = a^2$:

$$\left(\frac{at}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2 = \frac{a^2(t^2+1)}{1+t^2} = a^2,$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{at}{\sqrt{1+t^2}} = \pm a, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{\sqrt{1+t^2}} = 0 \rightarrow \text{orientace}$$

křivky je souhlasná s parametrizací. Zde se snadno ověří spojitost pro $P(t)$ a $\dot{P}(t)$.

Protože je $\dot{x}(t) = \frac{a}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} > 0$ pro všechna t , je funkce $x(t)$ monotónní

a zobrazení $P(t)$ je prosté. $\dot{P}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0, 0) \Leftrightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0 \rightarrow$

$$\frac{a^2}{(1+t^2)^3} + \frac{a^2 t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{a^2}{(1+t^2)^2} \neq 0. \quad \blacksquare$$

• Najděte parametrizaci křivky c s počátečním bodem A a rozhodněte o její orientaci vzhledem k parametrizaci:

Příklad 388. Křivka c je úsečka s počátečním bodem $A = [4, -1, 3]$ a koncovým $B = [3, 1, 5]$.

Řešení: Napíšeme rovnice přímky AB tak, že použijeme bod A a směrový vektor

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 2), \quad c: \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \text{Úsečku } AB \text{ obdržíme pro } t \in (0, 1),$$

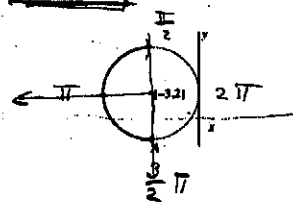
bod A odpovídá parametru $t = 0$, takže orientace křivky je souhlasná s parametrizací. \blacksquare

Příklad 389. $c = \{[x, y] \in E_2; (x+3)^2 + (y-2)^2 = 9, x < -3\}$, $A = [-3, -1]$

Řešení:

$$c: \begin{cases} x = -3 + 3 \cos \varphi \\ y = 2 + 3 \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right),$$

orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací. \blacksquare



Příklad 390. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, y \geq 0, A = [3, 0]$

Řešení:

Nechť vektorová funkce \vec{f} má spojité parciální derivace v hvězdovité oblasti $G \subset E_3$ a nechť $\text{rot } \vec{f} = \vec{0}$ v G . Potom vektorové pole \vec{f} je potenciální v G .

- Budiž dáno vektorové pole \vec{f} : a) ověřte, že \vec{f} je potenciální v G , b) stanovte jeho potenciál, c) vypočtete $\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$, jestliže:

Příklad 475. $\vec{f} = (3x^2y - 3y^2, x^3 - 6xy)$, $A = [1, 3]$, $B = [2, 1]$, $G = E_2$

Řešení: a) Jelikož funkce f_1 a f_2 jsou spojité a diferencovatelné v celém E_2 je G jednoduše souvislá oblast v E_2 , (hvězdovitá v E_3), pak k ověření, že \vec{f} je potenciální v $G \subset E_2$ stačí zjistit, zda $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2 - 6y. \quad \text{Ano, } \vec{f} \text{ je potenciální v } E_2,$$

$$\text{b) } \vec{f} = \text{grad } \psi = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right)$$

$$\int_{[x_0, y_0]}^{[x, y]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{[x_0, y_0]}^{[x, y]} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} dy = \int_{[x_0, y_0]}^{[x, y]} d\psi = \psi(x, y) - \psi(x_0, y_0).$$

$$\text{Zvolíme } (x_0, y_0) = (0, 0): \quad \psi(x, y) = \int_{[0, 0]}^{[x, y]} (3x^2y - 3y^2) dx + (x^3 - 6xy) dy =$$

(víme, že integrál nezávisí na cestě, proto zvolíme

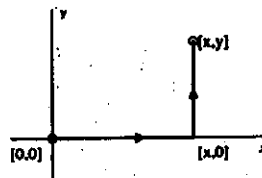
lomenou čáru $[0, 0] \rightarrow [x, 0] \rightarrow [x, y]$):

$$\left[\begin{array}{l} [0, 0] \rightarrow [x, 0] : y = 0, dy = 0 \\ [x, 0] \rightarrow [x, y] : x = \text{konst.}, dx = 0 \end{array} \right]$$

$$= \int_{[0, 0]}^{[x, 0]} 0 dx + \int_{[x, 0]}^{[x, y]} (x^3 - 6xy) dy = x^3y - 3xy^2 \rightarrow$$

$$\psi(x, y) = x^3y - 3xy^2 + C,$$

$$\text{c) } \int_{[1, 3]}^{[2, 1]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \psi(2, 1) - \psi(1, 3) = (8 - 6) - (3 - 27) = 26. \quad \blacksquare$$



Příklad 476. $\vec{f} = (2x \cos y, -x^2 \sin y)$, $A = [2, 0]$, $B = [4, \pi/2]$, $G = E_2$

Řešení: a) Oblast G je opět jednoduše souvislá oblast a platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -2x \sin y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -2x \sin y \rightarrow \vec{f} \text{ je potenciální v } E_2.$$

$$\text{b) } \psi(x, y) = \int_{[0, 0]}^{[x, y]} 2x \cos y dx - x^2 \sin y dy = \int_{[0, 0]}^{[x, 0]} + \int_{[x, 0]}^{[x, y]} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} [0, 0] \rightarrow [x, 0] : y = 0, dy = 0 \\ [x, 0] \rightarrow [x, y] : x = \text{konst.}, dx = 0 \end{array} \right] = \int_0^x 2x dx - \int_0^y x^2 \sin y dy = x^2 + x^2 [\cos y]_0^y =$$

$$= x^2 + x^2 \cos y - x^2 \rightarrow \psi(x, y) = x^2 \cos y + C.$$

$$c) \int_{[2,0]}^{[4,\pi/2]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \psi(4, \pi/2) - \psi(2, 0) = 16 \cos \frac{\pi}{2} - 4 \cos 0 = -4. \quad \blacksquare$$

Příklad 477. $\vec{f} = (3x^2y - z^2 + 2z, x^3 + 2yz - 3, y^2 - 2xz + 2x + 5)$, $A = [0, 1, 1]$,
 $B = [3, 0, 2]$, $G = E_3$

Řešení: a) Oblast G je hvězdovitá v E_3 ,

$$\text{rot } \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y - z^2 + 2z & x^3 + 2yz - 3 & y^2 - 2xz + 2x + 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (2y - 2y, -2z + 2 + 2z - 2, 3x^2 - 3x^2) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{f} \text{ je potenciální v } E_3.$$

b) $\psi(x, y, z) =$

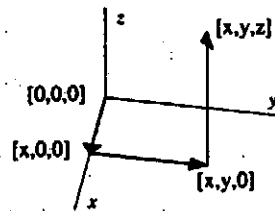
$$= \int_{[0,0,0]}^{[x,y,z]} (3x^2y - z^2 + 2z) dx + (x^3 + 2yz - 3) dy + (y^2 - 2xz + 2x + 5) dz =$$

$$= \int_{[0,0,0]}^{[x,0,0]} + \int_{[x,0,0]}^{[x,y,0]} + \int_{[x,y,0]}^{[x,y,z]} =$$

$$\left[\begin{array}{l} [0, 0, 0] \rightarrow [x, 0, 0] : y = 0, dy = 0, z = 0, dz = 0 \\ [x, 0, 0] \rightarrow [x, y, 0] : dx = 0, x = 0, dz = 0 \\ [x, y, 0] \rightarrow [x, y, z] : dx = 0, dy = 0 \end{array} \right]$$

$$= \int_0^x 0 dx + \int_0^y (x^3 - 3) dy + \int_0^z (y^2 - 2xz + 2x + 5) dz =$$

$$= x^3y - 3y + y^2z - xz^2 + 2xz + 5z + C,$$



$$c) \int_{[0,1,1]}^{[3,0,2]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \psi(3, 0, 2) - \psi(0, 1, 1) = 7. \quad \blacksquare$$

Příklad 478. Určete oblasti $G \subset E_2$, v nichž je pole $\vec{f} = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 2y - 5\right) \vec{i} +$

$\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2x + 11\right) \vec{j}$ potenciální a stanovte jeho potenciál $\psi(x, y)$,
 splňující podmínku $\psi(-2, 2) = 0$.

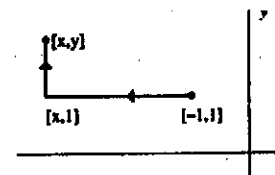
Řešení: $G_1 = \{[x, y] \in E_2; x > 0, y > 0\}$, $G_2 = \{[x, y] \in E_2; x < 0, y > 0\}$,
 $G_3 = \{[x, y] \in E_2; x > 0, y < 0\}$, $G_4 = \{[x, y] \in E_2; x < 0, y < 0\}$.

Platí $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} + 2$, tedy je \vec{f} potenciální v $G_i, i = 1, 2, 3, 4$.

Dále je $\psi(x, y) = \int_{[-1,1]}^{[x,y]} \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 2y - 5\right) dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2x + 11\right) dy =$

Vybíráme cestu od $[-1, 1]$ do $[x, y]$ v G_2 ,
 protože daný bod $[-2, 2]$ leží v G_2 .

$$= \left[\begin{array}{l} [-1, 1] \rightarrow [x, 1] : y = 1, dy = 0 \\ [x, 1] \rightarrow [x, y] : x = \text{konst.}, dx = 0 \end{array} \right] =$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^x \left(1 - \frac{1}{x^2} - 3\right) dx + \int_1^y \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2x + 11\right) dy = \left[-2x + \frac{1}{x}\right]_{-1}^x + \left[\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2xy + \right. \\
&+ 11y\left.]_1^y = -2x + \frac{1}{x} - 2 + 1 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2xy + 11y - \frac{1}{x} - x - 2x - 11 = \\
&= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy - 5x + 11y + C; \\
\psi(-2, 2) = 0: & \quad -1 + 1 - 8 + 10 + 22 + C = 0 \quad \rightarrow \quad C = -22 \\
\psi(x, y) = & \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy - 5x + 11y - 22 \quad \text{pro } [x, y] \in G_2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Příklad 479. Určete oblast $G \subset E_2$, v níž je vektorová funkce $\vec{f} = \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}, 4y\sqrt{x}\right)$ spojitá

a rozhodněte, zda $\int_c \vec{f} \cdot \vec{ds}$ nezávisí na cestě v G . V kladném případě

vypočtete $\int_{[-1,2]}^{[4,-2]} \vec{f} \cdot \vec{ds}$.

Řešení: $G = \{[x, y] \in E_2, x > 0\}$.

$\int_c \vec{f} \cdot \vec{ds}$ nezávisí na cestě, protože $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{2y}{\sqrt{x}}$.

$$\int_{[1,2]}^{[4,-2]} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_{[1,2]}^{[4,-2]} \frac{y^2}{\sqrt{x}} dx + 4y\sqrt{x} dy = \int_{[1,2]}^{[4,2]} + \int_{[4,2]}^{[4,-2]} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} [1, 2] \rightarrow [4, 2] : y = 2, dy = 0, x \in (1, 4) \text{ orientace úsečky je souhlasná s parametrizací} \\ [4, 2] \rightarrow [4, -2] : x = 4, dx = 0, y \in (2, -2), \text{ orientace úsečky je nesouhlasná s parametrizací} \end{array} \right] =$$

$$= \int_1^4 \frac{4}{\sqrt{x}} dx + \int_2^{-2} 4y \cdot 2 dy = \left[8\sqrt{x}\right]_1^4 + \left[4y^2\right]_2^{-2} = 8 \quad \blacksquare$$

Příklad 480. Je dána funkce $\psi(x, y) = x^3y + x^2y^2$. Určete a) silové pole \vec{f} , jehož potenciálem je funkce $\psi(x, y)$; b) práci síly \vec{f} při pohybu z bodu $M = [1, 1]$ do bodu $N = [-2, 3]$; c) práci síly \vec{f} podél křivky $c: x^2 + 4y^2 = 4$.

Řešení: a) $\vec{f} = \text{grad } \psi \rightarrow \vec{f} = (3x^2y + 2xy^2, x^3 + 2x^2y)$;

b) $A = \int_M^N \vec{f} \cdot \vec{ds} = (\text{integrál nezávisí na cestě}) = \psi(M) - \psi(N) =$
 $= (-24 + 36) - (1 + 1) = 10;$

c) $A = \oint_c \vec{f} \cdot \vec{ds} = 0. \quad \blacksquare$

Příklad 481. Vypočtete $\int_M^N \vec{f} \cdot \vec{ds}$, kde $M = [1, 0, e]$; $N = [2, -1, e^2]$, víte-li, že pole \vec{f} je potenciální v oblasti $G \subset E_3$, jehož potenciál je funkce $\psi(x, y, z) = xy^2 \ln z$. Určete též oblast G .

Řešení: $G = \{[x, y, z] \in E_3; z > 0\}$; $\int_M^N \vec{f} \cdot \vec{ds} = \psi(M) - \psi(N) = 2 \ln e^2 - 0 = 4. \quad \blacksquare$

$$496. \vec{f} = \left(\frac{z}{x-y}, \frac{z}{y-x}, \ln(x-y) + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} G \subset E_3: x > y, z > 0 \\ \psi = z \ln(x-y) + 2\sqrt{z} + C \end{array} \right]$$

IV.7. Greenova věta

Nechť : 1) vektorová funkce $\vec{f} = (f_1, f_2)$ má spojité parciální derivace v oblasti $G \subset E_2$,
 2) křivka $c \subset G$ je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná po částech hladká,
 3) $\text{int } c \subset G$. Potom

$$\oint_c \vec{f} \cdot \vec{ds} = \oint_c f_1 dx + f_2 dy = \iint_{\text{int } c} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Důsledek : $P = \iint_{\text{int } c} dx dy = \frac{1}{2} \oint_c -y dx + x dy,$

kde P je plošný obsah rovinného obrazce omezeného uzavřenou křivkou c .

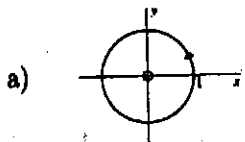
Příklad 497. Pomocí Greenovy věty spočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (2x + 3y, 5x - y - 4)$ po obvodu $\triangle ABC$ ve směru $A \rightarrow B \rightarrow C$, kde $A = [1, 0], B = [1, -3], C = [-3, 0]$.

Řešení: Cirkulace $\Gamma = \oint_c \vec{f} \cdot \vec{ds} = \oint_c (2x + 3y) dx + (5x - y - 4) dy \stackrel{\text{Gr.v.}}{=} -2 \iint_{\text{int } c} (5 - 3) dx dy = -2 \iint_{\triangle ABC} dx dy = -2 \cdot P_{\triangle} = -2 \frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}{2} = -12$

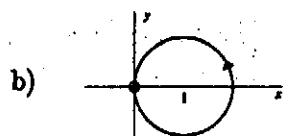
(orientace křivky c je záporná, proto před dvojným integrálem je znaménko minus).

Příklad 498. Vyšetřete existenci integrálu $\oint_c \left(\ln(x^2 + y^2), -2 \arctg \frac{y}{x} \right) \cdot \vec{ds}$ a rozhodněte o možnosti užití Greenovy věty k jeho výpočtu, jestliže $c \subset E_2$ je kladně orientovaná křivka a) $x^2 + y^2 = 1$, b) $(x-1)^2 + y^2 = 1$, c) $(x-2)^2 + y^2 = 1$, d) c je obvod čtverce s vrcholy $A = [1, 0], B = [0, 1], C = [-1, 0], D = [0, -1]$. V kladném případě vypočítejte integrál pomocí Greenovy věty.

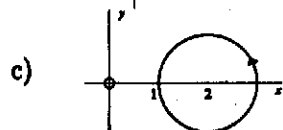
Řešení: Integrál $\oint_c \left(\ln(x^2 + y^2), -2 \arctg \frac{y}{x} \right) \cdot \vec{ds}$ existuje v $E_2 - [0, 0]$, protože funkce $\ln(x^2 + y^2)$ je definována jen pro $x^2 + y^2 > 0$ a $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \ln(x^2 + y^2) = -\infty$; funkce $\arctg \frac{y}{x}$ není definována pro $x = 0$, ale je omezená $\left(\left| \arctg \frac{y}{x} \right| < \frac{\pi}{2} \right)$. Greenovu větu lze použít za předpokladu, že $c, \text{int } c \subset E_2 - [0, 0]$.



Integrál existuje, ale nelze použít Greenovu větu.



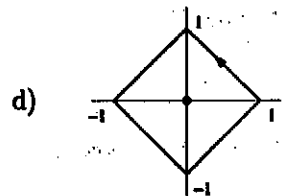
Integrál neexistuje a nelze použít Greenovu větu.



Integrál existuje a lze použít Greenovu větu. Provedme tedy výpočet.

$$\oint_c f_1 dx + f_2 dy = \iint_{\text{int } c} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\text{int } c} \left(\frac{2}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{y}{x^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \right) dx dy =$$

$$= \iint_{\text{int } c} 0 dx dy = 0.$$



Integrál existuje, ale nelze použít Greenovu větu.

Příklad 499. Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2}$ v $G = E_2 - \{0,0\}$.

- a) Ověřte, že platí $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ v G . b) Výpočtem integrálu $\oint_c \vec{f} \cdot \vec{ds}$, kde c je záporně orientovaná kružnice $S = [0,0], r = 2$, se přesvědčte, že pole není potenciální v G .

Řešení: a) $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

b) Cirkulace $\Gamma = \oint_c \vec{f} \cdot \vec{ds} = \oint_c \frac{(x-y) dx + (x+y) dy}{x^2 + y^2} =$

$$= \left[\begin{array}{l} c: \quad x = 2 \cos t, \quad dx = -2 \sin t \quad t \in (0, 2\pi) \\ \quad y = 2 \sin t, \quad dy = 2 \cos t \quad \text{křivka je nesouhlasně} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{orientovaná s parametrizací} \end{array} \right] =$$

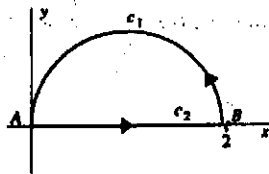
$$= - \int_0^{2\pi} \frac{-4(\cos t - \sin t) \sin t + 4(\cos t + \sin t) \cos t}{4} dt = - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

Pole \vec{f} není potenciální, protože $\oint_c \vec{f} \cdot \vec{ds} \neq 0$.

K výpočtu tohoto integrálu nelze použít Greenovu větu, jelikož bod nespojivosti $[0,0] \in \text{int } c = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Příklad 500. Určete cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ po kladně orientované křivce $c = c_1 \cup c_2$, kde $c_1: x^2 - 2x + y^2 = 0, y \geq 0$; $c_2: y = 0, x \in (0, 2)$, a) přímým výpočtem, b) pomocí Greenovy věty.

Řešení:



$$c_1: (x-1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$$

$$c_2: y = 0, x \in (0, 2)$$

2.5 Definice. Říkáme, že křivka $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ je po částech hladká, existuje-li dělení

$$D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je křivka

$$\psi_i := \varphi|_{\langle t_{i-1}, t_i \rangle}$$

$$(\text{tzn. } D\psi_i = \langle t_{i-1}, t_i \rangle, \psi_i(t) := \varphi(t))$$

hladkým obloukem.

2.6 Příklad. Nakreslete geometrické obrazy daných křivek a rozhodněte, které z nich jsou

- jednoduchými křivkami;
- uzavřenými křivkami;
- jednoduchými uzavřenými křivkami;
- hladkými oblouky;
- po částech hladkými křivkami:

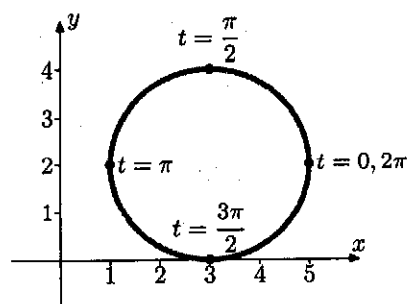
a) $\varphi_a(t) := (3 + 2 \cos t, 2 + 2 \sin t)$, $D_{\varphi_a} = \langle 0, 2\pi \rangle$;

b) $\varphi_b(t) := (3 + 2 \cos(2t), 2 + 2 \sin(2t))$, $D_{\varphi_b} = \langle 0, 2\pi \rangle$;

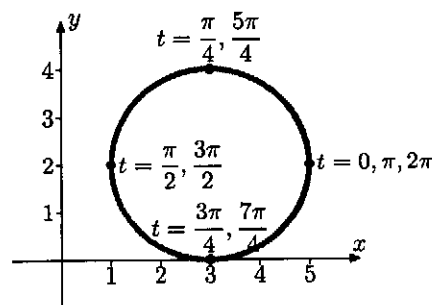
c) $\varphi_c(t) := \left(\frac{2000}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{2000t}{\sqrt{1+t^2}} \right)$, $D_{\varphi_c} = \mathbb{R}$;

d) $\varphi_d(t) := (t, |t|)$, $D_{\varphi_d} = \langle -2, 2 \rangle$.

Řešení.

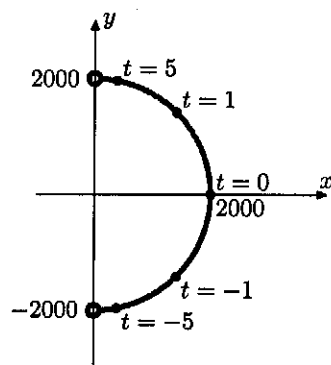
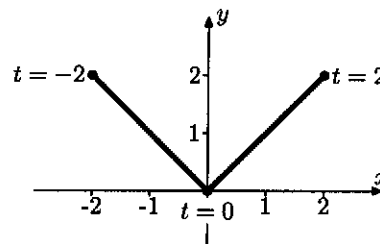


Obr. 2.2: $\langle \varphi_a \rangle$ z př. 2.6a)



Obr. 2.3: $\langle \varphi_b \rangle$ z př. 2.6b)

Není těžké si rozmyslet (a přitom nám pomohou i geometrické obrazy daných křivek znázorněné na obrázcích 2.2–2.5), že

Obr. 2.4: $\langle \varphi_c \rangle$ z př. 2.6c)Obr. 2.5: $\langle \varphi_d \rangle$ z př. 2.6d)

- jednoduchými křivkami jsou φ_c a φ_d ;
- uzavřenými křivkami jsou φ_a a φ_b ;
- jednoduchou uzavřenou křivkou je pouze křivka φ_a ;
- hladkým obloukem není žádná z daných křivek;
- po částech hladkými křivkami jsou φ_a , φ_b a φ_d .

2.7 Několik poznámek (k příkladu 2.6).

- pro křivku $\varphi(t) := (3 + 2 \cos t, 2 + 2 \sin t)$, $D_\varphi = \langle 0, 3\pi \rangle$, platí $\langle \varphi \rangle = \langle \varphi_a \rangle = \langle \varphi_b \rangle$, ale φ není uzavřenou křivkou;
- neexistuje hladký oblouk, který by byl parametrizací $\langle \varphi_d \rangle$;
- pro křivku $\varphi(t) = (t^3, |t^3|)$, $t \in \langle -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2} \rangle$, platí $\langle \varphi \rangle = \langle \varphi_d \rangle$, ale φ není po částech hladkou křivkou.

2.8 Cvičení. Nakreslete geometrický obraz dané křivky φ definované na intervalu I a rozhodněte, zda se jedná o jednoduchou křivku, uzavřenou křivku, hladký oblouk a po částech hladkou křivku:

- $\varphi(t) := (\cos t, 2 + \arcsin(\cos t))$, $I = \langle -\pi, \pi \rangle$;
- $\varphi(t) := (2 \sin^2 t, 4 \cos^2 t)$, $I = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$;
- $\varphi(t) := (t^2 - 2t + 3, t^2 - 2t + 1)$, $I = (1, +\infty)$.

2.9 Příklad. Parametrizujte množinu Ω , je-li

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 1 \wedge x \in \langle 1, 3 \rangle\}$;

- b) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$;
 c) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \wedge 2x + y - 3z = 0\}$;
 d) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge x^2 + y^2 = 2x \wedge z \geq 0\}$.

Řešení.

- a) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1-3x}{2} \wedge x \in \langle 1, 3 \rangle\} = \langle \varphi \rangle$, kde

$$\varphi(t) := \left(t, \frac{1-3t}{2} \right), \quad t \in \langle 1, 3 \rangle.$$

- b) Daná množina je elipsou s poloosami 2 a 3. Při její parametrizaci nám dobře poslouží tzv. zobecněné polární souřadnice:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(2r \cos t, 3r \sin t) : \frac{(2r \cos t)^2}{4} + \frac{(3r \sin t)^2}{9} = 1 \wedge r \geq 0 \wedge t \in \langle 0, 2\pi \rangle\} = \\ &= \{(2 \cos t, 3 \sin t) : t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}, \end{aligned}$$

a proto

$$\Omega = \langle \varphi \rangle, \quad \text{kde } \varphi(t) := (2 \cos t, 3 \sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

- c) Množina Ω je zřejmě kružnicí v prostoru (se středem v bodě $s = (0, 0, 0)$, poloměrem $r = 3$ a ležící v rovině $2x + y - 3z = 0$). V příkladu 2.6a) jsme si ukázali, že množina

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) &= (3 + 2 \cos t, 2 + 2 \sin t) = \\ &= (3, 2) + 2 \cos t (1, 0) + 2 \sin t (0, 1), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\} \end{aligned}$$

je kružnicí (v \mathbb{R}^2) se středem v bodě $(3, 2)$ a poloměrem 2. Podobně lze ověřit (a rozmysleme si to podrobně), že množina

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) &= (s_1, s_2, s_3) + r \cos t (u_1, u_2, u_3) + r \sin t (v_1, v_2, v_3), \\ &t \in \langle 0, 2\pi \rangle\} \end{aligned}$$

je kružnicí (v \mathbb{R}^3) se středem v bodě $s = (s_1, s_2, s_3)$ a poloměrem r , která „leží“ v rovině, jejímiž jednotkovými navzájem kolmými směrovými vektory jsou

$$u = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{a} \quad v = (v_1, v_2, v_3).$$

Nyní se vraťme k našemu úkolu. Střed s a poloměr r už známe. Stačí najít (libovolné) dva vektory u a v výše uvedených kvalit. K tomu stačí zvolit v rovině $2x + y - 3z = 0$ dva (libovolné) lineárně nezávislé vektory, např. $\tilde{u} = (1, -2, 0)$ a $\tilde{v} = (3, 0, 2)$ a zortonormalizovat je:

$$u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \quad v = \frac{\tilde{v} - (\tilde{v} \cdot u)u}{\|\tilde{v} - (\tilde{v} \cdot u)u\|} = \frac{1}{\sqrt{70}}(6, 3, 5),$$

kde $\tilde{v} \cdot u = (3, 0, 2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0\right) = \frac{3}{\sqrt{5}}$ je skalárním součinem vektorů \tilde{v} a u .

Máme i jinou možnost, jak najít vektory u a v : zvolíme libovolný jednotkový vektor ležící v rovině $2x + y - 3z = 0$, například $u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0)$, a vypočteme v jako vektorový součin vektoru u a jednotkového normálového vektoru roviny $2x + y - 3z = 0$, tj. vektoru $n = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 1, -3)$.

Závěr – jednou (z nekonečně mnoha) parametrizací množiny Ω je křivka

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= (0, 0, 0) + 3 \cos t \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0) + 3 \sin t \frac{1}{\sqrt{70}}(6, 3, 5) = \\ &= \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \cos t + \frac{18}{\sqrt{70}} \sin t, -\frac{6}{\sqrt{5}} \cos t + \frac{9}{\sqrt{70}} \sin t, \frac{15}{\sqrt{70}} \sin t \right), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

d) Ukažme si dvě z možností, jak lze postupovat. První, využívající cylindrických souřadnic, vede k vyjádření

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(r \cos t, r \sin t, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 + z^2 = 4 \wedge r^2 = 2r \cos t \wedge z \geq 0 \wedge \\ &\quad \wedge r \geq 0 \wedge t \in \langle -\pi, \pi \rangle\} = \\ &= \{(r \cos t, r \sin t, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{4 - r^2} \wedge r = 2 \cos t \wedge r \geq 0 \wedge t \in \langle -\pi, \pi \rangle\} = \\ &= \{(2 \cos^2 t, \sin(2t), 2|\sin t|) \in \mathbb{R}^3 : t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle\} \end{aligned}$$

a k parametrizaci

$$\varphi_1(t) := (2 \cos^2 t, \sin(2t), 2|\sin t|), \quad D\varphi_1 = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Druhý přístup je založen na pozorování, že

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \wedge z = \sqrt{4-2x}\} = \\ &= \{(\cos t + 1, \sin t, \sqrt{4-2(\cos t + 1)}) \in \mathbb{R}^3 : t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}, \end{aligned}$$

a proto $\Omega = \langle \varphi_2 \rangle$, kde

$$\varphi_2(t) := (\cos t + 1, \sin t, \sqrt{4-2\cos t}) = (\cos t + 1, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2}), \quad D\varphi_2 = \langle 0, 2\pi \rangle.$$

▲

Kapitola 2

Křivky



Průvodce studiem

V tomto oddílu uvedeme některé základní informace o křivkách, které budeme v dalším výkladu potřebovat. Současně uvedeme grafy některých často používaných křivek, na nichž budeme příslušné pojmy demonstrovat.

V inženýrských aplikacích chápeme intuitivně pod pojmem křivka čáru (trajektorii), kterou opisuje bod při svém spojitém pohybu, tj. množinu všech poloh, které bod zaujal během svého pohybu.



Cíle

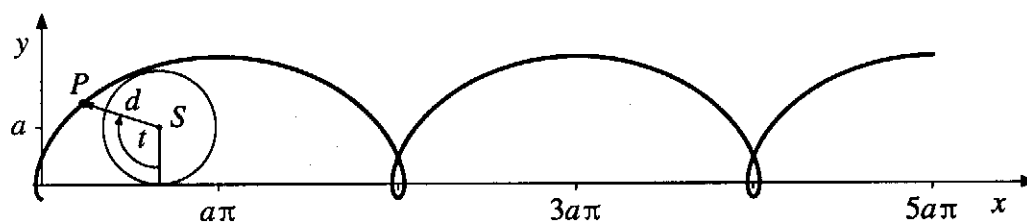
Po prostudování této kapitoly budete znát pojmy

- parametricky zadaná křivka,
- tečný a normálový vektor rovinné křivky,
- parametricky zadaná prostorová křivka,
- délka rovinné a prostorové křivky,
- parametrizace a orientace křivky.



Příklad 2.1. Najděte souřadnice hmotného bodu pohybujícího se po *prodloužené cykloidě*, znázorněné na obr. 2.1. Prodlouženou cykloidu opisuje bod nacházející se v rovině kružnice, mající poloměr a , která se kotálí po přímce. Bod je s kružnicí pevně spojený a jeho vzdálenost od středu kružnice S je rovna d , přičemž $d > a$.

Řešení. Označme t úhel, který svírá průvodič bodu P , opisujícího prodlouženou cykloidu, s kolmicí, sestavenou ze středu S kotálející se kružnice na osu x . Tento úhel je orientován po směru pohybu hodinových ručiček. V kartézské souřadné soustavě jsou souřadnice bodu S pak $x = at$ (délka kruhového oblouku odpovídajícího úhlu t) a $y = a$.



Obr. 2.1: Prodloužená cykloida

Hodnota souřadnic bodu P prodloužené cykloidy je vzhledem k bodu S jako počátku souřadné soustavy zřejmě $(-d \sin t, -d \cos t)$. Celkově je tudíž

$$x = at - d \sin t, \quad y = a - d \cos t.$$

Pro část prodloužené cykloidy na obrázku je zvoleno $t \in (0, 5\pi)$.

Poznamenejme, že pro $d = a$ dostáváme *obyčejnou cykloidu* a pro $d < a$ *zkrácenou cykloidu*. ▲

Intuitivní představu o křivce z počátku této kapitoly je třeba zpřesnit a vyjádřit matematicky. Představme si, že hmotný bod se v určitém časovém intervalu J pohyboval pod účinkem nějakých sil v prostoru nebo v rovině. Tento pohyb je zcela určen, známe-li polohu pohybujícího se bodu v každém časovém okamžiku $t \in J$. Poloha bodu v prostoru je však jednoznačně určena jeho polohovým vektorem r vzhledem ke zvolenému počátku O souřadné soustavy. Pohyb bodu je tedy matematicky popsán vektorovou funkcí $r(t)$, která je definována pro $t \in J$ a jejíž hodnoty jsou polohové vektory pohybujícího se bodu vzhledem k bodu O . Hodograp této vektorové funkce představuje tedy trajektorii (dráhu) pohybujícího se bodu. V tomto pojetí by tedy měla být křivka hodograpem této vektorové funkce. (Připomeňme, že *hodograpem* vektorové funkce $r(t)$, $t \in J$, rozumíme obor hodnot této funkce, tj. množinu koncových bodů vektorů $r(t)$ v \mathbb{R}^2 , resp. v \mathbb{R}^3 . Je zřejmé, že různé vektorové funkce mohou mít tentýž hodograp.) Ukazuje se však, že není vhodné definovat křivku jen jako množinu bodů, ale že je i důležité, jakým způsobem bod křivku probíhá.

Uvažujeme-li pohyb hmotného bodu vlivem účinku sil, pak vektorová funkce, která udává polohu tohoto bodu v čase t , nemůže být libovolná. Např. podle zákonů mechaniky je zřejmé, že neexistují síly, které by hmotný bod přemístily z jednoho místa na druhé v nulovém čase, tj. skokem. Tedy trajektorie bodu se musí měnit spojitě, což ovšem značí, že funkce $r(t)$ musí být spojitá. Pak by bylo možno chápat křivku jako hodograp spojitě vektorové funkce.

Lze ale na příkladech ukázat, že takto chápaná křivka může být zcela vzdálena naší představě o křivce. Hodograpem spojitě vektorové funkce může být např. čtverec nebo krychle, což jistě neodpovídá intuitivní představě křivky (viz např. [3, str. 374] nebo [10, str. 3]). Je tedy zřejmé, že na funkci $r(t)$ musíme klást další požadavky, aby odpovídala naší intuitivní představě o křivce. Než tyto požadavky budeme formulovat, zavedeme dva pomocné pojmy.

Např. elipsa z příkladu 2.2 je regulární, zatímco obvod čtverce je (při rozumné parametrizaci) po částech regulární křivka.

Uvažujme dvě křivky

$$\begin{aligned} K: \quad r_1(t) &= t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad t \in (-1, 1), \\ L: \quad r_2(s) &= s^3\mathbf{i} + s^3\mathbf{j}, \quad s \in (-1, 1), \end{aligned} \quad (2.7)$$

Podobně jako v (2.3) jde o dvě otevřené úsečky, které tentokrát vzhledem ke změně intervalů z $(0, 1)$ na $(-1, 1)$ spojují body $[-1, -1]$ a $[1, 1]$.

Pro křivku K platí $r_1'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$, $t \in (-1, 1)$, takže je to regulární křivka (stejně jako první křivka v (2.3)).

Pro křivku L platí $r_2'(s) = 3s^2\mathbf{i} + 3s^2\mathbf{j}$, $s \in (-1, 1)$. Tedy $r_2'(0) = \mathbf{0}$, $0 \in (-1, 1)$ a tato křivka není regulární (na rozdíl od druhé křivky v (2.3), kde $0 \notin (0, 1)$).

Křivky K a L nejsou ekvivalentní (na rozdíl od křivek z (2.3)). Připustíme totiž, že by existovala transformace parametru $\varphi(s)$ splňující (2.4). Derivováním této rovnosti dostaneme (s použitím pravidla pro derivování složené funkce aplikovaného na složky) $r_1'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) = r_2'(s)$, $s \in (-1, 1)$. Protože $r_1'(\varphi(0)) = \mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ a $r_2'(0) = \mathbf{0}$, musí být $\varphi'(0) = 0$, což není přípustné.

Poznámka. Lze dokázat, že prosté regulární křivky jsou ekvivalentní právě tehdy, když mají stejné trajektorie – viz např. [6].

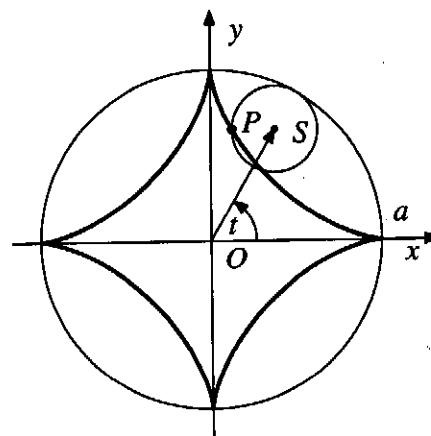
Příklad 2.3. Zjistěte, zda křivka daná parametricky rovnicemi

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad t \in (0, 2\pi), \quad (2.8)$$

je regulární.

Řešení. Uvedená křivka se nazývá *asteroida* a je znázorněna na obr. 2.5. Asteroidu opisuje bod P , který se nachází na obvodu kružnice s poloměrem $a/4$, která se kotálí zevnitř po kružnici o poloměru a . Předpokládáme-li, že větší kružnice je ve středu kartézského souřadného systému, vyjadřuje parametr t úhel, který svírá průvodič středu malé kružnice s kladným směrem osy x , orientovaný proti směru hodinových ručiček.

Derivováním dostaneme $r'(t) = -3a \cos^2 t \sin t \mathbf{i} + 3a \sin^2 t \cos t \mathbf{j}$. Pro hodnoty $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ a 2π je vektor $r'(t) = \mathbf{0}$, tedy křivka není hladká. Lze ji ale rozdělit na čtyři křivky, každá z nichž je hladká (po transformaci parametru, která ovšem nedá ekvivalentní křivku, ale pouze křivku se stejnou trajektorií — viz přirozený parametr níže a příklad 2.4). Zřejmě asteroida je jednoduchá uzavřená křivka. ▲



Obr. 2.5: Asteroida



Pomocí nich určíme délku elementu křivky $ds = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2} dt = \sqrt{21} dt$.

Nyní dosadíme do daného křivkového integrálu a převedeme jej na jednoduchý:

$$I = \int_K (x + y^2 - z) ds = \int_0^1 [(2-t) + (-1+4t)^2 - (1+2t)]\sqrt{21} dt.$$

V získaném integrálu provedeme úpravy integrandu, určíme primitivní funkci a dosadíme do primitivní funkce horní a dolní mez integrálu:

$$I = \int_0^1 (2 - 11t + 16t^2)\sqrt{21} dt = \sqrt{21} \left[2t - \frac{11}{2}t^2 + \frac{16}{3}t^3 \right]_0^1 = \frac{11}{6}\sqrt{21}.$$

▲

3.3. Aplikace křivkového integrálu I. druhu

Při odvozování vzorců pro aplikace křivkového integrálu I. druhu budeme používat symbolický přístup, který sestavení vzorce zjednodušuje a zprůhledňuje. Tím se ovšem dopouštíme, co se týče ryzího matematického postupu, jistých nepřesností. Přesnější postup spočívá v odvození příslušného vzorce podle definice uvedené v odstavci 3.1.

Délka křivky

Křivku K rozdělíme na elementy, jejichž délku označíme ds , a délky těchto elementů „sčítáme“. Protože těchto elementů je nekonečně mnoho a jsou nekonečně malé, sčítání se provede pomocí integrálu.

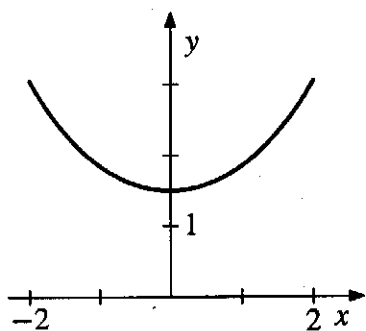
Tedy pro délku křivky, kterou označíme $m_1(K)$, dostaneme vzorec

$$m_1(K) = \int_K ds. \quad (3.5)$$

Všimněte si, že správnost vzorce plyne z (2.10) a (3.4).

Příklad 3.2. Mezi dvěma sloupy, vzdálenými od sebe 4 m, je napnuto lano. Vlivem vlastní hmotnosti se lano prohne do tvaru křivky, která se nazývá *řetězovka*. Průhyb lana je schématicky zachycen na obr. 3.3. Zavedeme kartézskou souřadnou soustavu s osami x a y , kde osa x prochází patami sloupů, osa y je uprostřed mezi nimi. V této souřadné soustavě je řetězovka popsána funkcí $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$, $a > 0$. Výška nejnižšího bodu křivky nad rovinou je 1,5 m. Jaká je délka prohnutého lana?





Obr. 3.3

Řešení. Protože ve zvolené souřadné soustavě je nejnižší bod v počátku a $y(0) = a$, je $a = 1,5$.

Nyní sestavíme parametrické rovnice řetězovky. Jako parametr t je vhodné volit x -ovou souřadnici, tedy $x = t$. Pak $t \in (-2, 2)$.

Pro y -ovou souřadnici vyjde $y = \frac{a}{2}(e^{t/a} + e^{-t/a})$, kde $a = 1,5$.

Dále vypočteme diferenciály proměnných. Dostaneme $dx = dt$, $dy = \frac{1}{2}(e^{t/a} - e^{-t/a}) dt$.

Odtud určíme délku elementu křivky:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{t/a} - e^{-t/a})^2} dt = \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2t/a} - 2 + e^{-2t/a})} dt = \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2t/a} + 2 + e^{-2t/a})} dt = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(e^{t/a} + e^{-t/a})^2} dt = \frac{1}{2}(e^{t/a} + e^{-t/a}) dt. \end{aligned}$$

Pro délku křivky tudíž dostaneme:

$$m_1(K) = \int_K ds = \int_{-2}^2 \frac{1}{2}(e^{t/a} + e^{-t/a}) dt.$$

Po určení primitivní funkce a dosazení mezí celkově vyjde:

$$m_1(K) = \frac{a}{2} \left[e^{t/a} - e^{-t/a} \right]_{-2}^2 = a(e^{2/a} - e^{-2/a}) = 2a \sinh \frac{2}{a}.$$

Dosadíme-li za a hodnotu 1,5, bude délka prohnutého lana rovna přibližně 5,3 m. ▲

Hmotnost křivky

Pokud má křivka specifickou hustotu ρ konstantní, pak její hmotnost je rovna součinu její délky a této specifické hustoty.

Pokud však není specifická hustota konstantní, ale je závislá na tom, v jakém bodě křivky se nachází, tedy $\rho = \rho(x, y, z)$, pak hmotnost křivky vypočteme pomocí integrálu takto.

Křivku opět rozdělíme na elementy, délku elementu označíme ds . V každém bodě elementu je specifická hustota $\rho(x, y, z)$. Hmotnost tohoto elementu dm je přibližně rovna součinu hustoty ve zvoleném bodě elementu a délky tohoto elementu, tudíž platí $dm = \rho(x, y, z) ds$.

Celkovou hmotnost křivky získáme tedy tak, že sečteme hmotnosti těchto elementů, což vyjádříme vzorcem

$$m = \int_K dm = \int_K \rho(x, y, z) ds. \quad (3.6)$$



Příklad 4.2. V kartézské souřadné soustavě je zadáno rovinné silové pole (Ω, F) , kde $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ a $F = \frac{-xi - yj}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Vypočtěte práci, která je vykonána při přemístění hmotného bodu po parabole $y = 1 + x^2$ z bodu $P[2, 5]$ do bodu $Q[0, 1]$ v tomto silovém poli.

Řešení. Nejprve křivku K vyjádříme parametricky.

Jestliže zvolíme za parametr t souřadnici x bodu paraboly, dostaneme parametrické rovnice křivky

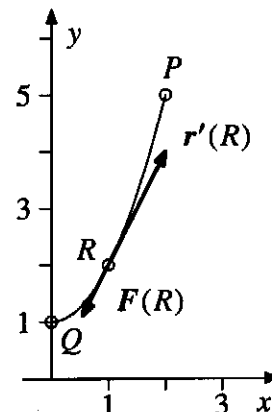
$$K: \quad x = t, \quad y = 1 + t^2, \quad t \in (0, 2).$$

Křivka je nesouhlasně orientovaná s touto parametrizací.

Dále určíme diferenciály souřadnicových funkcí:

$$dx = dt, \quad dy = 2t dt.$$

Pro názornost je na obr. 4.3 nakreslen bod R křivky K mající souřadnice $[1, 2]$ a příslušné vektory $r'(R) = i + 2j$ a $F(R) = (-i - 2j)/\sqrt{5}$. Vykonaná práce A bude



Obr. 4.3

$$A = \int_K F \cdot dr = \int_K \frac{-x dx - y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Dosadíme-li nyní do integrálu za jednotlivé výrazy jejich parametrické vyjádření, dostaneme (orientace je nesouhlasná s parametrizací)

$$A = - \int_0^2 \frac{-t dt - (1 + t^2) 2t dt}{\sqrt{t^2 + (1 + t^2)^2}} = \int_0^2 \frac{(2t^3 + 3t) dt}{\sqrt{t^4 + 3t^2 + 1}}.$$

Po substituci $t^4 + 3t^2 + 1 = z^2$ dostaneme

$$A = \int_1^{\sqrt{29}} dz = \underline{\underline{\sqrt{29} - 1}}.$$

Tedy při pohybu po zadané křivce síla vykonala kladnou práci. ▲

Pojmy k zapamatování

- integrální součet příslušející křivkovému integrálu II. druhu,
- orientace křivky a její vztah k hodnotě křivkového integrálu II. druhu,
- práce při pohybu hmotného bodu v silovém poli.



9. KŘIVKY - PARAMETRIZACE, TEČNY

Další příklady na procvičení TRIAL[π] 604

9.1. Parametrizace křivek. Načrtněte graf následujících křivek a doplňte intervaly I_i u parametrizací γ_i tak, aby se jednalo o shodnou křivku

$$(1) \gamma : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2t \\ 5 + 4t \end{pmatrix}, t \in \langle -1, 0 \rangle,$$

$$\gamma_1 : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t \\ 1 + 2t \end{pmatrix}, t \in I_1,$$

$$\gamma_2 : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -1 - 2t \end{pmatrix}, t \in I_2,$$

$$(2) \gamma : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle,$$

$$\gamma_1 : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, t \in I_1,$$

$$\gamma_2 : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}, t \in I_2,$$

$$\gamma_3 : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, t \in I_3,$$

$$\gamma_4 : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, t \in I_4,$$

$$(3) \gamma : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \in (0, \infty),$$

$$\gamma_1 : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 1 - 2t \end{pmatrix}, t \in I_1,$$

$$\gamma_2 : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, t \in I_2,$$

$$\gamma_3 : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log(t) \\ \log(t) \end{pmatrix}, t \in I_3,$$

9.2. Tečny křivek. Nalezněte tečnu křivky v daném bodě T . Nakreslete obrázky

$$(1) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \text{ bod } T = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right],$$

$$(2) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cos(t) \\ 1 + \sin(t) \end{pmatrix}, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \text{ bod } T = \left[1 - \sqrt{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right],$$

$$(3) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \text{ bod } T = [\cosh(1), \sinh(1)],$$

$$(4) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cos(4t) \\ t \sin(4t) \end{pmatrix}, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \text{ bod } T = [-\frac{\pi}{4}, 0],$$

$$(5) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, t \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle, \text{ bod } T = [1, 0, 0],$$

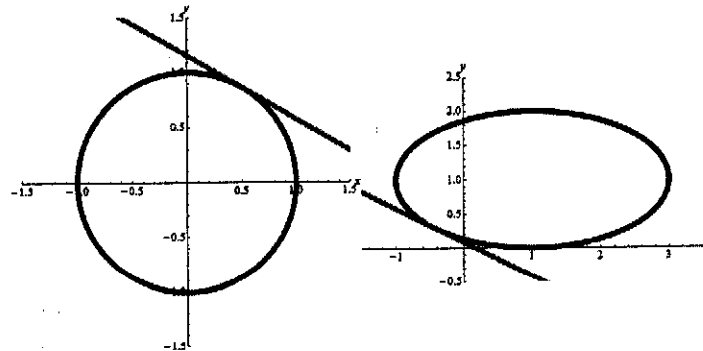
VÝSLEDKY

9.1.

- (1) $I_1 = \langle 0, 2 \rangle, I_2 = \langle -3, -1 \rangle$
 (2) $I_1 = \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \rangle, I_2 = \langle \pi, 2\pi \rangle, I_3 = \langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \rangle, I_4 = \langle -1, 0 \rangle,$
 (3) $I_1 = \langle -\infty, \frac{1}{2} \rangle, I_2 = \mathbb{R}, I_3 = \langle 1, \infty \rangle.$

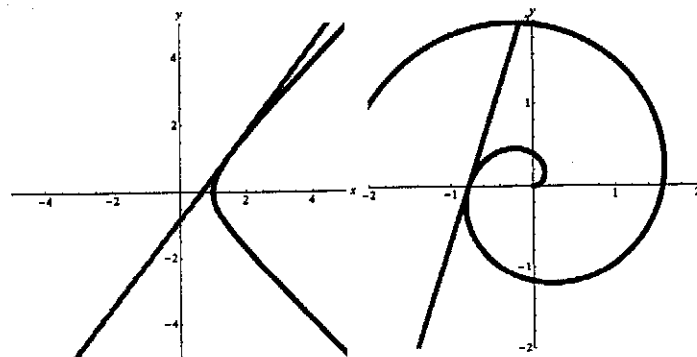
9.2.

(1) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}t}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+t}{2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$



(2) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2}t \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - t\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$

(3) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(1) + t \sinh(1) \\ \sinh(1) + t \cosh(1) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$



(4) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} - t \\ -\pi t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$

$$(5) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$